

MAURICE POUZET

**Quelques remarques sur les résultats de Tutte concernant  
le problème de Ulam**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1977, tome 14, fascicule 2  
, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1977\\_\\_14\\_2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_1_0)

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LES RESULTATS DE TUTTE  
 CONCERNANT LE PROBLEME DE ULAM

par Maurice POUZET

RESUME. Nous simplifions les techniques de dénombrement utilisées par Tutte, en utilisant essentiellement celles de Kelly. Nous prouvons directement que si  $A$  et  $A'$  sont deux matrices d'ordre  $n$  ( $n \geq 3$ ) symétriques et à coefficients dans une algèbre (sur  $Q$ ) commutative et unitaire, telles que pour chaque  $i$  ( $i=1..n$ ) les matrices  $A_{ii}$  et  $A'_{ii}$  (obtenues par suppression de la ligne et colonne  $i$ ) se déduisent l'une de l'autre par une matrice de permutation alors les matrices  $A$  et  $A'$  ont même déterminant.

I - LA METHODE DE DENOMBREMENT DE KELLY.

I-1. Considérations élémentaires.

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Pour chaque entier  $p$ ,  $p < n$ , on a, dans le  $Q$ -espace vectoriel engendré par l'ensemble  $[E]^p$  des parties  $P$  à  $p$  éléments de  $E$ , l'identité 
$$\sum_{P \in [E]^p} P = \frac{1}{n-p} \sum_{x \in E} \sum_{P \in [E-\{x\}]^p} P.$$

De ce fait trivial résulte ceci :

I-1. a) Si  $F$  est un ensemble fini,  $\varphi$  une application de  $F$  dans un  $Q$ -espace vectoriel  $A$  et  $r_g$  une application de  $F$  dans  $\mathcal{P}(E) - \{E\}$  alors la quantité

$\sum_{f \in F} \varphi(f)$ , qui vaut  $\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r_g f \in [E]^p} \varphi(f)$ , est connue lorsque pour chaque entier  $p$

la suite  $\left( \sum_{r_g f \in [E-\{x\}]^p} \varphi(f) \right)_{x \in E}$  est connue à une permutation près. Dans ce

cas nous dirons que cette quantité est restructurable.

Plus généralement considérons  $q$  ensembles finis  $F_i$ , avec  $q \geq 2$ , et  $q$  applications  $\varphi_i$  de  $F_i$  dans une algèbre commutative  $A$  (par exemple l'algèbre engendrée par les parties de  $E$ ) et  $q$  applications  $r_{g_i}$  de  $F_i$  dans  $\mathcal{P}(E) - \{E\}$ . En développant le produit  $\prod_{i=1}^q (\sum_{f_i \in F_i} \varphi_i(f_i))$  on constate ceci :

I-1. b) Si les  $\sum_{f_i \in F_i} \varphi_i(f_i)$ , pour  $i=1 \dots q$ , et  $\sum_{(f_1 \dots f_q) \in \prod F_i} \prod_{i=1}^q \varphi_i(f_i) / \cup_{r_{g_i} f_i} f_i \neq E$

sont reconstructibles alors  $\sum_{(f_1 \dots f_q) / \cup_{r_{g_i} f_i} f_i = E} \prod_{i=1}^q \varphi_i(f_i)$  est commu.

I-2. Applications.

I-2.1. Etant donné un graphe  $G$  nous notons  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets et  $E(G)$  l'ensemble de ses arêtes. Etant donné un sommet  $v$  de  $G$  nous notons  $G_v$  le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant le sommet  $v$  ainsi que les arêtes incidentes à  $v$ . Suivant [1] nous appelons *reconstruction* de  $G$  tout graphe  $H$  ayant mêmes sommets que  $G$  et tels que les graphes  $G_v$  et  $H_v$  soient isomorphes pour tout  $v$ . Nous dirons que  $G$  est *reconstructible* lorsque toute reconstruction de  $G$  lui est isomorphe. Nous dirons qu'une fonction définie sur la classe des graphes (ou une sous-classe) est *reconstructible* lorsque pour tout graphe elle prend la même valeur sur les reconstructions de ce graphe. Les autres termes non définis ici sont ceux de [1].

I-2.1. a) PROPOSITION. Soient  $n, p, q$  trois entiers avec  $p \leq n$ ,  $q$  classes  $G_1, \dots, G_q$  de graphes ayant moins de  $n$  sommets, chaque  $G_i$  étant stable par isomorphie (i.e. contenant tout graphe isomorphe à un élément de  $G_i$ ). Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets le nombre de suites  $(G_1 \dots G_q)$  telles que  $G_i \in G_i, V(G_i) \subseteq V(G), E(G_i) \subseteq E(G), |\cup_{i=1}^q V(G_i)| = p$ , est reconstructible.

PREUVE. Soient  $E = V(G)$ ,  $F_i$  l'ensemble des  $G_i$  tels que  $G_i \in G_i$  et  $V(G_i) \subseteq$

$r_{G_i}$  l'application qui à  $G_i$  associe  $V(G_i)$  et  $\varphi_i$  l'application qui à  $G_i$  associe 1 si  $E(G_i) \subseteq E(G)$  et 0 sinon. Si  $p < n$  alors la reconstruction du nombre de suites  $(G_1 \dots G_q)$  résulte directement de I-2.a). Si  $p=n$  elle résulte de la reconstruction pour tous les  $p' < n$  et de I-2.b).

I-2.1. b) Cas particulier important.

1) Chaque  $G_i$  est la classe des graphes isomorphes à un graphe  $\Gamma_i$

2) Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets qui est réunion d'au moins une suite  $G_1 \dots G_q$  avec  $G_i \in G_i$ , le nombre de telles suites dont la réunion est  $G$  est indépendant de  $G$ .

Sous ces conditions, pour chaque graphe  $G'$  à  $n$  sommets, le nombre de sous-graphes  $G$  de  $G'$  tels que  $G = \cup G_i$  avec  $G_i \in G_i$  est reconstructible.

La condition (2) est remplie lorsque la donnée d'un graphe  $G$  réunion d'une suite  $G_i$  détermine l'ensemble des  $G_i$ .

EXEMPLE. Si chaque  $\Gamma_i$  est un graphe connexe à  $r_i$  sommets, respectivement un block à  $r_i+1$  sommets, et si  $\sum r_i = n$ , respectivement  $(\sum r_i)+1=n$ , alors pour tout graphe  $G'$  à  $n$  sommets le nombre de sous-graphes disconnexes, respectivement non séparables, de  $G'$  ayant  $n$  sommets et dont les composantes connexes, respectivement les blocs, sont isomorphes aux  $\Gamma_i$  est reconstructible.

Ceci constitue les propositions 6.7 et 6.8 p.27,28 de Tutte.

---

(\*) Un graphe  $G$  est connexe lorsque deux sommets quelconques sont liés par un chemin il est non séparable lorsque chaque sous-graphe  $G_v$  est connexe : ses composantes connexes sont ses sous-graphes connexes maximaux, ses blocs sont ses sous-graphes non séparables maximaux.

I-2.2. Tout ceci reste encore valable en considérant par exemple des relations d'arité quelconque. En particulier le fait que les graphes considérés ci-dessus sont simples ou non, orientés ou non, n'est d'aucune importance. Mais alors que la proposition 6.7. de Tutte suffit à redonner la solution positive du problème de Ulam pour les graphes non connexes, nous ignorons si formulée pour les digraphes elle permet de retrouver la "reconnaissance"\* des digraphes non dirigés connexes (obtenue par B.Manvel 1975). Plus fortement nous ignorons si ces derniers sont reconstructibles.

Donnons deux applications formulées dans la terminologie des matrices, en considérant comme reconstruction d'une matrice  $A$  d'ordre  $n$  toute matrice  $A'$  d'ordre  $n$  telle que pour chaque  $i$  les matrices  $A_{ii}$  et  $A'_{ii}$  (obtenues par suppression de la ligne et colonne  $i$ ) se déduisent l'une de l'autre par une même permutation des lignes et colonnes (i.e.  $A'_{ii} = P_i^{-1} A_{ii} P_i$  par une matrice de permutation  $P_i$ ).

I-2.2. a) Si  $A$  est une matrice d'ordre  $n$  alors la somme  $\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$  où  $\sigma$  décrit les permutations  $\sigma$  se décomposant en  $q$  cycles ( $q > 1$ ) de longueurs  $n_1 \dots n_q$ , est reconstructible.

PREUVE. Prendre  $E = 1, 2 \dots n$ , puis  $\Gamma_i$  égal à l'ensemble des permutations  $\sigma_i$   $n_i$  éléments quelconques de  $E$ ,  $\varphi_i(\sigma_i) = \prod_{j=1}^{n_i} a_{j, \sigma_i(j)}$  et  $r_{\Gamma_i}(\sigma_i)$  égal au déterminant

I-2.2. b) Plus généralement, mais en supposant  $A$  symétrique d'ordre  $n$ , si  $\Gamma_i$  pour  $i=1 \dots q$ ,  $q > 1$  est un graphe connexe à  $r_i$  sommets avec  $\sum_{i=1}^q r_i = n$  (respectivement un bloc à  $r_i+1$  sommets avec  $(\sum_{i=1}^q r_i)+1=n$ ) alors la somme  $\sum_G \prod_{u \in E(G)} a_u$  où  $G$  décrit l'ensemble des graphes sur  $1, 2 \dots n$  qui s'écrivent

$$G = \bigcup_{i=1}^q G_i \text{ avec } G_i \text{ isomorphe à } \Gamma_i, \text{ est reconstructible.}$$

\* Une classe  $G$  de graphes, ou ici de digraphes, est "reconnaissable" lorsque toute reconstruction d'un élément de  $G$  est  $G$ .

II - UNE RELATION ENTRE LES NOMBRES DE CYCLES D'UNE MATRICE SYMETRIQUE.

II-1. Reprenons comme suit la méthode de Tutte ; soit  $E$  un ensemble fini à  $e$  éléments ;  $f$  une application de  $E$  dans une algèbre commutative et unitaire  $A$  et soit  $\pi_f$  l'application de  $\mathcal{H}(E)$  dans  $A$  définie comme suit :  $\pi_f(\emptyset) = 1$  et

$\pi_f(X) = \prod_{x \in X} f(x)$ . Soit  $r$  une application de  $\mathcal{H}(E)$  dans  $N$  vérifiant seulement  $r(X) \leq |X|$  et soit  $P_{f,r}(t,z)$  le polynôme  $\sum_{X \subseteq E} \pi_f(X) t^{r(X)} z^{|X|-r(X)}$ . On a :

$$P_f(t,t) = \sum_{X \subseteq E} \pi_f(X) t^{|X|} = \sum_{m=0}^e \sum_{|X|=m} \pi_f(X) t^m = \prod_{x \in X} (f(x)+t) = \prod_{y \in \text{Im}f} (y+t)^{|\mathcal{F}^{-1}(y)|}.$$

Ce polynôme est donc connu dès que sont connus  $\text{Im}f$  et la suite  $(|\mathcal{F}^{-1}(y)|)_{y \in \text{Im}f}$ .

Ceux-ci étant supposés connus alors  $P_{f,r}$  est connu dès que sont connus les coefficients de  $t^k z^{m-k}$  pour  $k > 1$  (procéder comme Tutte, page 31, proposition 7.3. :

$$P_{f,r}(t,z) = R_1(t,z) + \sum_{m=0}^e b_m t z^{m-1} \text{ donc } \sum_{m=0}^e b_m t^m = P_{f,r}(t,t) - R_1(t,t)$$

comme les deux polynômes du membre de droite sont connus, celui de gauche et donc les  $b_m$  sont connus).

II-2.

II-2. a) PROPOSITION. Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$ , avec  $n \geq 3$ , symétrique, à coefficients dans une algèbre commutative et unitaire. Alors  $\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$

où  $\sigma$  parcourt toutes les permutations cycliques sur  $n$  éléments (le "nombre" de cycles hamiltoniens de  $A$ ) est reconstructible.

PREUVE. Prendre pour  $E$  l'ensemble  $[E]^2$  des parties à deux éléments de  $E=\{1,2,\dots,n\}$  pour  $f$  l'application qui à  $\{i,j\}$  associe  $a_{ij}$ , pour  $r$  l'application qui à  $X$  considéré comme graphe associe le nombre de ses blocs. Voyons que le coefficient

de  $t^k z^{m-k}$  est reconstructible : ce coefficient se décompose en :

$$\sum_{p=0}^n \sum_{|X|=m, r(X)=k, |V(X)|=p} \pi_f(X)$$

. Chaque terme de la somme pour  $p < n$  est reconstructible d'après le lemme de Kelly. Pour  $p=n$  le terme correspon-

tant se décompose en :

$$\sum_{q=1}^m \sum_{\substack{|X|=m, r(X)=k, \\ |V(X)|=n, C(V(X))=q}} \pi_f(X)$$

dans laquelle  $C(V(X))$  est le nombre de composantes connexes de  $V(X)$ . D'après I-2.2.b) tous les termes pour  $q > 1$  sont reconstructibles et si  $k > 1$  alors le terme pour  $q=1$  est reconstructible. Donc pour  $k > 1$  le coefficient de  $t^k z^{m-k}$  est reconstructible. Or puisque  $n \geq 3$ ,  $\text{Im} f$  et la suite  $(|f^{-1}(y)|)_{y \in \text{Im} f}$  sont reconstructibles (ceci via le lemme de Kelly). Donc compte tenu de II-1 le coefficient de  $tz^{m-1}$  est reconstructible. Avec ce que l'on vient de voir il en résulte que le terme pour  $k=1, q=1$  figurant dans la somme ci-dessus, i.e. le terme  $\sum \{ \pi_f(X) / |X|=m, V(X)=n, r(X)=1, C(V(X))=1 \}$  est reconstructible. Pour  $m=n$  le graphe  $X$  définit une permutation cyclique sur  $n$  éléments, donc dans ce cas ce terme est à un facteur près (égal à  $1/2$ ) la somme cherchée.

II-2.2. c) COROLLAIRE. Le déterminant de  $A+\lambda I$ , i.e. le polynôme caractéristique de  $A$ , et plus généralement le déterminant de  $A+\lambda I + \mu U$ , où  $U$  est la matrice ne comportant que des 1, sont reconstructibles.

II-2.2. d) COROLLAIRE. Le nombre de chemins hamiltoniens de  $A$ ,  $\sum_{C} \prod_{u \in C} a_u$  où  $C$  décrit tous les chemins de longueur  $n$  sur  $1, 2, \dots, n$ , est reconstructible.

PREUVE. Calculer le nombre de cycles hamiltoniens de  $A+U$  et utiliser II-2.2.c) et le lemme de Kelly.

REMARQUE : W.Tutte a d'abord obtenu la reconstruction du déterminant pour des mots ces formées de 0 et 1 et l'a étendue aux matrices ayant des coefficients entiers. Naturellement cela suffit pour l'étendre à des matrices à coefficients quelconque

III - RAPPORT AVEC UNE VERSION GEOMETRICO-ALGEBRIQUE DU PROBLEME DE RECONSTRUCTION.

En toute généralité le problème de reconstruction des matrices peut se formuler ainsi :

Etant données deux matrices *symétriques*  $A$  et  $A'$  d'ordre  $n \geq 3$  y-a-t-il équivalence entre :

- (i)  $A$  et  $A'$  se déduisent l'une de l'autre par une permutation
- (ii) il existe une permutation  $\sigma$  de  $1, 2, \dots, n$  telle que pour chaque  $i$ ,  $A_{ii}$  et  $A'_{\sigma(i)\sigma(i)}$  se déduisent l'une de l'autre par une permutation.

Pour des matrices à coefficients réels ceci équivaut au problème suivant :

Etant donnés deux ensembles  $S$  et  $S'$  de  $n$  points ( $n \geq 3$ ) d'un espace euclidien  $V$ , y-a-t-il équivalence entre :

- (i')  $S$  et  $S'$  se déduisent l'une de l'autre par une isométrie linéaire
- (i'i') il existe une bijection  $\sigma$  de  $S$  sur  $S'$  telle que pour chaque  $X$  de  $S$  les ensembles  $S - \{X\}$  et  $S' - \{\sigma(X)\}$  se déduisent l'une de l'autre par une isométrie linéaire.

PREUVE. Partant de  $A$  et  $A'$  prendre  $\lambda$  assez grand pour que  $A + \lambda I$  et  $A' + \lambda I$  soient respectivement les matrices des produits scalaires de  $n$  vecteurs  $X_1 \dots X_n$ , et  $X'_1 \dots X'_n$ . Le reste est évident.

Cela équivaut encore à reconstruire les matrices ayant même coefficient sur la diagonale principale. (Remplacer  $A$  par une matrice dont les coefficients sont algébriquement indépendants et lui associer la matrice  $B$  dans laquelle  $b_{ij}$  représente la distance entre  $X_i$  et  $X_j$ ).

La condition (i') revient à dire que  $S$  et  $S'$  donnent les mêmes valeurs aux fonctions  $(Z_1, \dots, Z_n) \mapsto f(Z_1 \dots Z_n)$ , de  $V^n$  dans  $R$  qui sont polynomiales en les produits scalaires  $\langle Z_i | Z_j \rangle$  et symétriques par rapport aux  $Z_i$ . La condi-



tion (i'i') revient à dire que  $S$  et  $S'$  donnent la même valeur aux fonctions  $(Z_1 \dots Z_n) \mapsto g(Z_1 \dots Z_n)$  qui s'écrivent  $g(Z_1 \dots Z_n) = h(Z_2 + \dots Z_n) + h(Z_1, Z_3 + \dots Z_n) + \dots + h(Z_1, \dots, Z_{n-1})$  avec  $h$  fonction symétrique de  $n-1$  variables  $Y_1 \dots Y_{n-1}$  et polynomiale en les  $\langle Y_i | Y_j \rangle$

PROBLEME. L'anneau  $A_n$  formé de ces  $f$  est-il égal à l'anneau  $D(A_{n-1})$  engendré par ces  $g$ ? (ceci pour  $n \geq 3$ ). C'est vrai lorsque  $V = R$ , tout simplement parce que les fonctions symétriques sont engendrées par les fonctions symétriques élémentaires  $Z_1^k + \dots + Z_n^k$ .

PROPOSITION. Etant donné un entier  $n$ ,  $n \geq 3$ , un entier  $q$ , et  $q$  entiers  $n_1, \dots, n_q$  avec  $\sum_{i=1}^q n_i = n$ , l'application  $(Z_1 \dots Z_n) \mapsto \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^q \langle Z_i | Z_{\sigma(i)} \rangle$  où  $\sigma$  décrit toutes les permutations de  $1, 2, \dots, n$  qui se décomposent en  $q$  cycles de longueur  $n_1, \dots, n_q$  est dans  $D(A_{n-1})$ . Par suite l'application  $(Z_1 \dots Z_n) \mapsto \text{Det} \langle Z_i | Z_j \rangle_{i,j}$  est dans  $D(A_{n-1})$ .

PREUVE. Si  $q > 1$  c'est tout simplement la méthode du I. Si  $q=1$  il suffit de voir que les coefficients de  $P_{f,r}$  sont dans  $D(A_{n-1})$ . Ceux de  $R_1$  y sont via le lemme de Kelly, pour les autres cela se ramène à voir que ceux de  $t \mapsto P_{f,r}(t, t^2, \dots, t^{n-1})$  y sont, fait qui est évident en utilisant les fonctions symétriques des racines.

#### B I B L I O G R A P H I E.

J.A.BONDY - R.L.HEMMINGER : Graph Reconstruction. A Survey, Research Report CORR 76-4 1976, Dept of Combinatorics and Optimization - Faculty of Math. University of Waterloo, Waterloo, Ontario, CANADA. à paraître au Journal of Combinatorial Theory.

W.T.TUTTE : All the king's horse. Research report. CORR 76-37 - Septembre 76. Ibid.

M. POUZET

Departement de Mathématiques  
43, bd du 11 novembre 1918  
69621 VILLEURBANNE

Manuscrit remis en septembre 1977.