PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANNE PRELLER

Théorie des catégories et fondements

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 21-27
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_21_0>

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

THEORIE DES CATEGORIES ET FONDEMENTS

par Anne PRELLER

Mon exposé n'a pas pour but de présenter un nouveau résultat, mais plutôt d'inviter à réfléchir sur quoi reposent les mathématiques, quels sont les fondements des notions que nous utilisons tous les jours avec une routine insouciante.

Lyon est un endroit qui m'incite à réfléchir, puisque c'est ici que j'ai appris la première fois, comme étudiante, qu'il y a des "problèmes de fondements" en mathématiques. Il s'agissait du problème de former l'ensemble des classes d'équivalence des suites exactes de groupes abéliens alors que l'on savait qu'une classe d'équivalence n'était pas un ensemble, mais une classe "propre", et, bien sûr, un ensemble de classes n'existe pas !

Avant de mentionner d'autres problèmes de fondements rencontrés en théorie des catégories, il est peut-être bon de rappeler quelques propriétés essentielles d'un fondement des mathématiques :

(I) Il doit comprendre

1) un système formel, c'est-à-dire une écriture et notion de démonstrabilité mécanique et combinatoire. Exemple : théorie formelle du premier ordre.

2) Une notion intuitive qui s'exprime dans ce système formel. Exemples : la notion d'ensemble et les théories formelles ZF(Zermelo-Fraenkel) et BG (Bernays-Gödel).

(II) Il doit être possible (mais pas nécessairement pratique) de "faire" les mathématiques courantes dans cette théorie formelle.

(III) On doit pouvoir éliminer des contradictions et paradoxes et éclaircir des difficultés rencontrées avant l'introduction du système formel.

On se trouve avec un problème de fondements, si une propriété de nos objets mathématiques qui, intuitivement, nous plait, ne peut s'exprimer dans le système formel. Voici des exemples bien connus de la théorie des catégories :

α) La catégorie de toutes les structures d'une espèce donnée doit exister, par exemple, **Ens** la catégorie de tous les ensembles, **G** , celle de tous les groupes, **T** , la catégorie des espaces topologiques. (Dans ZF, **Ens**, **G**, **T** n'existent pas ; c'est pour cette raison que l'on "se plaçait" dans BG pour faire de la théorie des catégories).

β) Si **A** et **B** sont des catégories, former la catégorie $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ des foncteurs de **A** dans **B** (Ceci n'est pas possible dans BG ; si **A** est une classe propre).

γ) Former la catégorie de toutes les catégories, le semi-groupe des semi-groupes etc... (Le principe de self-application n'est pas réalisé, dans toute sa généralité, ni dans ZF ni dans BG. Cependant, MacLane dans [10] le réclame expressément).

δ) Dans une théorie des catégories, surtout si elle doit fonder les mathématiques, il doit exister un ensemble d'entiers naturels, la réunion, le produit d'ensembles etc.

Je vais maintenant distinguer entre deux tendances, celle représentée par Mac Lane, Lawvere, Tierney et d'autres, et celle de Kreisel, Feferman, Scott, pour n'en citer que quelques uns.

Le premier groupe a réagi comme ceci : puisqu'il y a des problèmes de fondements en théorie des catégories il faut refaire les fondements des mathématiques. Cette attitude s'explique en partie par la découverte que toutes les mathématiques pouvaient être reformulées en langage des catégories. Lawvere l'exprime dans [9] comme ceci :

Les propriétés intéressantes des objets mathématiques sont celles que l'on peut exprimer en fonction de leur structure abstraite plutôt qu'en fonction des éléments qui - d'après la conception usuelle- forment ces objets mathématiques. La question toute naturelle est donc si l'on peut donner des fondements mathématiques qui expriment ouvertement cette conviction et en particulier qui ne donnent pas de place aux notions de classe et d'appartenance " . Lawvere ensuite procède de donner dans un langage du premier ordre avec égalité l'axiomatisation de la catégorie des catégories. Même craignant de dire une platitude je dois insister : Il faut un langage et donc une théorie formelle puisqu'on veut faire des fondements.

Il est bien connu que la théorie exposée dans [9] n'est pas adéquate pour les fondements des mathématiques. Lawvere et Tierney ont ensuite introduit et developpé la notion du topos élémentaire dont la catégorie des ensembles (qu'on définit dans ZF) fournit un exemple particulier.

Ainsi, la notion du topos élémentaire généralise - et permet de mieux comprendre - la notion de l'univers des ensembles. Mais l'importance du topos est justement de pouvoir parler de beaucoup d'autres mondes. En changeant de topos on changera du lieu où nous sommes; de notre univers, c'est-à-dire suivant la théorie mathématique que l'on veut faire on se placera dans une théorie de topos élémentaire spécialement adaptée. Dans un topos on peut encore parler d'éléments mais en général, ils ne jouent plus de rôle important. Leur appartenance à un sous-objet d'un objet donné n'a plus de réponse du type "oui ou non", elle se trouve en général entre ces deux valeurs . (Avec certains ajustements, les ensembles flous donnent un autre exemple d'un topos élémentaire).

On peut aussi faire de la logique dans un topos. Ce n'est plus, en général, la logique des prédicats classique, mais intuitionniste. La théorie des types s'interprête tout naturellement dans un topos. Les types deviennent des objets du topos, les variables et termes des morphismes entre types.

Les formules sont des morphismes à but dans un objet privilégié (le classifiant), les quantificateurs deviennent des foncteurs adjoints les uns aux autres. Cette logique dans un topos est donc une théorie des relations en langage catégorique. On pourrait faire une théorie de modèles en se basant sur un topos élémentaire au lieu d'une théorie des ensembles. Cependant, beaucoup reste à faire encore ici.

Autant que je puisse juger, le topos élémentaire ne donne pas de réponse au problème de self-application. Suivant ce que l'on veut faire on se place dans un autre topos.

Donc dans le but de présenter un nouveau fondement des mathématiques la théorie du topos élémentaire ne satisfait pas entièrement au point (III). Un autre point sur notre liste à savoir (I), 1) a été négligé dans les publications existantes. On fait de la théorie du topos élémentaire comme si l'on faisant de la topologie algébrique par exemple. La pensée ensembliste est si bien rentrée dans les moeurs qu'il semble difficile de s'en défaire. Aussi longtemps qu'il n'y a pas de désir de faire un nouveau fondement des mathématiques le langage ensembliste est tout à fait acceptable : "Soit E un topos, A un objet de E, alors les objets sur A forment un topos E/A. Un morphisme f de A dans B définit un foncteur f^* de E/B dans E/A par ... " Que deviendraient E/A et f^* , si l'on n'avait pas une théorie des ensembles pour nous garantir leurs existence ? Car, si l'on ne veut pas faire une théorie du topos élémentaire formelle, qu'est-ce que c'est, un topos ? C'est une catégorie ayant certaines propriétés supplémentaires. Donc c'est une classe d'objets avec une classe de morphismes et des opérations non partout définies, appelées composition, source, but etc... . Nous sommes bien revenus à BG ou à ZF. La raison pourquoi la théorie du topos élémentaire n'a pas été présentée dans un système formel est bien simple:les langages formels classiques ne sont pas adéquats . La catégorie des catégories (Lawvere [9]) qui au moins au début de l'article est formulée dans un langage du premier ordre suffit pour nous en convaincre. Les langages sur graphes (Preller [13] et Blanc [2] , [3] où aussi des théories sur graphes sont développées offrent un système formel pour exprimer la théorie du topos élémentaire et toute théorie de catégories. Bien entendu, le catégoricien expert parle et raisonne comme s'il avait lu, compris et oublié les théories formelles sur graphes, comme un bon algébriste le fait avec les théories du premier ordre.

Pour parler du deuxième groupe et sa réponse aux problèmes des fondements je vais surtout citer un article de Feferman [5] . En effet, sans système formel qui permet d'axiomatiser et de comprendre les catégories (comme ZF permet de comprendre les ensem les), les "classes" et les "opérations" sont là et comprises avant qu'on parle de catégories. Il serait peut-être aussi bien alors de prendre ces notions comme primitives mais de les traiter de manière pour obtenir des réponses satisfaisantes aux points de notre liste. Dans [8] , Kreisel répond à Mac Lane [10] que l'on connait le principe de self-application depuis plus de 70 ans, car on savait que tous les ordinaux forment un ordinal, puisque bien ordonnés et que tous les semi-groupes forment un semi-groupe par le produit cartésien mais on se gardait de confondre la multitude (tous les ordinaux) avec l'objet singulier (l'ordinal de tous les ordinaux). Bernays [1] a justement introduit une axiomatisation des ensembles et propriétés abstraites utilisant deux symboles relationnels, ε pour l'appartenance à un ensemble et η pour la vérification d'une propriété.

Feferman a présenté plusieurs systèmes formels où Cat η Cat est démontrable, Cat étant la propriété abstraite d'être une catégorie. Dans [5] , il développe une théorie constructive des opérations et classifications. Les objets de l'univers du discours sont maintenant les opérations (fonctions partielles) et classifications (propriétés abstraites). De plus, ces objets sont donnés intentionnellement, c'est-à-dire définis par une formule Φ du langage. Supposons c est une classification définie par Φ. On écrira $x \eta c$ s'il peut être vérifié que $\Phi(x)$, et $x \bar{\eta} c$ si $\neg \Phi(x)$ peut être vérifiée. On n'est pas sûr de toujours pouvoir vérifier $\Phi(x)$.

Par exemple $\Phi(c)$ ne peut être vérifiée, si $\Phi(x)$ est $x\eta x$ ou $x\bar{\eta}x$. "Φ est vérifiée" se note $\Box\Phi$ et l'on a introduit une nouvelle notion syntaxique. La logique a changé, ce n'est plus avec la logique classique que l'on fait cette théorie des opérations. Bien sûr, il faut distinguer entre opérations et classifications totales et partielles, donc aussi entre catégories totales et partielles. Aux ensembles correspondent des classifications totales. Une telle classification est appelée petite. On peut donc considérer par exemple la catégorie de tous les petits groupes, elle est une catégorie (totale) elle-même. Nous n'avons plus de précautions à prendre en nous y réferant comme métacatégories, la catégorie des petits groupes est bien un objet de l'univers du discours et il y a une théorie formelle qui nous garantit que ce que nous démontrons sur les catégories des petits groupes, des petits espaces topologiques, des petites catégories etc, est dans la mesure du possible correct.

Puisque tous les points de notre liste sont satisfaits il ne reste qu'aux catégoriciens de s'habituer à cette nouvelle logique et nouvelle théorie des opérations !

Si les habitudes de la logique et théorie des ensembles classiques se trouvaient trop enracinées, il resterait toujours la suggestion de Kreisel dans [8] de regarder ce que BG peut faire comme fondement pour la théorie des catégories : par exemple de ne considérer que des familles de foncteurs convenablement indexés et définissables dans BG au lieu de parler de la "métacollection" de tous les foncteurs entre deux catégories données (voir Feferman [6] et Preller [12]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BERNAYS, *Journal of Symbolic Logic*, 1937, p. 65-72.

[2] BLANC, *Langages formels sur graphes*, Cahiers de Montpellier, 1975.

[3] BLANC, *Théories formelles sur graphes et extensions, par définition* thèse, Dép. de Math., Luminy, Marseille, 1976.

[4] FEFERMAN, *Some formal systems for the unlimited theory of structures and categories (abstract),* J. Symbolic Logic, 39 (1974) p. 374-375.

[5] FEFERMAN, *Categorical foundations and foundations of category theory,* en cours de publication.

[6] FEFERMAN, *Set-theoretical formulation of some notions and theorems in category theory,* (Stanford, October 1968).

[7] ISBELL, *Review of Lawrence* [9] , Mathematical Reviews 34, (1967), n° 7332.

[8] KREISEL, *Review of Mac Lane* [10], Mathematical Reviews 44 (1972), N° 25.

[9] LAWVERE , *The category of categories as a foundation of mathematics,* Proc. Conference categorical algebra, (La Jolla 1965), Springer, 1966. p. 1-20.

[10] MAC LANE, *Categorical algebra and set-theoretical foundations,* Axiomatic Set Theory (UCLA 1967), Proc. Symposia in Pure Math. XIII, Part I, A.M.S. Providence (1971), p. 231-240.

[11] MAC LANE, *Sets, topoi and interval logic in categories,* Logic Colloquium 1973, North-Holland Publ. Co ; Amsterdam (1975), p. 119-133.

[12] PRELLER, *A formal category theory ;* Colloque de logique, Orléans, 1972.

[13] PRELLER, *Langages, formels à graphes,* Colloque de logique, Clermont-Ferrand, 1975.

[14] SCOTT, *Constructive validity,* Symposium in Automatic demonstration, Lecture notes in mathematics 125, Springer (1970), p. 237-275.