JEAN BRACONNIER

Sur les crochets généralisés et quelques unes de leurs applications

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4
, p. 77-106
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_77_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t.14-4

SUR LES CROCHETS GENERALISES ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

par Jean BRACONNIER

Dans cet article, on définit des "crochets" d'applications multilinéaires symétriques ou alternées, qui généralisent en particulier les "crochets de Schouten" introduits en géométrie [4,5]. De tels crochets se rencontrent fréquemment dans la nature : ils permettent d'écrire facilement de nombreux calculs, pas tous classiques, intervenant dans la théorie des algèbres de Lie, des algèbres de Poisson [2,3] , des opérateurs différentiels etc. Les méthodes utilisées sont élémentaires ; on ne signalera que quelques applications ; le lecteur pourra facilement se convaincre qu'il en existe beaucoup d'autres. Cet article est résumé dans deux notes aux C.R.A.S.

Dans tout ce qui suit, on désigne par K *un anneau commutatif*.

§ 1. RAPPELS.

(1.1) Soit $(p_1,\dots,p_k)\in \mathbb{N}^k$. On désigne par $\mathfrak{S}(p_1,\dots,p_k)$ l'ensemble des $(p_1+\dots+p_k)!/p_1!\dots p_k!$ permutations de $\mathfrak{S}_{p_1+\dots+p_k}$ dont les restrictions à $[1,p_1]$, $[p_1+1,p_2]$,..., $[p_1+\dots+p_{k-1}+1,p_1+\dots+p_k]$ sont *croissantes*.

(1.2) Soit M un K-module. On désigne par $T(M) = T_K(M)$ (resp. $\Sigma(M) = \Sigma_K(M)$ $\wedge(M) = \wedge_K(M)$) l'algèbre tensorielle (resp. symétrique, extérieure) de M, graduée par $(T^p(M))_p$ (resp. $(\Sigma^p(M))_p$, $(\wedge^p(M))_p$).

(1.3) La structure de cogèbre de $\Sigma(M)$ est définie par l'application linéaire $\gamma : \Sigma(M) \to \Sigma(M) \underset{K}{\otimes} \Sigma(M)$, dont le composant $\gamma_{p,q} : \Sigma^{p+q}(M) \to \Sigma^{p}(M) \underset{K}{\otimes} \Sigma^{q}(M)$

est donné par

$$(1) \qquad \gamma_{pq}(x_1 \dots x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} \otimes x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(p+q)} .$$

De même, la structure de cogèbre de $\Lambda(M)$ est définie par $\gamma' : \Lambda(M) \to \Lambda(M) \underset{K}{\otimes} \Lambda(M)$, dont le composant $\gamma'_{p,q} : \Lambda^{p+q}(M) \to \Lambda^{p}(M) \underset{K}{\otimes} \Lambda^{q}(M)$

est donné par

$$(2) \qquad \gamma'_{pq}(x_1 \ \dots \ x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \wedge \dots x_{\sigma(p)} \otimes x_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(p+q)}$$

(1.4) Soit alors A une K-*algèbre* (associative, unifère et commutative) et E un A-*module*.

Soient $C \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),A)$ et $C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),E)$, on pose $C.C = m.(C \otimes C').\gamma$ ou $m : A \underset{K}{\otimes} E \to E$ est la multiplication du A-module E. Si C et C' sont homogènes de degrés p et q respectivement, $C.C' \in \mathrm{Hom}_K(\Sigma^{p+q}(M),E)$ est donc défini par

$$(1) \ C.C' \ (x_1 \dots x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p.q)} C(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}) C(x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(p+q)}).$$

On dit que C.C' est le *produit symétrique de* C et C'.

Pour E = A, on définit ainsi sur $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),A)$ une structure de K-algèbre, *graduée, associative, unifère, et commutative* et, sur $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),E)$, une structure de $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),A)$-*module gradué* (cf. [1]).

En particulier , $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(A),A)$ est une K-*algèbre commutative*, ainsi que $\Sigma(M)^{*\,gr}$.

(1.5) De même, si $C \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$ et $C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),E)$, on pose, $C \wedge C' = m.\ (C \otimes C').\gamma'$. Si C et C' sont homogènes de degrés p et q respectivement, $C \wedge C' \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{p+q}(M),E)$ est donc défini par

(1) $C \wedge C'(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q})$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, C(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)})C'(x_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q)}).$$

On dit que $C \wedge C'$ est le *produit alterné de* C et C'.

Pour E = A, on définit ainsi sur $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$ une structure de K-algèbres *graduée, associative, unifère et alternée* (c'est dire que, si $C, C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$ sont homogènes de degrés p et q, on a $C \wedge C' = (-1)^{pq} C' \wedge C$ et $C \wedge C = o$ si p est *impair)* et sur $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),E)$ une structure de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$-module gradué (cf. [1]).

En particulier, $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ est une K-*algèbre alternée,* ainsi que $\Lambda(M)^{*gr}$.

(1.6) Supposons maintenant que A soit une K-*algèbre de Lie.* On définit, comme en (1.4), un produit K-bilinéaire noté [,] sur $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),A)$ en posant pour $x_i \in M$,

(1) $$[C,C'](x_1 \ldots x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} [C(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)}), C(x_{\sigma(p+1)} \ldots x_{\sigma(p+q)})]$$

lorsque C et C' sont homogènes de degrés p et q.

Muni de ce produit, $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),A)$ est une K-*algèbre de Lie.* En particulier, $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(A),A)$ est, ainsi, une K-algèbre de Lie.

(1.7) Sous la même hypothèse que celle de (1.6), on définit, comme en (1.5), un produit K-bilinéaire, encore noté [,] , sur $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$, en posant, pour $x_i \in M$

(1) $$[C,C'](x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} \operatorname{sgn}(\sigma)[C(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)}),\ C'(x_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q)})]$$

lorsque C et C' sont homogènes de degrés p et q.

Muni de ce produit, $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),A)$ est une *algèbre de Lie* graduée, c'est-à-dire que l'on a si C,C' et C" sont homogènes et de degrés respectifs p,q et r :

(i) $[C,C'] = (-1)^{pq+1} [C',C]$,

(ii) $[C,C'] = 0$ si p est *pair*,

(iii) $(-1)^{pr}[[C,C'],C''] + (-1)^{pq}[[C',C''],C]$

$$+ (-1)^{qr}[[C'',C],C'] = 0$$

(identité de Jacobi généralisée).

Les démonstrations des propriétés de (1.6) et (1.7) sont laissées au lecteur (cf. le § 2).

En particulier, $\bigoplus_p \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{2p}(A),A)$ est une K-algèbre de Lie, dont A est une sous-algèbre.

Ainsi, $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ est une K-algèbre de Lie graduée.

§ 2. CROCHETS GENERALISES.

(2.1) Soit R une K-algèbre (non nécessairement associative) dont le produit est noté $\times$. On suppose que, pour $x,y,z \in R$, on a

(1) $(x \times y) \times z - x \times (y \times z) = (x \times z) \times y - x \times (z \times y)$

(condition qui est vérifiée si R est associative). On pose alors $\{x,y\} = x \times y - y \times x$. R, muni de cette loi, est une K-*algèbre de Lie*. Il suffit de montrer l'identité de Jacobi, ce qui est immédiat.

(2.2) Soit M un K-module. Si $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),M)$, on note $C \times C'$ le composé.

$$\Sigma(M) \xrightarrow{\gamma} \Sigma(M) \otimes_K \Sigma(M) \xrightarrow{C'\otimes \mathrm{id}} M \otimes \Sigma(M) \xrightarrow{\mu} \Sigma(M) \xrightarrow{C} M.$$

ou μ est défini par $\mu(x \otimes y) = x.y$.

Lorsque C et C' sont homogènes de degrés p et q respectivement, $C \times C'$ est homogène de degré $p+q-1$ et défini par

$$C \times C'(x_1 \dots x_{p+q-1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,p-1)} C(C'(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(q)}).x_{\sigma(q+1)} \dots x_{\sigma(p+q-1)}).$$

LEMME. - *Dans* $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),M)$, *le produit* $*$ *vérifie la condition (1) de (2.1).*

En effet, si C,C' et C" sont homogènes de degrés p,q et r, on a

$$((C * C') * C'' - C * (C' * C''))(x_1 \dots x_{p+q+1}{}^{-1})$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,r,p-2)} C(C'(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(q)}) . C''(x_{\sigma(q+1)} \dots x_{\sigma(q+r)}) . x_{\sigma(q+r+r)} \dots$$

$$\dots x_{\sigma(p+q+r-2)}) .$$

D'où le lemme.

Ainsi, pour le crochet $\{C,C'\} = C * C' - C' * C$, $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),M)$ est une *K-algèbre de Lie.*

(2.3)

a) En identifiant M à $\mathrm{Hom}_K(K,M)$ par l'isomorphisme $x \mapsto (t \mapsto tx)$, on a, pour tout élément homogène $C \in \mathrm{Hom}_K(\Sigma^p(M),M)$, $x * C = o$ et

(1) $\{C,x\}(x_1 \dots x_{p-1}) = C * x(x_1 \dots x_{p-1}) = C(xx_1 \dots x_{p-1})$ $\quad (x_i \in M)$.

b) On a de plus, d'après l'identité de Jacobi :

(2) $$\{\{C,C'\},x\} = C * \{C',x\} - C' * \{C,x\} + \{C,x\} * C' - \{C',x\} * C.$$

c) On notera que, si $u \in \mathrm{End}_K(M)$ et si C est homogène de degré p, on a

(3) $$\{C,u\}(x_1 \dots x_p) = \sum_{i=1}^{p} C(x_1 \dots u(x_i) \dots x_p) - u(C(x_1 \dots x_p)).$$

d) Pour que $C \in \mathrm{End}_K(A)$ soit une *dérivation,* il faut et il suffit que $\{m,C\} = 0$ (m étant la multiplication de A).

(2.4) On a le lemme suivant :

LEMME. - *Soient* C *et* C' *des éléments de* $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(M),M)$, *homogènes et de degrés respectifs* ppet q. *Pour* $\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)$ *et* $x_1,\dots,x_{p+q-2} \in M$ *soient* C_σ *et* C'_σ *les endomorphismes de* M *définis par* $C_\sigma(x) = C(xx_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p-1)})$ *et* $C'_\sigma(x) = C'(xx_{\sigma(p)} \dots x_{\sigma(p+q-2)})$.

Alors, pour $x \in M$ *, on a* $(C \times \{C',x\} - C' \times \{C,x\})(x_1 \dots x_{p+q-2})$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)} [C_\sigma, C'_\sigma](x).$$

On a, en effet, $C \times \{C',x\}(x_1 \dots x_{p+q-2}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)} C_\sigma(C'_\sigma(x))$ et $C' \times \{C,x\} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)} C'_\sigma(C_\sigma(x))$.

(2.5) Soit R un K-module gradué par $(R_p)_{p \in \mathbb{N}}$ (on pose $R_{-1}=o$). On suppose R muni d'un produit K-bilinéaire $(x,y) \mapsto \{x,y\}$, *gradué de degré* 1 (i.e. $\{R_p,R_q\} \subset R_{p+q-1}$). On dit que R est une K-*algèbre de Lie dégressive* si les conditions suivantes sont évérifiées :

(i) $\{x,y\} = (-1)^{pq} \{y,x\}$ pour $x \in R_p$ et $y \in R_q$;

(ii) $\{x,y\} = o$ si x est homogène de degré *impair ;*

(iii) $(-1)^{pr} \{\{x,y\},z\} + (-1)^{pq} \{\{y,z\},x\} + (-1)^{qr} \{\{z,x\},y\} = o$,

pour $x \in R_p$, $y \in R_q$ et $z \in R_r$ (*identité de Jacobi* généralisée).

$\bigoplus_p R_{2p+1}$ est stable pour $\{\ ,\ \}$ et c'est une K-*algèbre de Lie* **(graduée)** dont R_1 est une sous-algèbre de Lie.

D'autre part, si $x \in R_p$, $y \in R_q$ et $z \in R$, on a, d'après (ii) et (iii),

(1) $\{\{x,y\},z\} = (-1)^{p+1} \{x,\{y,z\}\} + (-1)^{(p+1)q+1} \{y,\{x,z\}\}$,

(2) $\{x,\{y,z\}\} = (-1)^{p+1} \{\{x,y\},z\} + (-1)^{(p+1)(q+1)} \{y,\{x,z\}\}$.

En particulier, si p est impair, $\{x,.\}$ est une dérivation de R.

(2.6) Soit R un K-module gradué par $(R_p)_p$, muni d'un produit K-bilinéaire $(x,y) \mapsto x \times y$, *gradué de degré* -1 et tel que

(1) $(x \times y) \times z - x \times (y \times z) = (-1)^{(q+1)(r+1)}((x \times z) \times y - x \times (z \times y))$,

pour $x \in R$, $y \in R_q$, $z \in R_r$.

On pose alors $\{x,y\} = (-1)^{(p+1)q}\, x \times y + (-1)^{p}\, y \times x$, pour $x \in R_p$ et $y \in R_q$. Ceci définit, par bilinéarité, un produit sur R, noté $\{\ ,\ \}$. Alors R, muni de ce produit, est une K-*algèbre de Lie dégressive*. Les conditions (i) et (ii) sont évidemment satisfaites. D'autre part, un calcul immédiat montre la condition (iii) l'est aussi.

(2.7) Pour C, $C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),M)$, on note encore $C \times C'$ le composé

$$\Lambda(M) \xrightarrow{\gamma'} \Lambda(M) \otimes \Lambda(M) \xrightarrow{C' \otimes \mathrm{id}} M \otimes \Lambda(M) \xrightarrow{\mu'} \Lambda(M) \xrightarrow{C} M ,$$

où μ' est défini par $\mu'(x \otimes z) = x \wedge z$.

Lorsque C et C' sont homogènes de degrés p et q respectivement, $C \times C'$ est homogène de degré p+q-1 et défini par

$$C \times C' \,(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+q-1}) =$$
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,p-1)} \mathrm{sgn}(\sigma) C(C'(x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(p)}) \wedge x_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(p+q-1)}).$$

LEMME. - *Dans* $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),M)$ *le produit* $\times$ *vérifie la condition (1) de* 2.6.

En effet, si C,C' et C" sont homogènes de degrés p,q et r respectivement, on a $((C \times C') \times C'' - C \times (C' \times C''))(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+q+r-2})$

$$(-1)^{q(r+1)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,r,p-2)} \mathrm{sgn}(\sigma) C(C'(x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(q)}) \wedge C''(x_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(q+r)})$$
$$\wedge\, x_{\sigma(q+r+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(p+q+r-2)}).$$

La condition (1) de (2.6) s'en déduit immédiatement.

COROLLAIRE. - $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),M)$, *muni de* $\{,\}$ *, est une* K-*algèbre de Lie dégressive*.

(2.8)

a) En identifiant $\mathrm{Hom}_K(K,M)$ à M par $(t \mapsto tx) \longmapsto x$, on voit que, pour $C \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(M),M)$, on a $x \times C = 0$ et

(1) $C \times x(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1}) = \{C,x\}(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1}) = C(x\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1})$,
$(x,x_i \in M)$.

b) Si C, C' sont homogènes de degrés respectifs p et q, on a, pour $x \in M$:

(2) $$\{\{C,C'\},x\} = (-1)^{(p+1)q}\, C \times \{C',x\} + (-1)^p\, C' \times \{C,x\} - \{C',x\} \times C - (-1)^{pq}\, \{C,x\} \times C'$$

d'après l'identité de Jacobi et la formule (1) de (2.4).

c) Soit $u \in \mathrm{End}_K(M)$ et C comme ci-dessus. On a

(3) $$\{u,C\}(x_1\wedge\ldots\wedge x_p) = u(C(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)) - \sum_{i=1}^{p} C(x_1\wedge\ldots\wedge u(x_i)\wedge\ldots\wedge x_p).$$

En particulier, pour $u' \in \mathrm{End}_K(M)$, on a $\{u,u'\} = u.u'-u'.u$.

d) On a, de même, $id_M \times C = C$ et $C \times id_M = pC$ donc $\{id_M,C\} = (1-p)C$.

e) Soit $F \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^2(M),M)$. Pour C comme ci-dessus, on a, pour $x_i \in M$:

(4) $$\{F,C\}(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i F(x_i \wedge C(x_1\wedge\ldots\wedge\check{x}_i\wedge\ldots\wedge x_{p+1})) - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C(F(x_i\wedge x_j)\wedge x_1\wedge\ldots\wedge\check{x}_i\wedge\ldots\wedge\check{x}_j\wedge\ldots\wedge x_{p+1}).$$

On a $F \times F(x_1\wedge x_2\wedge x_3) = F(F(x_1\wedge x_2)\wedge x_3)+F(F(x_2\wedge x_3)\wedge x_1)+F(F(x_3\wedge x_1)\wedge x_2)$.

On dit que F vérifie *l'identité de Jacobi* si $F \times F = 0$; on a alors $\{F,F\} = 0$.

(2.9) Notons le lemme suivant :

LEMME. - *Soient* $C.C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(M),M)$ *des éléments homogènes de degrés* **p et q**. *Pour* $\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)$ *et* $x_1,\ldots,x_{p+q-2} \in M$, *soient* C_σ *et* C'_σ *les endomorphismes de M définis par* $C_\sigma(x) = C(x \wedge x_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p-1)})$ *et* $C'_\sigma(x) = C'(x\ x_{\sigma(p)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p+q-2)})$. *Alors, pour* $x \in M$, *on a*

$$((-1^{(p+1)q}\, C \times \{C',x\} + (-1)^p\, C' \times \{C,x\})(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p+q-2}) = (-1)^{p+1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p-1,q-1)} \mathrm{sgn}(\sigma)\, [C_\sigma, C'_\sigma](x).$$

En effet, par définition, on a

$$C'\wedge\{C,x\}\,(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p+q-2}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\; C'_{\sigma}(C_{\sigma}(x))$$

et

$$C\wedge\{C',x\}\,(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p+q-2})$$

$$= (-1)^{(p+1)(q+1)} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) C(C'(x\wedge x_{\sigma(p)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p+q-2)})\wedge x_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p-1)})$$

$$= (-1)^{(p+1)(q+1)} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\; C_{\sigma}(C'_{\sigma}(x)),$$

d'où le lemme.

§ 3. CROCHETS ET DERIVATIONS.

(3.1) Soit A une K-algèbre, associative, unifine et commutative. On note $\Omega(A)$ le A-module $\operatorname{Ker}(m)/(\operatorname{Ker}(m))^2$ (m étant toujours la multiplication $m : A \otimes_K A \to A$) et par d_A ou d l'application K-linéaire qui à $x \in A$ fait correspondre la classe de $1 \otimes x - x \otimes 1$ dans $\Omega(A)$. Alors pour tout A-module E, $u \mapsto u.d$ est un isomorphisme de $\operatorname{Hom}_A(\Omega(A),E)$ sur le A-module des dérivations de A dans E.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $T^p(\Omega(A))$ (resp. $\Sigma^p(\Omega(A))$, $\Lambda^p(\Omega(A))$ la A-algèbre tensorielle (resp. symétrique, alternée) du A-*module* $\Omega(A)$; on note $\Sigma(\Omega(A))^{*\,gr}$ (resp. $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$) le dual gradué du A-*module* $\Sigma(\Omega(A))$ $(\Lambda(\Omega(A)))$.

On dit que $D \in \operatorname{Hom}_K(T^p(A),E)$ est une *multidérivation* si D est une dérivation par rapport à chacune des variables. On a ainsi une *injection canonique* $\operatorname{Hom}_A(T^p(\Omega(A)),E) \to \operatorname{Hom}_K(T^p(A),E)$ dont l'image est formée des multidérivations de A^p dans E.

On a, de même, une injection canonique $\operatorname{Hom}_A(\Sigma^p(\Omega(A)),E) \to \operatorname{Hom}_K(\Sigma^p_K(A),E)$ (resp. $\operatorname{Hom}_A(\Lambda^p_A(\Omega(A)),E) \to \operatorname{Hom}_K(\Lambda^p(A),E)$, dont l'image est formée des multidérivations symétriques (resp. alternées) de A^p dans E. En particulier, on a une injection canonique $\Sigma(\Omega(A))^{*\,gr}$ dans $\operatorname{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$ (resp. $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$ dans $\operatorname{Homgr}_K(\Lambda_K(A),A)$, qui est, évidemment, un *morphismes* *d'algèbres , pour le produit symétrique (resp. alterné).* $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma(\Omega(A)),E)$ est un $\Sigma(\Omega(A))^{*\,gr}$-module, pour le produit symétrique (resp. $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda(\Omega(A)),E)$ est un $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$-module pour le produit alterné).

(3.2) PROPOSITION. - *Soient* $C, C', C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$. *Si* C *est une multidérivation, on a* $\{C,C',C''\} = \{C,C'\}.C'' + C.\{C',C''\}$ *(autrement dit,* $\{C,.\}$ *est une dérivation de l'algèbre* $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$, *pour le produit symétrique).*

LEMME 1. - *Si* $C \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$, $C' \mapsto C' \times C$ *est une dérivation de degré* $p-1$ *de* $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$.

Si C,C' et C'' sont homogènes de degrés respectifs p,q et r, on a

$(C'.C'') \times C\ (x_1 \dots x_{p+q+r-1})$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p\ q-1,r)} C'(C(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)})x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(p+q+1)})C''(x_{\sigma(p+q)} \dots x_{\sigma(p+q+r-1)})$$

$$+ \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(q,p,r-1)} C'(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(q)})C''(C(x_{\sigma'(q+1)} \dots x_{\sigma'(q+p)})x_{\sigma'(q+p+1)} \dots x_{\sigma'(p+q+r-1)}$$

$$= ((C' \times C).C'' + C'.(C'' \times C)).\ (x_1 \dots x_{p+q+r-1}).$$

LEMME 2. - *Si* C *est une multidérivation,* $C' \mapsto C \times C'$ *est une dérivation de degré* $p-1$, $\mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$ *(pour le produit symétrique).*

Soient $C,C',C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Sigma_K(A),A)$ des éléments homogènes de degrés p,q,r respectivement. Pour $x_1,\dots, x_{p+q+r-1} \in A$, on a

$C \times (C',C'')(x_1 \dots x_{p+q+r-1}) =$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,r,p-1)} (C'(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(q)})C(C''(x_{\sigma(q+1)} \dots x_{\sigma(q+r)}).x_{\sigma(q+r+1)} \dots x_{\sigma(p+q+r-1)})$$

$$+ C''(x_{\sigma(q+1)} \dots x_{\sigma(q+r)})C(C'(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(q)}).x_{\sigma(q+r+1)} \dots x_{\sigma(p+q+r-1)}))$$

$$= ((C \times C').C'' + C'.CC\ \ C''))(x_1 \dots x_{p+q+r-1}).$$

D'où le lemme.

On a alors

$\{C,C'.C''\} = C \wedge (C'.C'')-(C'.C'') \wedge C$

$= (C \wedge C').C'' + C'.(C \wedge C'') - (C' \wedge C).C''-C' \wedge (C''.C)$

$= \{C,C'\} . C'' + C'. \{C,C''\} .$

(.3.) PROPOSITION. - *Si* $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\wedge_K(A),A)$ *sont des multidérivations de degrés* p *et* q , $\{C,C'\}$ *est aussi une multidérivation.*

Pour $x \in A$, on a

$\{\{C,C'\} ,x\} = \{C, \{C'.x\} - \{C', \{C,x\}\}$

$\qquad = C \wedge \{C',x\} -C' \wedge \{C,x\} + \{C,x\} \wedge C'-\{C',x\} \wedge C''.$

Il résulte du lemme de (2.4) que $x \mapsto C \wedge \{C',x\} - C' \wedge \{C,x\}$ est une dérivation et il est manifeste que $x \mapsto \{C,x\} \wedge C' + \{C',x\} \wedge C$ en est aussi une.

On peut aussi procéder comme il suit. D'après (3.2) on a, pour $x,y \in A$:

$$\{C,x \{C',y\}\} = \{C,x\} . \{C',y\} +x \{C, \{C',y\}\} .$$

Comme $x \mapsto \{C',x\}$ est une dérivation, on a donc

$$\{C, \{C',xy\}\} = \{C,x\}.\{C',y\} + \{C,y\}.\{C',x\} + x\{C, \{C',y\}\} + y\{C, \{C',x\}\} .$$

En permutant C et C', on a une formule analogue pour exprimer $\{C', \{C,xy\}\}$. La formule (1) de (2.3) montre alors que $x \mapsto \{\{C,C'\}, x\}$ est une dérivation, ce qui prouve la proposition.

(3.4) La proposition précédente montre que la loi de composition $[\ ,\ ]$ induit une loi, notée de la même manière sur $\Sigma(\Omega(A))^{*gr}$, qui est ainsi une K-algèbre de Lie. La proposition (3.2) montre alors que $C' \mapsto \{C,C'\}$ est une dérivation de $\Sigma(\Omega(A))^{*gr}$, muni du produit symétrique . Autrement dit :

PROPOSITION. - $\Sigma(\Omega(A))^{*gr}$ *est une* K*-algèbre de Poisson (cf. (5.1)).*

(3.5) PROPOSITION. - *Soient* C, C' $C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A), A)$ *des éléments homogènes de degrés respectifs* p, q, r *. Si* C *est une multidérivation on a*

$$\{C, C' \wedge C''\} = \{C, C'\} \wedge C'' + (-1)^{(p+1)q} C' \wedge \{C, C''\} .$$

(autrement dit, $\{C, .\}$ *est une dérivation (resp. une antidérivation pour le produit alterné) si* p *est impair (resp. pair).*

LEMME 1. - *Si* $C, C', C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A), A)$ *sont homogènes de degrés* p, q *et* r*, on a*

(1) $(C' \wedge C'') \times C = (C' \times C) \wedge C'' + (-1)^{(p+1)q} C' \wedge (C'' \times C)$.

En effet, pour $x_1, \ldots, x_{p+q-1} \in A$, on a

$$(C' \wedge C'') \times C(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q+r-1})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q-1,r)} \mathrm{sgn}(\sigma) C'(C(x_{\sigma(p)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)}) \wedge x_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q-1)}) C''(x_{\sigma(p+Q)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p-q+r-1)})$$

$$+ (-1)^{(p+1)q} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(q,p,r-1)} \mathrm{sgn}(\sigma) C'(x_{\sigma'(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma'(q)}) C''(C(x_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma'(p+q)}) \wedge x_{\sigma'(p+q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma'(p+q+r-1)})$$

$$= ((C' \wedge C) \wedge C'' + (-1)^{(p+1)q} C' \wedge (C'' \wedge C))(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q+r-1}).$$

LEMME 2. - *Si* C *est une multidérivation, on a :*

(2) $C \times (C' \wedge C'') = C' \wedge (C \times C'') + (-1)^{qr} C'' \wedge (C \times C')$,

En effet, pour $x_1, \ldots, x_{p+q+r-1} \in A$, on a

$$C \times (C' \wedge C'')(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q+r-1}) =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q,r,p-1)} \mathrm{sgn}(\sigma) (C'(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(q)}) (C(C''(x_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(q+r)}) \wedge x_{\sigma(q+r+1)} \wedge \ldots x_{\sigma(p+q+r-1)})$$

$$+ C''(x_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(q+r)}) C(C'(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(q)}) \wedge x_{\sigma(q+r+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q+r-1)}))$$

$$= (C' \wedge (C \times C'') + (-1)^{qr} C'' \wedge (C \times C'))(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q+r-1}).$$

La proposition résulte immédiatement de ces deux lemmes.

(3.6) PROPOSITION. - *Si* $C, C' \in \mathrm{Homgr}_K(\wedge_K(A), A)$ *sont homogènes de degrés* p *et* q *respectivement et si ce sont des multidérivations,* $\{C, C'\}$ *est aussi une multidérivation.*

On a

$$\{\{C,C'\},x\} = (-1)^{p+1}\{C,\{C',x\}\} + (-1)^{(p+1)q+1}\{C'.\{C\ ,1\}\}$$
$$= (-1)^{(p+1)q} C \wedge (C',x) + (-1)^p C' \wedge \{C,x\}$$
$$- (\{C',x\} \wedge C + (-1)^{pq}\{C,x\} \wedge C') \quad .$$

Il résulte du lemme de (2.6) que $x \mapsto (-1)^{(p+1)q} C \wedge \{C' \wedge x\} + (-1)^p C' \wedge \{C,x\}$ est une dérivation et il est clair que $x \mapsto \{C',x\} \wedge C$ et $x \mapsto \{C,x\} \wedge C'$ en sont aussi.

On peut ainsi observer que, d'après (3.5), on a, pour $x, y \in A$:
$\{C, x\{C',y\}\} = \{C,x\} \wedge \{C',y\} + x\{C, \{C',y\}\}$ et on conclut de la même manière que dans la démonstration de (3.3)

(3.7) Il résulte de la proposition précédente que le produit $\{\ ,\ \}$ induit sur $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$ un produit K-bilinéaire, noté de la même manière ; il est défini, lorsque C et C' sont des résultats homogènes de degrés p et q, par

$$\{C,C'\}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p+q-1})$$
$$= (-1)^{(p+1)q} \sum_{\sigma \in \mathscr{C}(q,p-1)} \mathrm{sgn}(\sigma)\, C(dC'(dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(q)}) \wedge dx_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(p+q-1)})$$
$$+ (-1)^p \sum_{\sigma' \in \mathscr{C}(p,q-1)} \mathrm{sgn}(\sigma)\, C'(dC(dx_{\sigma'(q)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma'(p)})$$
$$\wedge dx_{\sigma'(p+1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma'(p+q-1)}).$$

Et il est clair que $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$ est une K-algèbre de Lie degréssive. De plus, d'après (3.5), si $C \in \Lambda^p(\Omega(A))^{*\,gr}$ $\{C, .\}$ est une dérivation (resp. une antidérivation) de degré p-1 de $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$ (pour le produit alterné) si p est *impair* (resp. si p est *pair).*

(3.8) Soit X une variété différentielle (paracompacte et de classe C^{∞}). Et soit A la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{E}^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$. $\Sigma(\Omega(A))^{*gr}$ (resp. $\Lambda(\Omega(A))^{*gr}$) s'identifie canoniquement aux champs de tenseurs contravariants symétriques (resp. antisymétriques) sur X. Et dans ce cas, les crochets $\{\ ,\ \}$ introduits ci-dessus coïncident avec les "concomitants" des champs de tenseurs correspondants, introduits par J.A. Schouten et A. Nijenhuis (cf. [5]).

§ 4. OPERATEURS DIFFERENTIELS ET CROCHETS.

(4.1) On désigne toujours par A une K-algèbre et on utilise les notations de (3.1). Soient E et F des A-modules et $u \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$. Pour tout $t \in A$, on pose $ad_t(u)(x) = tu(x)-u(tx)$. ad_t est une dérivation de $(\mathrm{Hom}_K(F,G), \mathrm{Hom}_K(E,F), \mathrm{Hom}_K(E,G))$ et les ad_t sont deux à deux permutables. On dit que $D \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$ est un *opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n \in \mathbb{N}$ si, quels que soient $t_0,\dots,t_n \in A$, on a $ad_{t_0} \dots ad_{t_n} 0 = 0$. On note $\mathrm{Dif}_n(E,F)$ le A-module (à gauche) formé des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$ de E dans F. On a $\mathrm{Dif}_0(E,F) = \mathrm{Hom}_A(E,F)$. Pour A = E, on écrit $\mathrm{Dif}_n(E)$ ou bien de $\mathrm{Dif}_n(A,E)$. On note $\mathrm{Dif}(E,F)$ le A-module filtré $\bigcup_n \mathrm{Dif}_n(E,F)$. On pose $\mathrm{Dif}_n(A) = \mathrm{Dif}_n(A,A)$ et $\mathrm{Dif}(A) = \mathrm{Dif}(A,A)$. On a $\{D,D'\} \in \mathrm{Dif}_{n+n'-1}(A)$ si $D \in \mathrm{Dif}_n(A)$ et $D' \in \mathrm{Dif}_{n'}(A)$. De plus, $D \mapsto D(1)$ est un projecteur de $\mathrm{Dif}_1(A)$ sur A, dont le noyau est $\mathrm{Der}(A)$.

On note $P_n(A)$ le A-module $A \otimes_K A / \mathrm{Ker}(m)^{n+1}$ (cf. (3.1))et par δ_n (ou δ) l'application K-linéaire qui a $x \in A$ fait correspondre la classe de $1 \otimes x$ dans $P_n(A)$; δ_n est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ et $C \mapsto C.\delta$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(P_n(A),E)$ sur $\mathrm{Dif}_n(A,E)$; en particulier, $\mathrm{Dif}_n(A)$ s'identifie à $P_n(A)^*$. On a $\Omega(A) = \mathrm{Ker}(m)/\mathrm{Ker}(m)^2 \subset P_1(A)$ et, si $x \in A$, on a $\delta(x) = x\,\varepsilon + dx$, en posant $\varepsilon = \delta(1)$. Ainsi $P_1(A) = A\varepsilon \oplus \Omega(A)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que $C \in \mathrm{Hom}_K(T^p_K(A),E)$ est un *opérateur multi-différentiel d'ordre* $\leqslant$ n si C est un opérateur différentiel par rapport à chacune des variables. $(x_1,\dots,x_p) \mapsto \delta_n(x_1) \otimes \dots \otimes \delta_n(x_p)$ est un opérateur différentiel de A^p dans $\Lambda^p_A(P_n(A))$, noté δ^p_n, et $C \mapsto C.\delta^p_n$ est une injection de $Hom_A(T^p_A(P_n(A)),E)$ dans $Hom_k(T^p(A),E)$ dont l'image est formée des opérateurs multidifférentiels d'ordre $\leq n$.

On a, de même, une injection canonique $Hom_A(\Sigma^p_A(P_n(A)),E) \to Hom_K(\Sigma^p_K(A),E)$ (resp. $Hom_A(\Lambda^p_A(P_n(A),E) \to Hom_K(\Lambda^p(A),E))$ dont l'image est formée des multidérivations symétriques (resp. alternées) de A^p dans E. En particulier, ona a une injection canonique $\Sigma_A(P_n(A))^{*gr} \to Homgr_K(\Sigma(A),A)$ (resp. $\Lambda_A(P_n(A))^{*gr} \to Homgr_K(\Lambda(A),A))$ qui est, évidemment, un morphisme d'algèbres, pour les produit symétrique (resp. alterné). On pose $Dif_{\Sigma}(A) = \bigcup_n \Sigma_A(P_n(A))^{*gr} = \bigoplus_p (\bigcup_n (\Sigma^p_A(P_n(A))^{*gr}))$ (resp. $Dif_{\Lambda}(A) = \bigoplus_p (\bigcup_n (P_n(A))^{*gr}))$; $Dif_{\Sigma}(A)$ (resp. $Dif_{\Lambda}(A)$) est une K-*algèbre commutative* (resp. *alternée*) pour le produit symétrique (resp. alterné).

(4.2) Il est clair que toute multidérivation est un opérateur multidifférentiel d'ordre ≤ 1, d'où une injection canonique $i : \Lambda(\Omega(A))^{*gr} \to \Lambda(p_1(A))^{*gr}$, (resp. $\Sigma(\Omega(A))^{*gr} \to \Sigma(P_1(A))^{*gr}$) qui est un morphisme de K-algèbres pour le produit alterné (resp. symétrique).

D'autre part, la transposée de l'injection canonique $\Lambda(\Omega(A)) \to \Lambda(P_1(A))$ (resp. $\Sigma(\Omega(A)) \to \Sigma(P_1(A)))$ définit une application $p : \Lambda(P_1(A))^{*gr} \to \Lambda(\Omega(A))^{*gr}$ (resp. $\Sigma(P_1(A))^{*gr} \to \Sigma(\Omega(A))^{*gr}$) qui est une *rétraction* de i et un morphisme de K-algèbres.

De plus, si $C \in \Lambda^p(P_1(A))^*$, on a $\{C,\varepsilon\}(\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{p-1}) = C(\varepsilon \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1})$ pour $x_i \in A$ $(1 \leq i \leq p-1)$. Ainsi, $C \mapsto \{C,\varepsilon\}$ est une application K-linéaire $\pi : \Lambda(P_1(A))^{*gr} \to \Lambda(\Omega(A))^{*gr}$, graduée de degré -1, qui prolonge l'application qui à un opérateur différentiel de A fait correspondre son terme constant.

Enfin, en identifiant id_A à un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 de A, $C \mapsto C \wedge id_A$ est une application K-linéaire $\tau : \Lambda(\Omega(A))^{*gr} \to \Lambda(P_1(A))^{*gr}$, graduée et de degré 1 et τ est une section de π.

On a alors la *suite scindée* canoniquement

$$0 \longrightarrow \Lambda(\Omega(A))^{*gr} \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \Lambda((P^1(A))^{*gr} \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \Lambda(\Omega(A))^{*gr} \longrightarrow 0 ,$$

qui induit celle définie par $\mathrm{Dif}_1(A) = \mathrm{Der}(A) \oplus A$, où $\mathrm{Der}(A)$ est le A-module des dérivations de A.

Enfin, si $C, C' \in \Sigma(P_1(A))^{*gr}$, C étant homogène de degré p, on a, d'après (3.5) :

$$\begin{aligned}(C) &= (C) \wedge C' + (-1)^p C \wedge (C') \\ &= (C) \wedge (C') + (-1)^p (C) \wedge (C').\end{aligned}$$

(4.3) PROPOSITION. - *Soient* $C, C' \in \mathrm{Homgr}_K(\wedge_K(A),A)$ *des opérateurs multidifférentiels d'ordres* $\leq n$ *et* $\leq n'$ *respectivement.* $\{C,C'\}$ *est un opérateur multidifférentiel ; si* $n,n' \geq 1$, $\{C,C'\}$ *est d'ordre* $\leq n+n'-1$.

On peut supposer C et C' homogènes de degrés p et q respectivement $x \mapsto C \times \{C',x\} - C' \times \{C,x\}$ est un opérateur différentiel de A dans $\mathrm{Hom}_K(\Sigma_K^{p+q-2}(A),A)$ d'ordre $\leq n+n'-1$, comme cela résulte du lemme de (2.3).

D'autre part $x \mapsto \{C,x\} \times C'$ et $x \mapsto \{C',x\} \times C$ sont manifestement des opérateurs différentiels d'ordres $\leq n$ et $\leq n'$ respectivement, donc d'ordre $\leq n+n'-1$ si $n \geq 1$ et $n' \geq 1$. La formule (2) de (2.3) montre alors que $x \mapsto \{\{C,C'\},x\}$ est un opérateur différentiel qui est d'ordre $\leq n+n'-1$, lorsque $n \geq 1$ et $n' \geq 1$.

Par suite, le produit $\{\ ,\ \}$ induit sur $\mathrm{Dif}_\Sigma(A)$ une loi, encore notée $\{\ ,\ \}$ et telle que, pour $n \geq 1$ et $n' \geq 1$, on ait $\{\Sigma(P_n(A))^{*gr}, \Sigma(P_{n'}(A))^{*gr}\} \subset \Sigma(P_{n+n'-1}(A))^{*gr}$. $\mathrm{Dif}_\Sigma(A)$ est plus une *K-algèbre de Lie* et $\Sigma(P_1(A))^{*gr}$ est une *sous-algèbre de Lie de celle-ci.*

(4.4) PROPOSITION. - *Soient* $C, C' \in \mathrm{Homgr}_K(\wedge_K(A),A)$ *des opérateurs multidifférentiels d'ordres* $\leq n$ *et* $\leq n'$ *respectivement. Alors* $\{C,C'\}$ *est un opérateur multidifférentiel ; si* $n \geq 1$ *et* $n' \geq 1$, $\{C,C'\}$ *est d'ordre* $\leq n+n'-1$.

La démonstration est analogue à celle de (4.3) en utilisant, cette fois, la formule (2) et le lemme de (2.6).

Par suite, $\{\,,\}$ induit sur $\mathrm{Dif}_{\Lambda}(A)$ une loi, encore notée $\{\,,\}$ et telle que, pour $n \geq 1$ et $n' \geq 1$, on ait

$\{\Lambda(P_n(A))^{*gr}, \Lambda(P_{n'}(A))^{*gr}\} \subset \Lambda(P_{n+n'-1}(A))^{*gr}$. $\mathrm{Dif}_{\Lambda}(A)$ est alors une *K-algèbre de Lie dégressive.*

Si $C \in \Lambda^p(\ (A))^*$ et si $C', C'' \in \mathrm{Dif}\ (A)$, C' étant homogène de degré q, on a

$$(1) \qquad \{C, C' \wedge C''\} = \{C,C'\} \wedge C'' + (-1)^{(p+1)q} C' \wedge \{C,C''\}$$

d'après (3.5) (car l'injection canonique $\mathrm{Dif}_{\Lambda}(A) \to \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ est un morphisme de K-algèbres pour le produit alterné).

(4.5) D'après (4.3), la loi $\{\,,\}$ induit sur $\Lambda(P_1(A))^{*gr}$ une loi notée de la même manière, de telle sorte que $\Lambda(P_1(A))^{*gr}$ est une *algèbre de Lie dégressive,* dont $\Lambda(\ (A))^{*gr}$ est une sous-algèbre.

PROPOSITION. - *Soient* $C,C' \in \Lambda(\ (A))^{*gr}$ *des éléments homogènes de degrés respectifs* p et q. *On a*

(1) $\{\ (C),C'\} = (1-q)\, C \wedge C' - \ (\{C,C'\})$,

(2) $\{\ (C),\ (C')\} = (-1)^p(p-q)\ (C \wedge C')$.

On a $\{C', id_A\} = (-1)^q(1-q)C$.

D'après la formule (1) de (4.4), on a alors

$$\{C',\ (C)\} = \{C', id_A\} \wedge C + (-1)^{q+1}\, id_A \wedge \{C',C\}$$
$$= (-1)^{q+1}(q-1)C' \wedge C + (-1)^{q+1}\ (\{C',C\}), \text{ d'où (1).}$$

LEMME. - *Soient* $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A),A)$ *des éléments homogènes de degrés respectifs* p *et* q. *On a*

$$(4) \qquad \ (C) \wedge C' = (C' \wedge C + (-1)^{q+1}\ (C \wedge C').$$

Si, de plus, C *est une multidérivation, on a*

$$(5) \qquad C \wedge\ (C') = (-1)^q\, p\, C' \wedge C + \ (C \wedge C').$$

La formule (4) (resp. (5)) résulte du lemme 1 (resp. (2) de (3.5), compte tenu du fait que $id_A \wedge C' = C'$ (resp. $C \wedge id_A = pC$).

La formule (3) résulte alors immédiatement de (4) et (5).

(4.6) Voici comment calculer $\{C,C'\}$ dans $\Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$.

PROPOSITION. - *Soient* $C,C' \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$ *des éléments homogènes de degrés respectifs* p *et* q. *On a*

(1) $\rho(\{C,C'\}) = \{\rho(C),\rho(C')\} + (-1)^{p+1}(p-1)\,\rho(C)\wedge\pi(C')$
$+ (1-q)\,\pi(C)\wedge\rho(C')$,

(2) $\pi(\{C,C'\}) = (-1)^{p+1}\{\rho(C),\pi(C')\} - \{\pi(C),\rho(C')\}$
$+ (-1)^{p+1}(p-q)\,\pi(C)\wedge\pi(C')$.

En effet, d'après (4.5), on a

$$\{C,C'\} = \{\rho(C)+\varepsilon(\pi(C)),\ \rho(C')+\varepsilon(\pi(C'))\}$$
$$= \{\rho(C),\rho(C')\} + (-1)^{p+1}(p-1)\,\rho(C)\wedge\pi(C')+(1-q)\,\pi(C)\wedge\rho(C')$$
$$+ (-1)^{p+1}\varepsilon(\{\rho(C),\pi(C')\}) - \varepsilon(\{\pi(C),\rho(C')\})$$
$$+ (-1)^{p+1}(p-q)\,\varepsilon(\pi(C)\wedge\pi(C')),$$

d'où (1) et (2) par unicité.

REMARQUE. - Les formules (1) et (3) peuvent d'ailleurs se prouver directement à partir des définitions de (4.2).

COROLLAIRE. - *Soient* $t\in A$ *et* $C\in\Lambda^p(P_1(A))^*$. *On a*

(3) $\{C,t\,id_A\} = (-1)^p((1-p)tC) - \varepsilon(\{\rho(C),t\})$.

(4.7) $\Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$ est une algèbre pour chacun de deux produits $\wedge$ et $\{\ ,\ \}$. Ceux-ci sont liés par la formule suivante :

PROPOSITION. - *Soient* $C,C',C'' \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$, C *et* C' *étant homogènes de degrés* p *et* q. *On a*

(1) $\{C,C'\wedge C''\} = \{C,C'\}\wedge C'' + (-1)^{(p+1)q}C'\wedge\{C,C''\} - \pi(C)\wedge C'\wedge C''$.

Supposons C" homogène de degré r. D'après (4.5) et la formule (3) de (4.2), on a

$$\{\tau(\pi(C)), C'\wedge C''\} = \{\tau(\pi(C)), \rho(C'\wedge C'')\} + \{\tau(\pi(C)), \tau((\pi(C')\wedge\rho(C''))\}$$

$$+ (-1)^{q}\{\tau(\pi(C)), \tau(\rho(C')\wedge\pi(C''))\}$$

$$= (1-q-r)\,\pi(C)\wedge\rho(C'\wedge C'') - \{\tau(\pi(C)), \rho(C')\}\wedge\rho(C'')$$

$$+ (-1)^{pq+1}\tau(\rho(C'))\wedge\{\pi(C), \pi(C'')\} + (-1)^{p+1}(p-q-r)\,\tau(\pi(C)\wedge\pi(C'\wedge C'')).$$

De même :

$$\{\tau(\pi(C)), C'\}\wedge C'' = (1-q)\,\pi(C)\wedge\rho(C'\wedge C'') - \tau(\{\tau\pi(C), \rho(C')\}\wedge\rho(C''))$$

$$+ (-1)^{p+1}(p-q)\,\tau(\pi(C)\wedge\pi(C')\wedge\rho(C'')) + (-1)^{p+q+1}(1-q)\quad\tau(\pi(C)\wedge\rho(C')\wedge\pi(C''))$$

et

$$(-1)^{(p+1)q}\,C'\wedge\{\tau(\pi(C)), C''\} = (1-r)\quad\pi(C)\wedge\rho(C'\wedge C'')$$

$$+ (-1)^{pq+1}\tau(\rho(C')\wedge\{\pi(C), \rho(C'')\}) + (-1)^{p+q+1}(p-r)\,\tau(C)\wedge\rho(C')\wedge\pi(C''))$$

$$+ (-1)^{p+1}(1-r)\,\tau(\pi(C)\wedge\pi(C')\wedge\rho(C'')).$$

D'où

$$\{\tau(\pi(C)), C'\wedge C''\} = \{\tau(\pi(C)), C'\}\wedge C'' + (-1)^{(p+1)q}C'\wedge\{\tau(\pi(C)), C''\}$$

$$-\pi(C)\wedge C'\wedge C''.$$

La formule (1) résulte alors de ceci et de (3.5).

§ 5. APPLICATION AUX ALGEBRES DE LIE.

Dans ce paragraphe, on désigne par A une K-algèbre de Lie, dont le produit est noté $[\ ,]$.

(5.1) Soit $F \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^2(A),A)$ défini par $F(x \wedge y) = [x, y]$ pour $x,y \in A$. On pose $\{F,x\} = ad(x)$ pour tout $x \in A$. L'identité de Jacobi dans A s'écrit $F \times F = 0$, ou bien

$$(1) \qquad \{F, ad(x)\} = 0 \quad (x \quad A).$$

Pour $C \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ et $x \in A$, on pose alors, avec des notations usuelles.

$$(2) \qquad \sigma(x)C = \{C,x\} \ , \ \theta(x)C = \{ad(x),C\}$$

et

$$(3) \qquad dC = -\{F,C\} .$$

On a donc $dx = -ad(x)$ pour $x \in A$. L'identité de Jacobi généralisée montre que, pour $x,y \in A$, on a

$$(4) \qquad \theta(x)\sigma(y) - \sigma(y)\theta(x) = \sigma([x,y])$$

et pour $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, C étant homogène de degré p, on a

$$(5) \qquad d(\{C,C'\}) = -\{dC,C'\} - (-1)^p \{C,dC'\}\} .$$

En prenant $C = x$ et $C' = ad(x)$ pour $x \in A$, on obtient

$$(6) \qquad \theta(x) = \sigma(x)d + d\sigma(x),$$

$$(7) \qquad \theta(x)d = d\theta(x).$$

(6) et (7) montrent que $d^2\sigma(x) = \sigma(x)d^2$, d'où, par récurrence sur le degré de C, supposé homogène, et compte tenu de (1) :

$$(8) \qquad d^2 = 0.$$

(En faisant $C = F$ dans (5), on obtient d'ailleurs $2d^2 = 0$).

(5.2) On dit que une application K-multilinéaire $C : A^p \to A$ est une *multidérivation (de Lie)* si C est une dérivation de l'*algèbre de Lie* A par rapport à chacune de ses variables. Ainsi l'identité de Jacobi signifie que F est *une bidérivation* (alternée).

(5.3) PROPOSITION. - *Soient* C, C', $C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, C *étant une multidérivation de degré* p' *et* C' *étant homogène de degré* q. *On a*

(1) $$\{C,[C',C'']\} = [\{C,C'\},C''] + (-1)^{(p+1)q}[C',\{C,C''\}] .$$

Cela résulte des lemmes suivants.

LEMME 1. - *Si* $C,C',C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, *on a*

$$[C',C''] \times C = [C' \times C,C''] + (-1)^{(p+1)q}[C'',C'' \times C'] .$$

LEMME 2. - *Si* C *est une multidérivation, on a*

$$C \times [C',C''] = [C',C \times C''] + (-1)^{qr+1}[C'',C \times C'] .$$

Leurs démonstrations sont analogues à celles de (3.5).

COROLLAIRE. - *On a, pour* $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, C *étant homogène de degré* p,

(1) $$d([C,C']) = [dC,C'] + (-1)^p[C,dC'] .$$

Autrement dit, d est une antidérivation de degré 1 de l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Hom}_K(\Lambda(A),A)$.

(5.4) PROPOSITION. - *Soient* $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ *des éléments homogènes de degrés* p *et* q. *Si* C *et* C' *sont des multidérivations, il en est de même de* $\{C,C'\}$.

La démonstration est analogue à celle de (3.6).

Pour $p \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathrm{Der}^p(A)$ le sous-K-module de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(A),A)$ formé des multidérivations alternées et on note $\mathrm{Der}^\bullet(A)$ le sous-module gradué $\bigoplus_p \mathrm{Der}^p(A)$ de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$. $\mathrm{Der}^\bullet(A)$ est ainsi une sous-algèbre de l'algèbre de Lie dégressive $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$.

(5.5) Soit, $C \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$. Il est clair que

(1) $$F \times C = [C, \mathrm{id}_A] .$$

PROPOSITION. - *Soit* $C \in \mathrm{Der}^p(A)$. *On a*

(2) $\quad d\,C = (1-p)\ [\mathrm{id}_A, C]$.

On a $\quad C \times F\ (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+1})$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} C([x_i,x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_i \wedge \ldots \wedge \check{x}_j \wedge \ldots \wedge x_{p+1})$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^j [C(x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_j \wedge \ldots \wedge x_{p+1}), x_j]$$

$$+ (-1)^{i+1} [x_i, C(x_1 \wedge \ldots \wedge \check{x}_i \wedge \ldots \wedge \check{x}_{p+1})]$$

$= p\ [\mathrm{id}_A, C]$.

La formule (2) résulte de ceci et de (1).

(5.6) D'après la formule (5) de (5.1), (resp. (2) de (5.3)) Ker(d) est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie dégressive (resp. graduée). $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ et Im(d) est un idéal de l'algèbre de Lie dégressive (resp. graduée) Ker(d). Par suite, $H_{Lie}(A) = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$, gradué par $(H^p_{Lie}(A))_p$, où $H^p_{Lie}(A) = \mathrm{Ker}_A(d^p)/\mathrm{Im}(d^p)(d^p : \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(A),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{p+1}(A),A)$ est la restriction de d) est une K-algèbre de Lie dégressive (resp. graduée) pour le produit déduit de $\{,\}$ (resp. $[\,,]$) noté de la même manière. On a bien entendu $H^{\circ}_{Lie}(A) = \mathrm{Ker(ad)} = Z(A)$, où $Z(A)$ est le centre de A et $\mathrm{Ker}(d^1) = \mathfrak{Der}(A)$, d'où $H^1_{Lie}(A) = \mathfrak{Der}(A)/\mathrm{ad}(A)$, $\mathfrak{Der}(A)$ étant le K-module des dérivations de l'algèbre de Lie A.

(5.7) De même, si $d' = (1-p)\ [\mathrm{id}_A, .]$ est la restriction de d à Der'(A), Ker(d') est une sous-algèbre de Lie dégressive de Der (A) et Im(d') est un idéal de cette sous-algèbre. Par suite, $H'_{Lie}(A) = \mathrm{Ker}(d')/\mathrm{Im}(d')$ gradué par $(H'^p_{Lie}(A))_p$ où les $H^p_{Lie}(A)$ sont définis de manière évidente, est une K-algèbre de Lie dégressive. On a $H'^{\circ}_{Lie}(A) = Z(A)$ et $H'^1_{Lie}(A') = \mathfrak{Der}(A)/\mathrm{ad}(A)$ et, plus généralement, un morphisme de K modules gradués de $H'_{Lie}(A)$ dans $H_{Lie}(A)$, qui est un morphisme d'algèbre (pour les produits $\{,\}$).

§ 6. APPLICATION AUX ALGEBRES DE POISSON.

(6.1) Soit A une K-algèbre (associative, unifine et commutative) et soit $F \in \Lambda^2(\Omega(A))$ vérifiant *l'identité de Jacobi* $F \ast F = 0$ (cf. (2.8)). On dit que A, muni de F, est une K-*algèbre de Poisson* [2]. Si l'on pose $F(dx \wedge dy) = [x,y]$ pour $x,y \in A$, on définit sur A une structure K-algèbre de Lie. Par suite, $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ est, canoniquement, une K-algèbre de Lie graduée. Et c'est une K-algèbre alternée, pour le produit alterné.

(6.2) PROPOSITION. - *Pour* $C,C',C'' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, C *et* C' *étant homogènes de degrés* p *et* q *respectivement, on a*

(1) $$[C,C' \wedge C''] = [C,C'] \wedge C'' + (-1)^{pq} C' \wedge [C,C''] .$$

En effet, si C" est homogène de degré r, on a

$$[C,C' \wedge C''] (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q+r})$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q,r)} \mathrm{sgn}(\sigma)\big([C(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge r_{\sigma(p)}), C'(x_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q)})] \; C''(x_{\sigma(p+q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q+r)})$$
$$+ C'(x_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q)}) [C(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)}), C''(x_{\sigma(p+q+1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q+r)})] \big)$$
$$= ([C,C'] \wedge C'' + (-1)^{pq} C' \wedge [C,C''])(x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p+q+r)}).$$

En particulier, $\bigoplus_p \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{2p}(A),A)$, muni des produits $\wedge$ et $[\ ,\ ]$, est une K-*algèbre de Poisson*.

(6.3) Soient $C,C' \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$, C étant homogène de degré p.

D'après (3.5), on a

(1) $d(C \wedge C') = (dC) \wedge C' + (-1)^p C \wedge (dC')$.

En particulier, pour $x \in A$, on a

(2) $d(xC) = xdC - \mathrm{ad}(x) \wedge C$,

ce qui montre que d est Z(A)-linéaire.

Il en résulte que Ker(d) est une sous-algèbre de l'algèbre **alternée** $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ et que Im(d) est un idéal de cette algèbre.

Par suite, $H_{Lie}(A)$ est une K-*algèbre alternée* pour le produit induit par Λ et noté de la même manière. Et, d'après la formule (1) de (6.2), on a

$$(3)\qquad [\Upsilon, \Upsilon' \wedge \Upsilon''] = [\Upsilon, \Upsilon'] \wedge \Upsilon'' + (-1)^{pq}\, \Upsilon' \wedge [\Upsilon, \Upsilon'']$$

si $\Upsilon \in H^p_{Lie}(A)$, $\Upsilon' \in H^q_{Lie}(A)$ et $\Upsilon'' \in H_{Lie}(A)$.

En particulier $\bigoplus_p H^{2p}_{Lie}(A)$ est une K-*algèbre de Poisson*.

(6.4) Comme $F \in \Lambda^2(\Omega(A))^*$, d induit sur $\Lambda(\Omega(A))^{*\,gr}$ une *antidérivation* ∂ de degré 1, pour le produit alterné, et on a

$$\partial(\{C,C'\}) = -\{\partial C,C'\} - (-1)^p\{C, \partial C'\}$$

si C est homogène de degré p. D'où le K-module gradué de cohomologie $\mathcal{H}(A) = \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$, qui est muni des deux produits induits par $\wedge$ et $\{\,,\}$, et notés de la même manière. Pour le premier, $\mathcal{H}(A)$ est une K-*algèbre alternée* et, pour le second, une K-*algèbre de Lie dégressive* et on a, d'après (3.5) :

$$(1)\qquad \{\Upsilon, \Upsilon' \wedge \Upsilon''\} = \{\Upsilon, \Upsilon'\} \wedge \Upsilon'' + (-1)^{(p+1)q} C' \wedge \{C,C''\}\ .$$

si $\Upsilon, \Upsilon' \cdot \Upsilon'' \in \mathcal{H}(A)$, Υ et Υ' étant homogènes et de degrés **respectifs** p et q.

Soit $(\mathcal{H}^p(A))_p$ la graduation de $\mathcal{H}(A)$. On a évidemment

$$(2)\qquad \mathcal{H}_o(A) = Z(A).$$

et

$$(3)\qquad \mathcal{H}^1(A) = (\mathrm{Der}(A) \cap \mathfrak{Der}(A))/\mathrm{ad}(A)$$

où Z(A) est le centre de A et Der(A) le module des dérivations de A. **Z(A)** est, comme on le voit facilement, une sous-algèbre *pleine* de A. **D'autre** part, $\bigoplus_p \mathcal{H}^{2p+1}(A)$ est une K-algèbre de Lie (pour $\{\,,\}$) dont $\mathcal{H}^1(A)$ **est** une sous-algèbre.

Enfin, on a une application K-linéaire canonique $j : \mathcal{H}(A) \to H_{Lie}(A)$ qui est un morphisme d'algèbres pour les produits $\wedge$ et $\{\ ,\}$; on a $j^o = id_{Z(A)}$ et j^1 est injectif.

(6.5) Désignons par φ l'endomorphisme (A-linéaire) gradué de degré 2 de $\wedge(\Omega(A))^{*\,gr}$ défini par $\varphi(C) = F\wedge C$. Comme $\partial F = 0$ (identité de Jacobi), on a

(3) $$\partial\varphi = \varphi\partial.$$

Par suite, φ induit un endomorphisme $\tilde{\varphi}$ gradué de degré 2 de $\mathcal{H}(A)$.

PROPOSITION. - *Pour que* $\tilde{\varphi} = 0$ *, il faut et il suffit que la classe de cohomologie de* F *soit nulle.*

C'est suffisant, car si $F = \partial D$ où $D \in \Omega(A)^*$, on a, pour tout $C \in \mathrm{Ker}(\partial)$, $\partial(D\wedge C) = \partial D\wedge C + D\wedge\partial C = \varphi(C)$. Donc $\tilde{\varphi} = 0$. C'est nécessaire, car si $\tilde{\varphi} = 0$, sa restriction $\tilde{\varphi}_o : Z(A) \to \mathcal{H}^2(A)$ est nulle ; comme $F = \varphi(1)$, ceci montre que la classe d'homologie de F est nulle.

(6.6) Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{D}^p(A)$ le K-module des $C \in \wedge^p(\Omega(A))^*$ qui sont des multidérivations de *Lie* de A et soit $\mathcal{D}^\bullet(A) = \bigoplus_p \mathcal{D}^p(A)$. $\mathcal{D}^\bullet(A)$ est une K-algèbre pour le produit $\{\ ,\}$. Comme $F \in \mathcal{D}^2(A)$, ∂ induit un endomorphisme ∂' de degré 1 de $\mathcal{D}'(A)$; d'où la K-algèbre de Lie dégressive $\mathrm{Ker}(\partial')/\mathrm{Im}(\partial') = \mathcal{H}'(A)$ et on a un morphisme canonique $\mathcal{H}'(A) \to \mathcal{H}(A)$;

on a $\mathcal{H}'^o(A) = Z(A)$ et $\mathcal{H}'^1(A) = \mathcal{H}^1(A)$.

(6.6) Pour $n \geq 1$, considérons la K-algèbre alternée $\wedge(P_n(A)^{*\,gr}$, d induit dans cette K-algèbre une antidérivation de degré 1, notée ∂_n. Le K-module de cohomologie $\mathcal{H}_n(A) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_n)$ est donc muni d'un produit induit par $\wedge$ et noté de la même amanière ; pour ce produit, $\mathcal{H}_n(A)$ est une K-*algèbre alternée*. Et on a des morphismes canoniques

$$\mathcal{H}(A) \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{H}_1(A) \to \dots \to \mathcal{H}_n(A) \to \dots ,$$

où $\tilde{i}$ est induit par l'injection $i : \Lambda(\Omega(A))^{* gr} \to \Lambda(P_1(A)^{* gr}$ (on étudiera $\tilde{i}$ en (6.12)).

Pour $n, n' \geq 1$, $\{,\}$ induit une application K-bilinéaire $\mathcal{H}_n(A) \times \mathcal{H}_{n'}(A) \to \mathcal{H}_{n+n'-1}(A)$, encore notée $\{,\}$.

(6.7) $\mathrm{Dif}_\Lambda(A)$ est une K-algèbre alternée, pour le produit alterné (4.1). d induit une antidérivation de degré 1 de cette algèbre, notée ∂_∞. D'autre part, $\mathrm{Dif}_\Lambda(A)$ est une K-algèbre pour le produit $\{,\}$ (4.4) et on a, si $C,C' \in \mathrm{Dif}_\Lambda(A)$, C étant homogène de degré p ((5.1), formule (5)) :

$$\partial_\infty(\{C,C'\}) = -\{\partial_\infty C,C'\} - (-1)^p\{C, \partial_\infty C'\} .$$

Par suite, le K-module de cohomologie $\mathcal{H}_\infty(A) = \mathrm{Ker}(\partial_\infty)/\mathrm{Im}(\partial_\infty)$ est muni de deux structures d'algèbres pour les produits induits par Λ et $\{,\}$ et notés de la même manière ; $\mathcal{H}_\infty(A)$ est une algèbre alternée pour et une algèbre de Lie dégressive pour $\{,\}$.

(6.8) PROPOSITION. - *Soient* $C \in \Lambda(P_n(A))^{* gr}$ *et* $C' \in \Lambda(P_n(A))^{* gr}$ *avec* $n \leq n'$. *Alors* $[C,C'] \in \Lambda(P_{n'+1}(A))^{* gr}$.

a) Supposons d'abord $C \in \mathrm{Dif}_n(A)$ et soit $x \in A$. Comme ad(x) est une dérivation de A dans A, $[C, x] = -\mathrm{ad}(x).C$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n+1$.

b) Soit $x \in A$ et supposons C et C' homogènes de degrés p et q. On a

$$\begin{aligned}&[\{C,x\},C'](x_1\wedge\dots\wedge x_{p+q-1})\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p-1,q)} \mathrm{sgn}(\sigma)[C(x\wedge x_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge x_{\sigma(p-1)}),C'(x_{\sigma(p)}\wedge\dots\wedge x_{\sigma(p+q-1)})]\end{aligned}$$

D'après a), on voit que $x \mapsto [\{C,x\},C']$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n+1$. De même, $x \mapsto [\{C',x\},C]$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n'+1$.

c) Enfin, on a

$$\{[C,C'],x\} = [\{C,x\},C'] - (-1)^{pq}[\{C',x\},C],$$

ce qui montre que $x \mapsto \{[C,C'].x\}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n'+1$. D'où la proposition.

Ainsi, $\mathrm{Dif}_\Lambda(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda(A),A)$ (pour le produit $[\,,\,]$). La formule (2) de (5.3) montre que ∂_∞ est une antidérivation de degré 1 de $\mathrm{Dif}_\Lambda(A)$. Par suite, le produit $[\,,\,]$ induit sur $\mathcal{H}_\infty(A)$ un produit, noté de la même manière et $\mathcal{H}_\infty(A)$ est une *algèbre de Lie graduée* pour ce produit.

(6.10) Utilisons les notations de (4.2). Pour $C,C' \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$, on a

$$\partial_\Lambda(\{C,C'\}) = -\{\partial_1 C,C'\} - (-1)^p\{C,\partial C'\},$$

C étant homogène de degré p. Par suite, $\{\,,\}$ induit sur $\mathcal{H}_1(A)$ un produit noté de la même manière et $\mathcal{H}_1(A)$, muni de ce produit, est une K-*algèbre de Lie dégressive*. D'autre part, $\mathcal{H}_1(A)$ est une K-algèbre alternée (6.7).

Il est clair que l'on a $\partial^1 i = i\partial$. Donc i induit une application K-linéaire $\tilde{\imath} : \mathcal{H}(A) \to \mathcal{H}^1(A)$, qui est un morphisme pour les produits $\wedge$ et $\{,\}$.

D'autre part, si $C \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$, on a $\pi(\{F,C\}) = -\{F,\pi(C)\}$ d'après la formule (2) de (4.6), autrement dit, on a $\partial_1\pi = -\pi\partial$. Par suite, π induit une application K-linéaire $\tilde{\pi}$, graduée et de degré -1, de $\mathcal{H}_1(A)$ dans $\mathcal{H}(A)$. D'après la formule (2) de (4.2), on a

$$(1) \qquad \tilde{\pi}(\Upsilon\wedge\Upsilon') = \pi(\Upsilon)\wedge\Upsilon' + (-1)^p\Upsilon\wedge\tilde{\pi}(\Upsilon'),$$

si $\Upsilon, \Upsilon' \in \mathcal{H}_1(A)$, Υ étant homogène de degré p. La formule (1) de (4.7) montre que l'on a

(2) $$\{\gamma, \gamma' \wedge \gamma''\} = \{\gamma, \gamma'\} \wedge \gamma'' + (-1)^{(p+1)q} \gamma' \wedge \{\gamma, \gamma''\} - \tilde{\pi}(\gamma) \wedge \gamma' \wedge \gamma'' ,$$

si $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \mathcal{H}_1(A)$, γ et γ' étant homogènes de degrés respectifs p et q.

(6.11) En posant $\varphi_1(C) = F \wedge C$ pour $C \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$, on définit un endomorphisme (A-linéaire) gradué de degré 2 de $\Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$. Il est clair que l'on a $i\varphi = \varphi_1 i$, $\rho\varphi_1 = \varphi\rho$, $\pi\varphi_1 = \varphi\pi$ et $\tau\varphi = \varphi_1\tau$.

D'autre part, on a $\{F, F \wedge C\} = F \wedge \{F, C\}$ si $C \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$, c'est-à-dire $\partial_1 \varphi_1 = \varphi_1 \partial_1$. Il en résulte que φ_1 induit un endomorphisme $\tilde{\varphi}_1$, gradué de degré 2, de $\mathcal{H}_1(A)$.

PROPOSITION. - *On a*

(1) $i\varphi = \partial_1 \tau + \tau\partial$,

(2) $\varphi\partial_1 = \partial\rho + \varphi\pi$,

(3) $\partial_1 = -\tau\partial\pi + i(\partial\rho + \varphi\pi)$.

Soit $C \in \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$. D'après la formule (1) de (4.5), on a $\{F, \tau(C)\} = - F \wedge C - \tau(\{F, C\})$, d'où (1). Comme $i\rho + \tau\pi = \mathrm{id}$, on a $\partial_1 = i\partial\rho + i\varphi\pi - \tau\partial\pi$; d'où (3).

La formule (2) est alors immédiate (elle résulte aussi de la formule (1) de (4.5)).

REMARQUE. - La formule (1) montre que $\varphi_1 i : \Lambda(\Omega(A))^{*\,gr} \to \Lambda(P_1(A))^{*\,gr}$ est homotope à 0, par τ. Et on a une interprétation analogue de (2) (cf. 6.12)).

(6.12) On a le diagramme commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda(\Omega(A))^{*\,gr} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & \Lambda(P_1(A))^{*\,gr} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\partial_1"] & \Lambda(\Omega(A))^{*\,gr} \arrow[r] \arrow[d, "-\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda(\Omega(A))^{*\,gr} \arrow[r, "i"] & \Lambda(P_1(A))^{*\,gr} \arrow[r, "\pi"] & \Lambda(\Omega(A))^{*\,gr} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

où les lignes sont exactes.

Ce diagramme induit une suite exacte de cohomologie

(2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(A) \arrow[rr, "\tilde{\pi}"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathcal{H}_1(A) \arrow[dl, "\tilde{i}"] \\
& \mathcal{H}(A) &
\end{tikzcd} .$$

La définition du morphisme de connection Δ et la formule (1) de (6.11) montrent que $\Delta = \tilde{\varphi}$. Soit $(\mathcal{H}_1^p(A))_p$ la graduation de $\mathcal{H}_1(A)$ et $\tilde{i}^p$, $\tilde{\pi}^p$ et $\tilde{\varphi}^p$ les composants de degré p de $\tilde{i}$, $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\varphi}$. On a ainsi le résultat suivant :

PROPOSITION. - *La suite*

(3)
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(A) \xrightarrow{\tilde{i}^1} \mathcal{H}_1^1(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}^1} Z(A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^\circ} {}^2(A) \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow \mathcal{H}^p(A) \xrightarrow{\tilde{i}^p} \mathcal{H}_1^p(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}^p} \mathcal{H}^{p-1}(A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{p-1}} \mathcal{H}^{p+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

Les suites exactes (2) et (3) donnent naissance aux suites exactes

(4) $0 \to \mathrm{Coker}(\tilde{\varphi}) \to \mathcal{H}_1(A) \xrightarrow{\tilde{i}} \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}) \to 0$

(5) $0 \to \mathcal{H}^1(A) \xrightarrow{\tilde{i}^1} \mathcal{H}_1^1(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}^1} \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}^\circ) \to 0$

et, pour $p \geqslant 1$,

(6) $\quad 0 \to \mathrm{Coker}(\tilde{\varphi}^{p-1}) \to \mathcal{H}_1^{p+1}(A) \to \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}^{p+1}) \to 0.$

COROLLAIRE. - *Supposons que la classe de cohomologie de* F *soit nulle. On a les suites exactes*

(7) $\quad 0 \to \mathcal{H}(A) \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{H}_1(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{H}(A) \to 0$

(8) $\quad 0 \to \mathcal{H}^{p-1}(A) \xrightarrow{\tilde{i}^p} \mathcal{H}_1^p(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}^p} \mathcal{H}^{p-1}(A) \to 0 \qquad (p \geq 1).$

Cela résulte de (6.5).

(6.13) Soit X une *variété de Poisson* (Cf. [2] et [5]) i.e. une variété différentielle de classe C^{∞} (paracompacte) et soit A la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$. La structure de Poisson de X est définie par la donnée d'un champ de tenseurs deux fois contravariant et antisymétrique $F \in \Lambda^2(\Omega(A))^*$ vérifiant l'identité de Jacobi $F \times F = 0$. A est alors une $\mathbb{R}$-*algèbre de Poisson*. Les résultats de (6.9), (6.10) et (6.11) généralisent aux variétés de Poisson ceux établis dans (5) lorsque X est une variété symplectique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique,* Algèbre, ch. 3.

[2] J. BRACONNIER, Algèbres de Poisson, C.R.A.S., 284 (1977), p. 1345-1348.

[3] N. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological algebra,* Princeton University Press.

[4] A. NIJENHUIS, Jacobi type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, I et II ; Indig. Math. (1955) p. 390-403.

[5] A. LICHNEROWICZ, Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact ; *J. Math. Pures et Appl.* 53 (1974), p. 459-484.

J. BRACONNIER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQ
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLERUBANNE