PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DENISE BECCHIO

Deux définitions des algèbres de Heyting trivalentes involutives

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 39-44
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_39_0>

...ications du
...partement de
...athématiques
...on 1978 t. 15-1

DEUX DEFINITIONS DES ALGEBRES DE HEYTING TRIVALENTES INVOLUTIVES

par Denise BECCHIO

INTRODUCTION. Dans (2) L.Iturrioz définit une algèbre de Heyting trivalente involutive (A.H.T.I.) comme étant une algèbre de Heyting trivalente munie d'une négation de De Morgan, c'est-à-dire une algèbre de Heyting (ou "pseudo-boolean algebra" (4)) dans laquelle l'égalité

$T_3 = ((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_0) \Rightarrow (((x_0 \Rightarrow x_1) \Rightarrow x_0) \Rightarrow x_0) = 1$, correspondant à l'axiome d'Ivo Thomas (6), est vérifiée, ainsi que les lois de De Morgan.

Dans le même travail elle caractérise les A.H.T.I. comme des algèbres de Lukasiewicz trivalentes munies d'un automorphisme involutif α et nous allons utiliser cette caractérisation pour donner une définition équationnelle des A.H.T.I. à partir d'un treillis de Kleene (1).

De plus elle donne des A.H.T.I. une définition à partir d'un treillis de Stone (3) qui n'est pas équationnelle et nous nous proposons ici de simplifier cette définition et de la rendre équationnelle.

Nous donnons également les démonstrations d'indépendance de la plupart des axiomes utilisés dans ces deux définitions, le problème d'indépendance de trois d'entre eux restant ouvert.

DEFINITION 1. *Un système* $(A,1,\wedge,\vee,N,M,\alpha)$ *formé par un ensemble non vide* A , *un élément* 1 *de* A , *deux opérations binaires* $\wedge$ *et* $\vee$ *définies sur* A *et trois opérations unaires* N , M *et* α *définies sur* A *est une algèbre de Heyting trivalente involutive* (AHTI) *si les axiomes suivants sont vérifiés :*

H1. $x \wedge (x \vee y) = x$

H2. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

H3. $x = NNx$

H4. $N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$

H5. $(x \wedge Nx) \wedge (y \vee Ny) = x \wedge Nx$

H6. $Nx \vee Mx = 1$

H7. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

H8. $\alpha(x \vee y) = \alpha x \vee \alpha y$

H9. $x = \alpha\alpha x$

H10. $\alpha(Nx) = N\alpha x$

D'après H1 - H7 , $(A,1,\wedge,\vee,N,M)$ est une algèbre trivalente de Lukasiewicz (1) , en abrégé une AL_3, et possède par conséquent toutes les propriétés d'une telle structure.

Il suffit donc de démontrer que cette algèbre trivalente de Lukasiewicz est symétrique, c'est-à-dire que l'opérateur unaire α défini par H8 - H10 est un automorphisme involutif de A (2).

Ecrivons d'abord les propriétés d'une AL_3 qui nous serviront par la suite:

P1. $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$

P2. $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$

P3. $x \vee (x \wedge y) = x$

P4. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

A partir des axiomes H1 - H10 nous pouvons établir les théorèmes suivants:

T1. $\alpha(x \wedge y) = \alpha x \wedge \alpha y$

En utilisant H3, H4, H10 et H8 on vérifie facilement que

$\alpha(x \wedge y) = \alpha N(Nx \vee Ny) = N\alpha(Nx \vee Ny) = N(\alpha Nx \vee \alpha Ny) = N(N\alpha x \vee N\alpha y) = \alpha x \wedge \alpha y$.

T2. $\alpha 1 = 1$

D'après H8, on a $\alpha(\alpha x \vee 1) = \alpha\alpha x \vee \alpha 1$, soit encore en utilisant P2 et H9 $\alpha 1 = x \vee \alpha 1$. On a donc $x \leqslant \alpha 1$ quel que soit x et en particulier $1 \leqslant \alpha 1$. 1 étant le plus grand élément dans une AL_3, T2 est bien démontré.

T3. $M\alpha x = \alpha Mx$

1. $\alpha(Nx \vee Mx) = \alpha 1$	H6
2. $N\alpha x \vee \alpha Mx = 1$	1.H8.H10.T2.
3. $\alpha(x \wedge Nx) = \alpha(Nx \wedge Mx)$	H7.
4. $\alpha x \wedge N\alpha x = N\alpha x \wedge \alpha Mx$	3.T1.H10.
5. $\alpha x \wedge N\alpha x = N\alpha x \wedge M\alpha x$	H7.
6. $N\alpha x \wedge M\alpha x = N\alpha x \wedge \alpha Mx$	5.4.
7. $M\alpha x \vee (M\alpha x \wedge N\alpha x) = M\alpha x \vee (N\alpha x \wedge \alpha Mx)$	6.
8. $M\alpha x = (M\alpha x \vee N\alpha x) \wedge (M\alpha x \vee \alpha Mx)$	7.P3.P4.
9. $N\alpha x \vee M\alpha x = 1$	H6.
10. $\alpha Mx \leqslant M\alpha x$	8.9.P1.
11. $\alpha Mx \vee (N\alpha x \wedge M\alpha x) = \alpha Mx \vee (N\alpha x \wedge \alpha Mx)$	6.
12. $(\alpha Mx \vee N\alpha x) \wedge (\alpha Mx \vee M\alpha x) = \alpha Mx$	11.P3.P4.
13. $M\alpha x \leqslant \alpha Mx$	2.12.P1.
14. (T3)	10.13.

D'après H8 - H10, T1, T2 et T3, α est bien un automorphisme involutif de A. Ainsi les axiomes H1 - H10 définissent bien une A.H.T.I. (2).

Nous allons démontrer l'indépendance des axiomes H1 - H9.

Indépendance de H1 - H7 :
Il suffit de se reporter à l'article (1) et de poser dans $T_1 - T_7$: $\alpha x = x$ pour tout x de $T_1 - T_7$.

Indépendance de H8 :
Soit T_8 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 (1) mais dans lequel on pose $N1 = 0$, $Na = b$, $Nb = a$, $N0 = 1$, $Mx = x$ pour tout x de T_8 , $\alpha 1 = 0$, $\alpha a = a$, $\alpha b = b$ et $\alpha 0 = 1$.
Les axiomes H1 - H7, H9 et H10 sont vérifiés dans T_8 alors que l'axiome H8 ne l'est pas car $\alpha(1 \vee a) = \alpha 1 = 0$ et $\alpha 1 \vee \alpha a = 0 \vee a = a \neq 0$.

Indépendance de H9 :
Soit T_9 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 (1) mais dans lequel on pose $N1 = 0$, $Na = b$, $Nb = a$, $N0 = 1$, $Mx = x$ pour tout x de T_9 , $\alpha 1 = 1$, $\alpha a = 0$, $\alpha b = 1$ et $\alpha 0 = 0$.
Les axiomes H1 - H8 et H10 sont vérifiés dans T_9 alors que l'axiome H9 ne l'est pas car $\alpha\alpha a = \alpha 0 = 0 \neq a$.
Le problème de l'indépendance de l'axiome H10 reste ouvert.

Dans (2) L.Iturrioz démontre le théorème suivant :
" Pour qu'un treillis distributif A ayant un plus petit et un plus grand élément 0 et 1 soit une AHTI il faut et il suffit que sur A on puisse définir deux opérations unaires $\neg$ et $\sim$ satisfaisant aux égalités :

¬1) $x \wedge \neg x = 0$

¬2) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

¬3) $\neg 0 = 1$

N1) $\sim\sim x = x$

N2) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

¬N) si $\neg x = \neg y$ et $\neg\sim x = \neg\sim y$ alors $x = y$ "

Nous allons démontrer l'équivalence de cette caractérisation des A.H.T.I. avec la définition équationnelle suivante:

DEFINITION 2. *Un système* $(A,1,0,\wedge,\vee,\neg,\sim)$ *formé par un ensemble non vide* A , *deux éléments* 1 *et* 0 *de* A , *deux opérations binaires* $\wedge$ *et* $\vee$ *définies sur* A *et deux opérations unaires* $\neg$ *et* $\sim$ *définies sur* A *est une algèbre de Heyting trivalente involutive* (AHTI) *si les axiomes suivants sont vérifiés* :

I1. $x \wedge (x \vee y) = x$

I2. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

I3. $x \vee 1 = 1$

I4. $x \wedge \neg x = 0$

I5. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

I6. $\neg 0 = 1$

I7. $\sim\sim x = x$

I8. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

I9. $(x \wedge \sim\neg\sim x) \wedge (y \vee \neg y) = x \wedge \sim\neg\sim x$

D'après I1 et I2, $(A,\wedge,\vee)$ est un treillis distributif (5) et possède par conséquent toutes les propriétés d'une telle structure. Par suite d'après I3, 1 est le plus grand élément.

Dans un treillis distributif on a $x \vee (x \wedge y) = x$ donc en particulier, d'après I4, $x \vee (x \wedge \neg x) = x \vee 0 = x$ et par suite 0 est le plus petit élément.

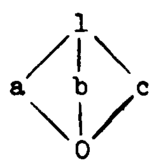
Inversement les axiomes I1, I2 et I3 sont bien vérifiés dans un treillis distributif ayant un plus grand élément 1.

Les axiomes $\neg 1)$, $\neg 2)$, $\neg 3)$, N1) et N2) sont identiques aux axiomes I4 - I8. Il suffit donc de démontrer l'équivalence de $\neg$N) et de I9.

D'après (3) les axiomes $\neg 1)$, $\neg 2)$ et $\neg 3)$ (ou I4 - I6) caractérisent un treillis de Stone. Ceux-ci sont en fait des treillis doublement de Stone (7) pour les lois $\neg$ et $\sim\neg\sim$. En effet:
D'après $\neg 1)$ (ou I4), on a $\sim x \wedge \neg\sim x = 0$ soit encore d'après $\neg 2)$ et N1) (ou I8 et I7) $x \vee \sim\neg x = \sim 0$. Or 0 est le plus petit élément, 1 est le plus grand élément et $\sim$ est une négation de De Morgan, donc $\sim 0 = 1$. Par suite $x \vee \sim\neg x = 1$.
$\sim$ étant une négation de De Morgan on a $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.
En utilisant cette propriété et $\neg 2)$ et N2) (ou I5 et I8) on obtient facilement le résultat suivant: $\sim\neg\sim(x \vee y) = \sim\neg\sim x \wedge \sim\neg\sim y$.
Enfin, d'après N1) et $\neg 3)$ (ou I7 et I6) on a $\sim\neg\sim 1 = 0$.

La démonstration donnée par Varlet ((8) Théorème 2 p.466), bien qu'utilisant des notations différentes de celles utilisées ici, prouve l'équivalence de $\neg$N) et de I9 dans un treillis doublement de Stone..Notre définition 2 est donc bien équivalente à la caractérisation des A.H.T.I. donnée par L.Iturrioz.

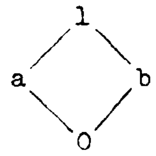
Nous allons démontrer l'indépendance des axiomes I2, I4 - I9, le problème de l'indépendance des axiomes I1 et I3 restant ouvert.
Indépendance de I2 :
Soit T_2 le treillis non distributif dont le diagramme est



Dans T_2 on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = b$, $\sim a = c$, $\neg b = c$, $\sim b = b$, $\neg c = a$, $\sim c = a$
$\neg 0 = \sim 0 = 1$.

Indépendance de I4 :

Soit T_4 le treillis distributif dont le diagramme est



Dans T_4 on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = 1$, $\sim a = b$, $\neg b = a = \sim b$ et $\neg 0 = \sim 0 = 1$.

Les axiomes I1 - I3, I5 - I9 sont vérifiés dans T_4 alors que l'axiome I4 ne l'est pas car $a \wedge \neg a = a \wedge 1 = a \neq 0$.

Indépendance de I5 :

Soit T_5 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = 0$, $\sim a = a$, $\neg b = a$, $\sim b = b$ et $\neg 0 = \sim 0 = 1$.

Les axiomes I1 - I4 , I6 - I9 sont vérifiés dans T_5 alors que l'axiome I5 ne l'est pas car $\neg(a \wedge b) = 0 = 1$ et $\neg a \vee \neg b = 0 \vee a = a \neq 1$.

Indépendance de I6 :

Soit T_6 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = 0$, $\sim a = a$, $\neg b = a$, $\sim b = b$, $\neg 0 = a$, $\sim 0 = 1$.

Les axiomes I1 - I5, I7 - I9 sont vérifiés dans T_6 alors que l'axiome I6 ne l'est pas.

Indépendance de I7 :

Soit T_7 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = b$, $\sim a = 1$, $\neg b = \sim b = a$, $\neg 0 = \sim 0 = 1$.

Les axiomes I1 - I6, I8, I9 sont vérifiés dans T_7 alors que l'axiome I7 ne l'est pas car $\sim\sim a = 0 \neq a$.

Indépendance de I8 :

Soit T_8 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais dans lequel on pose $\neg 1 = 0$, $\neg a = b$, $\neg b = a$, $\neg 0 = 1$ et $\sim x = x$ pour tout x de T_3 .

Les axiomes I1 - I7, I9 sont vérifiés dans T_8 alors que l'axiome I8 ne l'est pas car $\sim(a \wedge b) = a \wedge b = 0$ et $\sim a \vee \sim b = a \vee b = 1$.

Indépendance de I9 :

Soient 1, a, b, 0 quatre éléments distincts. Soit T_9 la chaîne

dans laquelle on pose $\neg 1 = \sim 1 = 0$, $\neg a = \neg b = 0$, $\sim a = b$, $\sim b = a$, $\neg 0 = \sim 0 = 1$.

T_9 est un treillis distributif dans lequel les axiomes I1 - I8 sont vérifiés alors que l'axiome I9 ne l'est pas car $(a \wedge \sim\neg\sim a) \wedge (b \vee \neg b) = (a \wedge 1) \wedge (b \vee 0) = a \wedge b = b \neq a$.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) BECCHIO D. , Sur les définitions des algèbres trivalentes de Lukasiewicz données par A.Monteiro, *Logique et Analyse* 63-64 (1973) p.339-344.

(2) ITURRIOZ L., Algèbres de Heyting trivalentes involutives, *Notas de Lógica matemática* n°32, Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1974.

(3) MATSUMOTO K., On a lattice relating to the intuitionistic logic, *Jour. Osaka Inst. of Scie. and Tech.* vol. 2, n°1-2 (1950) p.97-107.

(4) RASIOWA H. and SIKORSKI R., The mathematics of metamathematics, Warszawa, 1963.

(5) SHOLANDER M., Postulates for distributive lattices, *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951) p.28-30.

(6) THOMAS I., Finite limitations on Dummett's LC, *Notre Dame Jour. Formal Log.* 3 (1962) p.170-174.

(7) VARLET J.C., Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, *Bull. de la Soc. Royale des Sc. de Liège,* 36e année, n°9-10 (1968) p.399-408.

(8) VARLET J.C., Considérations sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes, *Bull. de la Soc. Royale des Sc. de Liège*, 38e année, n°9-10 (1969) p.462-469.

D.BECCHIO

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE