BERNARD JACQUOT

Caractérisation des compacts métriques contenant un arc

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 109-114
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_109_0>

›lications du
partement de
athématiques
on 1978 t. 15-1

CARACTERISATION DES COMPACTS METRIQUES CONTENANT UN ARC

par Bernard JACQUOT

1. - Soit E un compact, de métrique d. Un ensemble de points (a_k) tel que $a_o = a, a_n = b$ et $d(a_k, a_{k+1}) \leq \delta$ sera dit *δ-chaîne de* a à b. $\mathscr{C}_\delta(a,b)$ dénotera l'ensemble des δ-chaînes de a à b.

Nous dirons que E possède la propriété P(a,b,f,D) si l'on peut trouver :

Deux points a et b de E tels que, pour tout δ, $\mathscr{C}_\delta(a,b) \neq \emptyset$;

Une fonction f de E^2 dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs, telle que $\lim\limits_{x \to x_o} f(x,x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x_o,x) = 0$,

et que $D(a,b) = \lim\limits_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum\limits_k f(a_k,a_{k+1}),\ (a_k) \in \mathscr{C}_\delta(a,b) \right\}$ est fini et non nul.

Le but de ce travail est d'utiliser la propriété P(a,b,f,D) afin d'établir une condition nécessaire et suffisante sur E pour qu'il contienne un arc.

2. - Nous démontrons d'abord la

PROPOSITION. - *Soit* E *un compact, de métrique* d, *où l'on peut trouver* a,b *et* f *tels que* P(a,b,f,D) *soit vérifiée. Soient* $\mathfrak{R}$ *la relation d'équivalence* $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow D(x,y) = 0$, *et* x^* *la classe de* x *pour* $\mathfrak{R}$. *Alors :*

(a) Il existe dans E *un compact* G_{ab} *où* D(a,.) *est continue ;*

(b) $D'(x^*,y^*) = D(x,y)$ *est une distance sur* $G_{ab}/\mathfrak{R}$;

(c) $G_{ab}/\mathfrak{R}$, *muni de la métrique* D', *est un arc.*

La démonstration se trouve dans les numéros 3 à 8.

3. - Soit $e(A,B)$ la distance de Hausdorff séparant A et B, sous compacts non vides de E. Elle est définie par

$$\nu(a,B) = \inf\{d(a,x),\quad x \in B\} \quad ,$$
$$e'(A,B) = \sup\{\nu(y,B),\ y \in A\} \, ,$$
$$e(A,B) = \sup[e'(A,B), e'(B,A)] \quad .$$

Tout d'abord, remarquons qu'il existe une suite de δ_n-chaînes $(a^n_j, j=1,k(n))$ telle que

$$\lim_n \delta_n = 0,$$

$$\lim_n \sum_{j < k(n)} f(a^n_j, a^n_{j+1}) = D(a,b).$$

Chacune de ces δ_n-chaînes est compacte, donc d'après le théorème de sélection de Blaschke (voir (1), p. 91) il existe une suite de δ_{n_k} - chaînes, extraite de la première, convergeant avec la métrique de Hausdorff vers un compact G_{ab}. Ce compact sera dit, dans la suite, issu de la propriété $P(a,b,f,D)$. Or G_{ab} est bien enchaîné (cela résulte du fait que si $e(G_{ab},(a^n_j))$ est inférieur à ε, alors pour tout x de G_{ab} il existe un a^n_j tel que $d(x,a^n_j) < \varepsilon$, et inversement). G_{ab} est donc un continu (i.e. un compact connexe).

4. - D'x,y) est un écart sur G_{ab}. En effet, clairement, $D(x,x) = 0$ et $D(x,y)=D(y,x)$. Quant à l'inégalité triangulaire, elle résulte du fait que si $(a_k) \in \mathscr{C}_\delta(a,b)$ et $(b_j) \in \mathscr{C}_\delta(b,c)$, alors $(a_k) \cup (b_j) \in \mathscr{C}_\delta(a,c)$. Ainsi (b) est démontré.

5. - Si $x \in G_{ab}$, alors $D(a,x)+D(x,b)=D(a,b)$.

En effet, considérons la suite des chaînes (a^n_j) du n° 3. On peut y changer chaque élément de façon que, à p donné, les a^p_j soient distincts deux à deux.

La somme associée converge toujours vers D(a,b).

Soit $x \in G_{ab}$. A chaque ε, on peut associer $p(\varepsilon)$ tel que pour tout $p \geqslant p(\varepsilon)$, (a_j^p) soit une ε-chaîne et que $e(G_{ab},(a_j^p)) < \varepsilon$. Soient $(a^p_{r(x)},\dots,a^p_{q(x)})$ les éléments, rangés dans l'ordre croissant de leurs indices inférieurs, situés à moins de ε de x pour d. Les chaînes $(a=a_0^p,a_1^p,\dots,a^p_{r(x)},x)$ et $(x,a^p_{q(x)},\dots,a_n^p=b)$ ont x et $a^p_{r(x)}$ en commun quand $a^p_{r(x)}=a^p_{q(x)}$, et x seul sinon. Mais

$$\inf\left\{\sum_j f(b_j,b_{j+1});(b_j)\in\mathscr{C}_\varepsilon(a,x)\right\}\leqslant \sum_{k<r(x)} f(a_k^p,a_{k+1}^p)+f(a^p_{r(x)},x) \quad ,$$

$$\inf\left\{\sum_h f(c_h,c_{h+1}),(c_h)\in\mathscr{C}_\varepsilon(x,b)\right\}\leqslant \sum_{i\geqslant q(x)} f(a_i^p,a_{i+1}^p)+f(x,a^p_{q(x)}).$$

Additionnant ces deux inégalités membre à membre et prenant la limite pour $\varepsilon = 0$, il vient $D(a,x)+D(x,b) \leqslant D(a,b)$.

C.Q.F.D.

6. - Soit $x \in G_{ab}$. Alors, si $D(ax) \neq D(a,b)$ et $D(a,x) \neq 0$,E possède les propriétés P(a,x,f,D) et P(x,b,f,D) et $G_{ax}\cup G_{xb} = G_{ab}$. (Les deux continus du premier membre de cette égalité étant issus des propriétés correspondantes).

En effet, il existe une suite (n_i) d'entiers naturels telle que les chaînes $(a_0^{n_i},\dots,a^{n_i}_{r(x)})$ convergent vers un compact (r(x) à la même signification qu'au n° 5). On peut extraire des (n_i) une suite (n'_k) telle que

$$\lim_k \sum_{j<r(x)} f(a_j^{n'_k}, a_{j+1}^{n'_k}) + f(a^{n'_k}_{r(x)},x) = D(a,x).$$

En effet, dans cette égalité, la limite du premier membre est supérieure ou égale à D(a,x) ; si elle était strictement plus grande, alors

$\sum\limits_i f(a_i^p, a_{i+1}^p)$ tendrait vers un nombre strictement supérieur à D(a,b).

Traitant de le même façon le couple (x,b) à partir de la suite (n'_k) on a bien construit les continus G_{ax} et G_{xb}. On vérifie facilement que leur réunion vaut G_{ab}.

Enfin remarquons, en vue du n° 9, que si P(u,v,f,D) est vraie pour tous u, $v \in G_{ab}$, alors D est une distance sur G_{ab}.

7. - D(a,.) est continue sur G_{ab}. En effet, soit $M = \{y, D(a,y) \leqslant \alpha\}$.
Soit x_n une suite de points de M convergeant vers x. Alors

$$D(a,x) \leqslant \underline{\lim}_{\delta=0} \left[\inf \left\{ \sum_k f(a_k,a_{k+1}) + f(x_{n(\delta)},x), (a_k) \in \mathscr{C}_\delta(a,x_{n(\delta)}) \right\} \right] \quad ,$$

dès que $d(x,x_{n(\delta)}) \leqslant \delta$.

Mais $\inf\left\{\sum\limits_k f(a_k,a_{k+1}), (a_k) \in \mathscr{C} \quad (a,x_{n(\delta)})\right\} \leqslant D(a,x_{n(\delta)})$.

Donc $D(a,x) \leqslant \alpha$ et M est fermé.

De même, $\{ x, D(a,x) \geqslant \beta \}$ est fermé, car $D(a,x) \geqslant \beta \Longleftrightarrow D(b,x) \leqslant D(a,b) - \beta$.

(a) est donc démontré.

8. - $G_{ab}/\mathfrak{R}$ est un arc pour la métrique D'.

en effet, si $x^* \in G_{ab}/\mathfrak{R}$, associons-lui $\xi(x^*) = D'(a^*,x^*)/D'(a^*,b^*)$.
ξ est injective et bicontinue, par les n° 5 et 6. (car, si $p = \xi^{-1}(u)$ et $q = \xi^{-1}(v)$ le n° 6 indique, que, par exemple, $p \in G_{aq}/\mathfrak{R}$ et le n° 5 nous dit que $D'(p,q) = |D'(a^*,p) - D'(a^*,q)|$).

ξ est surjective, car la connexité de G_{ab} pour d et la continuité de $D(a,.)$ sur cet ensemble impliquent que l'image de $G_{ab}/\mathfrak{R}$ par ξ est connexe donc égale à $[0,1]$.

Cela prouve (c) et termine la démonstration de la proposition du n° 2.

9. - Nous pouvons maintenant démontrer le

THEOREME. - *Soit* E *un compact de métrique* d. *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(a) E *contient un arc.*

(b) Il existe a,b,f *tels que* E *possède* P(a,b,f,D), *et* P(u,v,f,D) *est vérifié pour tous* u,v *d'un certain continu issu de* P(a,b,f,D).

DEMONSTRATION DE (b) $\Rightarrow$(a). Soit G_{ab} le continu de P(a,b,f,D) où (cf. n° 6) D est une distance. Si $x \in G_{ab}$, il existe deux continus G_{ax} et G_{xb} tels que $G_{ab} = G_{ax} \cup G_{xb}$. De plus, si $y \in G_{ax} \cap G_{xb}$, et $y \neq x$, alors $D(a,y) < D(a,x)$ et $D(b,y) < D(b,x)$, ce qui est impossible. Ainsi $G_{ax} \cap G_{xb} = \{x\}$, et (voir (2), p. 179) G_{ab} est un arc pour d.

DEMONSTRATION DE (a) $\Rightarrow$(b). E contient un arc A, dont nous appellerons a et b les extrémités. Soit ξ l'homéomorphisme échangeant A et $[0,1]$. A chaque valeur entière n, soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des boules de rayon 1/n et centrées en chaque point de A.A tout point x de E attachons

$$t(x) = \sup \{ n : \exists B \in \mathcal{B}_n , x \in B \} ,$$

Soit $\mathcal{S}(n,x)$ l'ensemble des boules de $\mathcal{B}_n$ qui contiennent x.
A chaque couple (x,y) attachons

- $m(x,y) = \inf(t(x),t(y))$
- $p(x)=p(y)$,point de A situé dans une boule commune à $\mathcal{S}(m(x,y),x)$ et $\mathcal{S}(m(x,y),y)$ quand il y en a une ; ou bien p(x) et p(y), quelconques, situés respectivement dans $A \cap \mathcal{S}(m(x,y),x)$ et $A \cap \mathcal{S}(m(x,y),y)$ quand ces deux ensembles

sont disjoints. Nous imposons en outre que $p(x)=x$ si $x \in A$.

Posons $f(x,y) = |\xi(p(x)) - \xi(p(y))|$.

Soit x_n une suite de points de E tendant vers x. Si $x \notin A$, à partir d'un certain n_o, tous les x_n sont dans une boule de $\mathcal{S}(t(x),x)$, auquel cas $f(x,x_n) = 0$. Si $x \in A$

- ou bien $x_n \in A$, alors $f(x,x_n) = |\xi(x) - \xi(x_n)|$
- ou bien $x_n \notin A$, et $f(x,x_n) = |\xi(x) - \xi(p(x_n))|$;

mais $d(x,p(x_n)) \leqslant d(x,x_n) + 1/t(x_n)$. f vérifie donc la seconde propriété requise dans la définition de $P(a,b,f,D)$.

Maintenant, si (u_i^k) est une subdivision de $[0,1]$ de pas $1/k$,

$$D(a,b) \leqslant \lim_k \sum_i f(\xi^{-1}(u_i^k), \xi^{-1}(u_{i+1}^k)) = 1.$$

Puis

$$\sum_k f(a_k,a_{k+1}) = \sum_k |\xi(p(a_k)) - \xi(p(a_{k+1}))| \geqslant |\xi(p(a)) - \xi(p(b))| = 1.$$

$D(a,b)$ vaut donc 1 et A est issu de $P(a,b,f,D)$. Enfin, D est bien une distance sur A.

REMARQUE. - On peut s'inspirer de cette dernière démonstration pour trouver une réciproque à la proposition du n° 2. Toutefois, sa formulation est lourde et peu parlante.

REFERENCES. -

(1) C.A. ROGERS, Hausdorff Measures, Cambridge University Press (1970).

(2) K. KURATOWSKI, Topology II, Academic Press (1966).

B. JACQUOT
14, rue C. Monier
13800 ISTRES