PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN-CLAUDE LABLANQUIE

Propriétés de forcing et modèles génériques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 13-20
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_13_0>

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

PROPRIETES DE FORCING ET MODELES GENERIQUES

par Jean-Claude LABLANQUIE

Si $\mathcal{P} = (P, \leq, f)$ est une condition de forçing (Keisler [3]) et si pour un $n \in \omega$, il existe une condition $p \in P$ qui n'est majorée par aucune condition "n-prégénérique" alors $\mathcal{P}$ possède $2^{\aleph_0}$ modèles génériques dénombrables et non isomorphes deux à deux. En appliquant le résultat précédent à des propriétés de forçing associées à une théorie T et à un ensemble Φ de formules on obtient une généralisation d'un théorème de Simmons et d'un théorème de Cusin (cf. [4] et [2]).

1. PRELIMINAIRES - RAPPELS.

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques définitions et résultats de l'article de Keisler cité en référence (3).

Dans ce qui suit, L est un langage dénombrable du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité avec les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et le quantificateur $\exists$. La conjonction $\wedge$ et le quantificateur $\forall$ étant considérés comme abréviations : $\phi \wedge \psi$ de $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ et $\forall x \phi$ de $\neg\exists x \neg\phi$. La logique infinitive $L_{\omega_1\omega}$ se construit à partir de L en permettant les disjonctions infinies $\bigvee\Phi$, où Φ est un ensemble dénombrable de formules. La conjonction infinie $\bigwedge\Phi$ est considérée comme abréviation de $\neg \bigvee_{\phi \in \Phi} \neg\phi$.

Un ensemble L_A de formules de $L_{\omega_1\omega}$ sera appelé un *fragment* de L si : (1) toute formule de L est dans L_A ; (2) L_A est clos pour $\neg$, $\exists$ et les disjonctions finies ; (3) si $\phi(x) \in L_A$ et si τ est un terme, alors $\phi(\tau) \in L_A$. (4) si $\phi \in L_A$, toutes les sous-formules de ϕ appartiennent à L_A.

Dans tout ce qui suivra, L_A sera un fragment dénombrable de $L_{\omega_1\omega}$ soit C un ensemble dénombrable de nouveaux symboles de constantes. On désignera par K le langage obtenu à partir de L par adjonction des constantes de C et par K_A le plus petit fragment de $K_{\omega_1\omega}$ contenant L_A. (Remarquons que K_A est dénombrable et que si $\phi \in K_A$, il ne figure qu'un nombre fini de constantes de C dans ϕ).

Les K-structures seront de la forme $(M,a_c)_{c\in C}$ où M est une L-structure et où a_c est l'interprétation dans M de la constante c. On dira que $(M,a_c)_{c\in C}$ est un *modèle canonique* pour K si $M = \{a_c/c \in C\}$.

Une *propriété de forcing* pour L est un triplet $\mathcal{P} = (P, \leqslant, f)$ tel que :
(i) $(P, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonné avec un plus petit élément noté O.
(ii) Pour tout $p \in P$, $f(p)$ est un ensemble d'énoncés atomiques de K_A.
(iii) Si $p \leqslant q$ alors $f(p) \subset f(q)$.
(iv) Soient σ, τ des termes clos de K et $p \in P$, alors :
(*) Si $(\sigma = \tau) \in f(p)$, il existe $q \geqslant p$ tel que $(\tau = \sigma) \in f(q)$;
(**) si $(\sigma = \tau) \in f(p)$ et si $\phi(\sigma) \in f(p)$, il existe $q \geqslant p$ tel que $\phi(\tau) \in f(q)$;
(***) il existe $c \in C$ et $q \geqslant p$ tels que $(c = \sigma) \in f(q)$.
Les éléments de P sont appelés *conditions de* $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété de forcing et ϕ un énoncé de K_A, on définit la *relation* p *force* ϕ *dans* K_A (et on note $p \Vdash \phi$) par les conditions suivantes :
(1) si Φ est atomique, $p \Vdash \Phi$ si et seulement si $\Phi \in f(p)$;
(2) $p \Vdash \neg \Phi$ si et seulement si il n'existe pas de condition $q \geqslant p$ telle que $q \Vdash \Phi$;
(3) $p \Vdash \bigvee \Phi$ si et seulement si il existe $\phi \in \Phi$ tel que $p \Vdash \phi$;
(4) $p \Vdash \exists x\, \Phi(x)$ si et seulement si il existe $c \in C$ tel que $p \Vdash \Phi(c)$.

On dit que p *force faiblement* Φ et on note $p \Vdash^{w} \Phi$ si et seulement si $p \Vdash \neg\neg \phi$.

Une partie G de P sera dite $\mathcal{P}$,A-générique si et seulement si :
(1) Si $p \in G$ et si $q \leq p$ alors $q \in G$;
(2) si $p \in G$ et $q \in G$, il existe $r \in G$ tel que $p \leq r$ et $q \leq r$;
(3) pour tout énoncé ϕ de K_A il existe $p \in G$ tel que $p \Vdash \phi$ ou $\Vdash \neg\phi$

Soit $(M,a_c)_{c \in C}$ une K-structure, on dit que la partie générique G *engendre* $(M,a_c)_{c \in C}$ si et seulement si $(M,a_c)_{c \in C}$ est un modèle canonique pour K et tout énoncé de K_A forcé par un élément de G est valide dans $(M,a_c)_{c \in C}$.

$(M,a_c)_{c \in C}$ sera un *modèle $\mathcal{P}$, A-générique pour une condition* $p \in P$ si et seulement si $(M,a_c)_{c \in C}$ est engendré par une partie générique contenant p. Si M est une L-structure, M sera un modèle $\mathcal{P}$, A-générique s'il existe une interprétation $c \longmapsto a_c$ des constante de C dans M telle que $(M,a_c)_{c \in C}$ soit $\mathcal{P}$, A-générique pour une condition $p \in P$.

Rappelons le théorème fondamental suivant :

Si $\mathcal{P}$ est une propriété de forcing et si $p \in P$ *, alors il existe un modèle $\mathcal{P}$,A-générique pour* p.

2. Dans ce paragraphe, nous allons étudier le nombre des structures génériques dénombrables d'une propriété de forcing $\mathcal{P} = (P, \leq, f)$.

Soit $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ une énumération sans répétitions de C, on notera L^n le langage $L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$; K_A^n sera le plus petit fragment de $L^n_{\omega_1\omega}$ contenant L_A (On posera $L^\circ = L$ et $K_A^\circ = L_A$).

Si $n \in \omega$, une condition $p \in P$ sera *n-prégénérique* si et seulement si pour tout énoncé ϕ de K_A^n ou bien $p \overset{w}{\Vdash} \phi$ ou bien $p \overset{w}{\Vdash} \neg\phi$. On notera S_n l'ensemble des conditions n-prégénériques.

Si S est une partie de P, on dit que S *est dense dans* P si pour tout $p \in P$, il existe $q \in S$ tel que : $p \leq q$.

THEOREME 2.1. - *Supposons qu'il existe* $n \in \omega$ *tel que* S_n *ne soit pas dense dans* P, *alors il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles $\mathcal{P}$,* A-*génériques dénombrables et non isomorphes deux à deux.*

PREUVE. - S_n n'est pas dense dans P, donc il existe une condition $p_o \in P$ qui n'est majorée par aucune condition de S_n. Montrons que pour toute condition $p \geq p_o$ il existe $p_1 \geq p$ et $p_2 \geq p$ et un énoncé ϕ de K_A^n tels que $p_1 \Vdash \neg\phi$ et $p_2 \Vdash \phi$. En effet si $p \geq p_o$, alors $p \notin S_n$ donc il existe un énoncé ϕ de K_A^n tel que $p \nVdash^{w} \phi$ et $p \nVdash^{w} \neg\phi$, par suite, il existe $p_1 \geq p$ tel que $p_1 \Vdash \neg\phi$ et $p_2 \geq p$ tel que $p_2 \Vdash \phi$.

En utilisant cette propriété nous allons construire un arbre de conditions ayant $2^{\aleph_0}$ branches maximales, tel que l'ensemble des conditions de chaque branche maximale soit générique, et tel que, si α et β sont deux branches maximales distinctes, il existe un énoncé ψ de K_A^n forcé par une condition de α et dont la négation $\neg\psi$ est forcée par une condition de β.

Considérons $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ une énumération de tous les énoncés de K_A et soit p_o une condition de P majorée par aucune condition de S_n. Il existe donc $q_1 \geq p_o$ et $q_2 \geq p_o$ et un énoncé ψ de K_A^n tel que $q_1 \Vdash \neg\psi$ et $q_2 \Vdash \psi$. Si $q_1 \Vdash \neg\phi_o$ on pose $p_{oo} = q_1$ et si $q_1 \nVdash \neg\phi_o$ il existe $q_1' \geq q_1$ tel que $q_1' \Vdash \phi_o$, on pose alors $p_{oo} = q_1'$. De même si $q_2 \Vdash \neg\phi_o$ on pose $p_{o1} = q_2$ de si $q_2 \nVdash \neg\phi_o$ il existe $q_2' \geq q_2$ tel que $q_2' \Vdash \phi_o$ et on pose $p_{o1} = q_2'$ partant ensuite de p_{oo} et procédant de la même manière on construira des conditions $p_{ooo} \geq p_{oo}$ et $p_{oo1} \geq p_{oo}$ telles que : (i) $p_{ooo} \Vdash \phi_1$ ou $p_{ooo} \Vdash \neg\phi_1$ et (ii) $p_{oo1} \Vdash \phi_1$ ou $p_{oo1} \Vdash \neg\phi_1$ et (iii) il existe ψ' énoncé de K_A^n tel que $p_{ooo} \Vdash \psi'$ et $p_{oo1} \Vdash \neg\psi'$. On construirait de la même façon p_{o1o} et p_{o11} en partant de p_{o1}. En continuant ainsi, on obtient un arbre de conditions :

niveau o -------------------------------- p_o
niveau 1 --------------- p_{oo} p_{o1}
niveau 2 ------ p_{ooo} p_{oo1} p_{o1o} p_{o11}
niveau 3 --- p_{oooo} p_{ooo1} p_{oo1o} p_{oo11} p_{o1oo} p_{o1o1} p_{o11o} p_{o111}

Cet arbre de conditions à $2^{\aleph_0}$ branches maximales. Par construction toute condition de niveau n+1 force ϕ_n ou $\neg \phi_n$, donc l'ensemble des conditions d'une branche maximale est une partie $\mathscr{P}$, A-générique. Enfin si α et β sont deux branches maximales distinctes, il existe un énoncé ψ de K_A^n forcé par une condition de α et dont la négation est forcée par une condition de β. Cet arbre nous fournit donc $2^{\aleph_0}$ modèles $\mathscr{P}$, A-génériques pour la condition p_0 dont les restrictions au langage L^n sont non K_A^n -élémentairement équivalents deux à deux. Mais toute L-structure dénombrable a au plus $\aleph_0$ expansions dans L_n, donc on obtient $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de L qui sont $\mathscr{P}$, A-génériques et non-isomorphes deux à deux.

Etant donné que $L^0 = L$ et que $K_A^0 = L_A$, nous avons démontré par conséquent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. - *Si* S_0 *n'est pas dense dans* P *alors il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles* $\mathscr{P}$, *A-génériques dénombrables et non* L_A*-élémentairement équivalents deux à deux.*

3. - Nous allons maintenant étudier des propriétés de forcing associées à une théorie T et qui généralisent le forcing fini étudié par Barwise et Robinson en (1). L'application du théorème 2.1 et du corollaire 2.2 au forcing fini nous permettra de retrouver un résultat de Cusin (2) et un résultat de Simmons (4) sur le nombre des modèles génériques d'une théorie T.

Dans tout ce qui suit, T est une théorie de L_A et Φ est un ensemble de formules de L_A contenant les formules atomiques et clos pour les sous-formules. Nous désignerons par $\mathscr{M}$ la classe de tous les modèles de T et nous noterons $\mathscr{P}(\mathscr{M}, \Phi)$ la propriété de forcing (P, $\leq$, f) où P est l'ensemble des parties finies $p \subset \Phi(C)$ qui sont satisfaites dans $\mathscr{M}$. ($\Phi(C)$ est l'ensemble de tous les énoncés $\phi(c_1,\ldots,c_n)$ de K_A tels que $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in \Phi$) ; $\leq$ est la relation d'inclusion $\subset$ et pour tout $p \in P$, f(p) est l'ensemble des énoncés atomiques figurant dans p.)

REMARQUE. - Si on prend $L_A = L$ et Φ l'ensemble des formules de base, **c'est** à dire l'ensemble des formules atomiques et des négations de formules atomiques, on retrouve le forcing fini de Robinson-Barwise.

A ce niveau-là , nous avons besoin de trois lemmes techniques :

LEMME 3.1. - *Soient* p *une condition de* $\mathcal{P}(\mathcal{M},\Phi)$ *et* ϕ *un énoncé de* $\Phi(\mathrm{C})$. *alors :*

(i) Si $T \cup p \models \phi$, *on a :* $p \Vdash^{w} \phi$.

(ii) Si $p \Vdash^{w} \phi$, *alors* $T \cup \{\phi\}$ *est consistant avec* **p**.

La démonstration est semblable à celle du lemme 2.5 de (3).

LEMME 3.2. - *Soient* $p = p(c_1,\dots,c_n)$ *une condition de* $\mathcal{P}(\mathcal{M},\Phi)$ *et* $\phi = \phi(c_1,\dots,c_n)$ *un énoncé de* K_A *tel que* $p \Vdash \phi$ *où toutes les* ***constantes*** *de Coccurant dans* p *ou dans* ϕ *sont parmi* $c_1,\dots,c_n$. *Soient* $c'_1,\dots,c'_n$ *des éléments quelconques de* C *et soient* $p' = p(c'_1,\dots,c'_n)$, *et* $\phi' = \phi(c'_1,\dots,c'_n)$. *Si* p' *est une condition de* $\mathcal{P}(\mathcal{M},\Phi)$, *alors* $p' \Vdash^{w} \phi'$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.3 de (1).

Nous désignerons par T_A^f l'ensemble des énoncés de L_A qui sont **faiblement** forcés par $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble des énoncés de L_A qui sont **valides** dans tous les modèles $\mathcal{P}$, A-génériques.

Le lemme suivant généralise le lemme 2.20 de (1) et sa démonstration est en tous points semblable à celle de 2.20, en utilisant les lemmes **3.1** et 3.2.

LEMME 3.3. - *Soient* $p(c_1,\dots,c_n)$ *une condition et* $\phi(c_1,\dots,c_n)$ *un* ***énoncé*** *de* K_A *tel que* $p \Vdash^{w} \phi$ *où toutes les constantes de* C *occurant* ***dans*** p *ou dans* ϕ *sont parmi* $c_1,\dots,c_n$. *Alors l'énoncé* $\sigma \in T_A^f$ *où :*

$$\sigma = \forall x_1\dots x_n\left[\bigwedge p(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow \phi(x_1,\dots,x_n)\right] .$$

Une théorie T' de L_A est L_A*-complète* si pour tout énoncé ϕ *de* L_A , $T' \models \phi$ *ou* $T' \models \neg\phi$.

Le théorème suivant a été démontré pour le forcing fini par Simmons (4).

THEOREME 3.4. - *Si* $T = T_A^f$ *et s'il existe un énoncé* ϕ *de* L_A *consistant avec* T *et tel que* $T \cup \{\phi\}$ *ne possède pas d'extension finie* L_A*-complète alors il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles* $\mathcal{P}$, A-générique *dénombrables et non* L_A*-élémentairement équivalents deux à deux.*

PREUVE. - Il suffit de montrer que, pour la propriété de forcing $\mathcal{P}(\mathcal{M},\Phi)$ S_o n'est pas dense dans P et d'appliquer le corollaire 2.2. Supposons que S_o soit dense dans P et soit ϕ un énoncé de L_A consistant avec T tel que $T \cup \{\phi\}$ ne possède pas d'extension finie L_A-complète, alors étant donné que $T = T_A^f$ il existe $p \in P$ tel que $p \Vdash \phi$; il existe $q \geq p$ tel que $q \in S_o$; pour tout énoncé ψ de L_A $q \Vdash^{w} \psi$ ou $q \Vdash^{w} \psi$. De plus si ψ est un énoncé de L_A tel que $q \Vdash^{w} \psi$, alors si $q = q(c_1,\dots,c_n)$ en utilisant 3.3 on voit que : $\forall x_1,\dots x_n[\wedge q(x_1,\dots,x_n) \to \psi] \in T_A^f = T$, donc $[\exists x_1\dots x_n \wedge q(x_1,\dots,x_n) \to \phi] \in T$. Ceci montre que : $T \cup \{\exists x_1\dots x_n \wedge q(x_1,\dots,x_n)\}$ est L_A-complète ; en outre $q \Vdash \phi$ donc $[\exists x_1\dots x_n \wedge q(x_1,\dots,x_n) \to \phi] \in T$ et par suite : $T \cup \{\phi, \exists x_1\dots x_n \wedge q(x_1,\dots,x_n)\}$ est une extension finie et L_A-complète de $T \cup \{\phi\}$, ce qui est impossible par hypothèse.

Soit $\theta(x_1,\dots,x_n)$ une formule de L_A ; on dit que θ est T,A-*complète* si θ est consistante avec T et si pour toute formule $\phi(x_1,\dots,x_n)$ de L_A , on a $T \models \theta \to \phi$ ou $T \models \theta \to \neg \phi$. Si $\phi(x_1,\dots,x_n)$ est une formule de L_A, on dira que ϕ est T,A-*incomplétable* si ϕ est consistante avec T et s'il n'existe pas de formule $\theta(x_1,\dots,x_n)$ T,A-complète telle que $T \models \theta \to \phi$.

Le théorème suivant a été démontré pour le forcing fini par Simmons (4) et Cusin (2).

THEOREME 3.5. - *Si* $T = T_A^f$ *et si* **T** *possède une formule* T,A-*incomplétable, il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles* $\mathcal{P}$, A-*génériques dénombrables et non isomorphes deux à deux.*

PREUVE. - Soit $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule T,A-incomplétable, ϕ est consistante avec $T_A^f = T$; il existe donc une condition q telle que $q \Vdash \phi(c_1,\ldots,c_n)$; montrons alors que S_n n'est pas dense dans P ; sinon il existerait $p \geq q$ et $p \in S_n$, donc pour tout $\psi \in K_A^n$ ou bien $p \Vdash^{w} \psi$ ou bien $p \Vdash^{w} \neg\psi$. Soit $p = p(c_1,\ldots,c_n,c_{n+1},\ldots,c_{n+m})$ et soit $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule de L_A, alors ou bien $p \Vdash^{w} \psi(c_1,\ldots,c_n)$ et donc (lemme 3.3) $T \models \exists y_1\ldots y_m \bigwedge p(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \rightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)$ ou bien $p \Vdash^{w} \neg\psi(c_1,\ldots,c_n)$ et alors :

$T \models \exists y_1\ldots y_m \bigwedge p(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \rightarrow \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$. Posons $\theta(x_1,\ldots,x_n) = \exists y_1\ldots y_m \bigwedge p(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$; d'après ce qui précède θ est T,A-complète, de plus $p \Vdash \phi(c_1,\ldots,c_n)$ donc $T \models \theta \rightarrow \phi$; mais alors ϕ n'est pas T-incomplétable, ce qui est impossible. Le résultat s'obtient alors par application du théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE. -

(1) BARWISE J. et ROBINSON A., *Completing theories by forcing*, Annals of Math., Logic, Vol. 2 , n° 2 (1970), p. 119-142.

(2) R. CUSIN, *The number or countable generic models for finite forcing*, Fund. Math. Vol. 84, (1974), p. 265-270.

(3) H.J. KEISLER, *Forcing and the omitting types theorem.* Studies in Models theory, p. 96-133. MAA Studies in Math., Vol. 8, Buffalo, N.Y. (197

(4) SIMMONS H., *Le nombre de structures génériques d'une théorie*.C.R. Acad. Sc. Paris, tome 277 (1973), p. 487-489.