PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

BERNARD JACQUOT

Groupes engendrés par des ensembles compacts Lebesgue-négligeables

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 1
, p. 97-108
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_97_0>

© Université de Lyon, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

blications du
partement de
athématiques
on 1978 t. 15-1

GROUPES ENGENDRES PAR DES ENSEMBLES COMPACTS LEBESGUE - NEGLIGEABLES

par Bernard JACQUOT

1. Nous étudions ici une classe $\mathcal{K}$ particulière d'ensembles compacts de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels). Dans le paragraphe 1, nous caractérisons la nullité de la dimension de Hausdorff de $K \in \mathcal{K}$ (notée dim K dans la suite) en fonction de la structure du groupe additif engendré par f(K), f étant une certaine fonction réelle.

Le paragraphe 2 contient deux exemples, l'un d'un compact $K \in \mathcal{K}$ de dimension de Hausdorff non nulle, mais engendrant un groupe d'intérieur vide, l'autre d'un compact de dimension de Hausdorff nulle, mais engendrant $\mathbb{R}$, au sens de la théorie des groupes.

Je remercie M. Talagrand, qui est l'auteur du second exemple du paragraphe 2 des encouragements et de l'aide qu'il m'a fournis pour la rédaction de ce travail.

NOTATIONS. - Les ensembles de nombres réels, rationnels, entiers relatifs et naturels seront désignés respectivement par $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Si (C_i) est un recouvrement ouvert d'un espace métrique E et si diam C_i est le diamètre de C_i, on note $\mu^{(a)}(E)$ la mesure de Hausdorff d'ordre a de E, soit

$$\mu^{(a)}(E) = \lim_{\delta \to 0} \inf \{\sum_i (\operatorname{diam} C_i)^a \mid E \subset \bigcup C_i, \operatorname{diam} C_i \leq \delta\} .$$

Cela permet de définir $\dim E = \inf \{ a \mid \mu^{(a)}(E) = 0\}$.

L sera la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

$|I|$ désignera, pour abréger, le diamètre du pavé I de $\mathbb{R}^n$.

§.1.2. - Soit $\mathcal{K}$ la famille de compacts de $\mathbb{R}$ de la forme $K = \bigcap_n \bigcup_j F_n^j$, où les F_n^j sont des intervalles fermés possèdant les trois propriétés suivantes :

(1) Pour chaque n, la famille F_n^j est finie ; chaque F_n^j contient au moins deux F_{n+1}^k et chaque F_{n+1}^k appartient à un F_n^j.

(2) Il existe A, ne dépendant que de K, tel que pour tous F_{n+1}^k et F_{n+1}^l inclus dans F_n^j

$$\nu(F_{n+1}^l, F_{n+1}^k) = \inf\{|x-y|,\ x\in F_{n+1}^l,\ y\in F_{n+1}^k\} \geqslant A|F_n^j|.$$

(3) Il existe B ne dépendant que de K tel que pour tout n

$$\sup_i |F_n^i| \leqslant B \inf_j |F_n^j|.$$

Introduisons d'autre part les notations

$$T_oX = X\ ;\quad T_{k+1}X = \{x-y\ \ x,y \in T_kX\}.$$

$$TX = \bigcup_k T_kX \text{ est le groupe additif engendré par } X.$$

LEMME. - *Supposons que $X \subset \mathbb{R}$ (X n'est pas ici nécessairement compact) ait une dimension de Hausdorff nulle. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous α et ε positifs, il existe un recouvrement dénombrable de X par des intervalles $F_{i\varepsilon}$ vérifiant*

$$\sup_i |F_{i\varepsilon}| \leqslant M \inf_j |F_{j\varepsilon}|, \text{ et } \quad \sum_i |F_{i\varepsilon}|^{\alpha} < \varepsilon.$$

Alors $L(TX) = 0$.

DEMONSTRATION. - (a) Soit p un entier quelconque. Nous allons montrer que $\mu^{(1)}(X^p) = 0$. Considérons, pour ε donné, le recouvrement $(F_{i\varepsilon})$ tel que $\sum_i |F_{i\varepsilon}|^{1/p} < \varepsilon$. L'ensemble des pavés $F_{i_1\varepsilon}\times\ldots\times F_{i_p\varepsilon}$ recouvre X^p et, si N désigne le nombre de $F_{i\varepsilon}$:

$$\mu^{(1)}(X^p) \leq \sum_{i_1 \dots i_p} |F_{i_p\varepsilon} \times \dots \times F_{i_p\varepsilon}| \leq \sup |F_{i\varepsilon}| N^p \leq M \inf |F_{i\varepsilon}| N^p.$$

Ainsi $\mu^{(1)}(X^p) \leq M\{\sum_i |F_{i\varepsilon}|^{1/p}\}^p \leq M\ \varepsilon^p$.

(b). $T_p X$ est l'image de X^p par une certaine fonction Λ linéaire à coefficients entiers. Si d_p désigne la distance euclidienne de l'espace à p dimensions,

$$|\Lambda(x_1 \dots x_p) - \Lambda(y_1 \dots y_p)| \leq H_p d_p((x_1 \dots x_p),(y_1 \dots y_p))$$

H_p dépendant de Λ et de p. Ainsi (voir (1), p. 53)

$$H_p \mu^{(1)}(X^p) > L(\Lambda X^p) \Rightarrow L(T_p X) = 0.$$

Comme p est quelconque, le lemme est démontré.

3. - THEOREME. - *Si* $K \in \mathcal{K}$ *et* $\dim K = 0$, *alors* $L(TK) = 0$.

DEMONSTRATION. - (a) Soit F_n^j la suite des intervalles constituant K. Nous démontrons d'abord que dim K = 0 si, et seulement si, pour tout α il existe une suite d'entiers n_k tendant vers l'infini avec k telle que

$$\lim_k \sum_j |F^j_{n_k}|^\alpha = 0.$$

En effet, si cela est faux, il existe un réel D > 0 tel que pour tout n

$$\sum_j |F^j_n|^\alpha \geq D.$$

Si, pour calculer la mesure de Hausdorff de K, on se restreint à ne prendre que des intervalles F_n^j pour le recouvrir, on obtient une nouvelle mesure $M^{(\alpha)}$ telle que (voir (2)).

$$\mu^{(\alpha)}(K) \geq A^\alpha M^{(\alpha)}(K).$$

Soit K' le sous-compact de K, obtenu en choisissant dans chaque F_n^j de l'étape n, retenu pour constituer K', deux, et deux seulement F^k_{n+1}, qui sont retenus pour constituer l'étape n+1 de la construction de K'.

On voit d'abord que, si N(n) désigne le nombre d'intervalles constituant l'étape n du recouvrement de K :

$$\sum_j |F_n^j|^\alpha \leqslant N(n)\ B^\alpha \inf_i |F_n^i|^\alpha \quad ;$$

donc pour tout h, $|F_n^h|^\alpha \geqslant D\ B^{-\alpha} / N(n)$.

D'autre part, la condition (2) de la définition de $\mathcal{K}$ nous assure que, pour un certain E > 0, $N(n) \leqslant E^n$.

Posons $G = E^{\beta/\alpha}$. Si l'on considère un recouvrement de K' par des intervalles F_n^j, mais n'appartenant pas forcément tous à la même étape n, on obtient une suite $\mathcal{G}$ d'intervalles, d'où la somme approchant $M^{(\beta)}(K')$:

$$\sum_{F_n^j \in \mathcal{G}} |F_n^j|^\beta \geqslant D^{\beta/\alpha}\ B^{-\beta} \sum_k S_k\ G^{-k} .$$

où S_k est le nombre d'éléments de l'étape k choisis pour figurer dans $\mathcal{G}$.

Soit $(k_o, k_1, \ldots, k_m)$ la suite de ces valeurs de k ; soient T_{k_i} le nombre d'intervalles $F_{k_i}^j$ de l'étape k_i , qui ont servi pour générer des intervalles de l'étape $k_i + t_{m-i}$, immédiatement supérieure à k_i et intervenant dans $\mathcal{G}$.

Nous voyons que

$$\begin{cases} S_{k_m} = 2^{t_1}\ T_{k_m - t_1} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{k_m - t_1 - \ldots - t_{j-1}} + S_{k_m - t_1 - \ldots - t_{j-1}} = 2^{t_j}\ T_{k_m - t_1 - \ldots - t_j} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{k_o} + S_{k_o} = 2^{k_o} . \end{cases}$$

Donc $\sum_j S_{k_m - \sum_{u<j} t_u}\ 2^{\sum_{u<j} t_u} = 2^{k_m}$, donc $\sum_k S_k\ 2^{-k} = 1$.

Si l'on choisit β tel que $G < 2$, alors, avec $A' = D^{\beta/\alpha} B^{-\beta}$:

$$\sum_{F_n^j} |F_n^j|^\beta > A' \sum_k S_k G^{-K} \geq A' \sum_k S_k 2^{-k} = A'.$$

Il découle de ceci que $M^{(\beta)}(K')$ n'est pas nul, non plus que $\mu^{(\beta)}(K')$ non plus que, par conséquent, dim K.

Pour terminer, il suffit de dire que si l'on peut trouver une suite n_k telle que $\lim_k \sum_j |F^j_{n_k}|^\alpha = 0$, alors évidemment dim $K < \alpha$.

(b) Donc si dim K = 0, pour tous α et ε positifs, il existe un recouvrement F_n^j, appartenant à la même étape n, tel que $\sum_j |F_n^j|^\alpha < \varepsilon$
Les conditions imposées dans la définition de $\mathcal{K}$ nous assurent que le lemme du n°2 s'applique et que L(TK) = 0.

4. - Soit $\mathcal{P}$ la sous-classe de $\mathcal{K}$ dont les éléments $K = \bigcap_n \bigcup_j F_n^j$ vérifient la condition supplémentaire :

Il existe $C > 0$ tel que pour tout n, tout j et tout F^k_{n+1} contenu dans F_n^j, on ait $F^k_{n+1} \geqslant C|F_n^j|$.

LEMME. - *Si* $K \subset \mathcal{P}$, *il contient* $K' \in \mathcal{P}$, *égal à* $\bigcap_n \bigcup_J G_n^j$, *de telle sorte que* G_n^j *contient deux, et deux seulement* G^k_{n+1} *et que si* $G_n^j = [a,b]$, *alors* $G^k_{n+1} = [a\ c_1]$ et $G^{k+1}_{n+1} = [c_2, b]$.

DEMONSTRATION. - On forme d'abord K" de la même façon que K, excepté que pour passer de l'étape n de sa construction à l'étape n+1, on choisit parmi les F_n^j selectionnés pour former l'étape n de K" deux, et deux seulement F^k_{n+1} pour former l'étape n+1. On remplace ensuite F_n^j par G_n^j, qui est un intervalle fermé contenu dans F_n^j dont les extrémités gauche et droite sont respectivement l'inf et le sup des points de K'' contenus dans F_n^j. Alors $K' = \bigcap_n \bigcup_j G_n^i$.

Sachant que F_n^j, retenu pour l'étape n de K'', s'est scindé en F_{n+1}^k et F_{n+1}^{k+1} et que F_{n+1}^k, lui-même retenu, s'est scindé en F_{n+2}^h, et F_{n+2}^{h+1} on voit que G_{n+1}^k contient un point de F_{n+2}^h et un point de F_{n+2}^{h+1}.

Cette remarque permet de voir facilement que $K' \in \mathcal{F}$.

5. - LEMME. - *Soient* I_j^i (i=1,2 et j=1,s) *des intervalles fermés de* R , ***disjoints*** *à* j *donné, de milieux respectifs* m_j^i *tels que* $m_j^2 > m_j^1$. *Soient*

$H = \prod_{k=1}^{s} (I_k^1 \cup I_k^2)^{a_k}$ et $p = a_1 + \ldots + a_s$. *Alors la projection de* H *sur* ***la droite*** D *d'équation* $x_1 = \ldots = x_p$ (x_i *étant la* i*-ième coordonnée de* $\mathbb{R}^p$) *contient* **p+1** *intervalles, deux consécutifs d'entre eux ayant leurs milieux espacés* ***d'au*** *plus* $\sup_i (m_i^2 - m_i^1)\, p^{-1/2}$.

DEMONSTRATION. - Soit $H_{h_1 \ldots h_s} = \prod_{i=1}^{s} (I_i^1)^{a_i - h_i} x (I_i^2)^{h_i}$.

La projection de H sur D contient les projections, deux à deux disjointes, de p+1 ensembles $H_{h_1 \ldots h_s}$ dont le centre se projette sur D en un point d'abscisse, le long de cette droite :

$$\left(\sum_i (a_i - h_i) m_i^1 + h_i m_i^2 \right) p^{-1/2} .$$

puisque cette abscisse est égale à la distance de l'origine des coordonnées à l'hyperplan perpendiculaire à D d'équation

$$\sum_i x_i = \sum_i (a_i - h_i) m_i^1 + h_i m_i^2 .$$

On part ainsi de $H_{o \ldots o}$, puis pour obtenir un nouvel $H_{h_1 \ldots h_s}$, on incrémente de 1 le premier des indices h_i qui soit inférieur à a_i, et on va jusqu'à $H_{a_1 \ldots a_s}$. Il suffit ensuite de comparer les abscisses le long de D des projections des centres de deux $H_{h_1 \ldots h_s}$ consécutifs.

6. - THEOREME. - *Si* $K \in \mathcal{T}$, *alors* $TK = \mathbb{R}$.

DEMONSTRATION. - D'après le lemme du n° 5, K contient un compact K', limite décroissante de $\bigcup_j G_n^j$, avec les notations du n° 4. Soit D la droite d'équation $x_1 = \ldots = x_p$ dans R^p. La projection de $(\bigcup_j G_n^j)^p$ contient des ensembles du type $\prod_j (G_n^j)^{a_j}$ avec $\sum_j a_j = p$; à l'étape n+1 ils deviennent

$$\prod_j (G_{n+1}^{k(j)} \cup G_{n+1}^{k(j)+1})^{a_j}.$$

D'après le lemme du n° 5, un tel ensemble a une projection sur D contenant p+1 intervalles, dont les milieux de deux quelconques consécutifs d'entre eux sont espacés au plus de $\sup_j |G_n^j|\, p^{-1/2}$ (puisque G_n^j contient G_{n+1}^k et G_{n+1}^{k+1}) ; cet espacement maximum est par suite inférieur à $B\, p^{-1/2} \inf_j |G_n^j|$.

D'autre part, l'amplitude d'un intervalle projection est d'au moins $\inf_j |G_{n+1}^{k(j)}|\, p^{+1/2} \geq A\, C\, p^{1/2} \inf_j |G_n^j|$.

Il suffit donc de choisir p supérieur à B / (AC) pour être sûr que la projection de $(\bigcup_j (G_{n+1}^{k(j)} \cup G_{n+1}^{k(j)+1}))^p$ est identique à la projection de $(\bigcup_j G_n^j)^p$.

Soit $K_n = \bigcup_j F_n^j$. Soit Λ la forme linéaire qui associe à un point de R^p sa projection sur D. On voit que, pour tout n : $\Lambda((K_n)^p)$ contient $G_1^1 = [a,b]$. Posons $\sum_i x_i = \Lambda'(x_1 \ldots x_p)$. Alors, pour tout n $\Lambda'((K_n)^p) \subset T_p K_n$ et $[ap^{1/2}, bp^{1/2}] \subset \Lambda'((K_n)^p)$. Comme K est compact, $T_p K = \lim_n \downarrow T_p K_n$. Ainsi TK = R.

7. - THEOREME. - *Soient* $K = \bigcap_n \bigcup_j F_n^j$ et $K \in \mathcal{K}$. *La dimension de Hausdorff de* K *est nulle si, et seulement si,* L(TfK)=0 *pour toute fonction réelle Lipschitzienne* **f**.

DEMONSTRATION. - (a) . La démonstration du lemme du n° 2 nous dit que si dim K = 0, alors $\mu^{(1)}(FK^p) = 0$ pour tout p, F étant la fonction de K^p dans $\mathbb{R}^p$ qui associe $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$ à $(x_1, \ldots, x_p)$, f lipschitzienne. Donc $L(T_p fK) = 0$ pour tout p.

(b). - Si dim K $\neq$ 0, le n° 3 nous apprend qu'il existe des réels positifs E et e tels que $F_n^j \geqslant e\,E^{-n}$. Donnons nous d'abord K' $\subset$ K de le même façon et avec les mêmes notations que dans le (a) de la démonstration du théorème du n° 3. Associons à K' le compact J formé de la manière suivante :

- $J_0^1 = [0,1]$.
- J_n^j donne naissance, si a et b sont ses extrémités, à

$J_{n+1}^k = [a, a+E(b-a)]$ et $J_{n+1}^{k+1} = [b-E(b-a), b]$.

- $J = \bigcap_n \bigcup_{j \leqslant 2^n} F_n^j$.

On suppose ensuite que les F_n^j donnant naissance à K' sont numérotés de façon similaire aux J_n^j , c'est-à-dire que F_0^1 donne naissance à F_1^1 et F_1^2 , celui-ci étant à droite de celui-là, etc. On associe à $x = \bigcap_n F_n^{j(x)}$ le point $f(x) = \bigcap_n J_n^{j(x)}$. Alors TfK=R, par le n° 6, puisque fK $\in \mathcal{P}$. f est d'autre part Lipschitzienne puisque, A signifiant la même chose qu'au n° 3 :

$$|x_2 - x_1| \geqslant A|F_n^j| \geqslant A\,e\,E^{-n} \geqslant A\,e\,|f(x_2) - f(x_1)| .$$

Dans ces inégalités, n représente la plus grande des étapes q telles que x_2 et x_1 appartiennent au même intervalle F_q^j .

§ 2, 8, - Soit (n_i) une suite d'entiers telle que $n_{i+1} - n_i$ tende vers l'infini avec i. Soit K le compact formé de la façon suivante :

- $K_0^1 = [0,1]$.
- $K_n^j = [a,b]$ donne naissance à $K_{n+1}^k = [a, a+(b-a)/3]$ et

$K_{n+1}^{k+1} = [b-(b-a)/3, b]$ tant que $n < n_1 - 1$.

$- K_{n_1-1}^{j} = [c,d]$ donne naissance à $[c, c+4^{-n_1}]$ et $[d-4^{-n_1}, d]$.

Et ainsi de suite ; alors $|K_{n_i}^{j}| = 4^{-n_i}$ et entre n_i et $n_{i+1}-1$ la décomposition de $K_{n_i}^{j}$ est identique à la décomposition de $[0,1]$ lors des $n_{i+1}-n_i$ premières étapes de la construction de l'ensemble ternaire de Cantor.

Il est clair que $K \in \mathcal{K}$ et que $\dim K \neq 0$. Nous allons démontrer que TK est d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle. En effet, supposons que TK contient un intervalle.

D'abord $- K = \{-x,\ x \in K\} = K-1 = \{x-1,\ x \in K\}$. Il existe p tel que $L(T_pK) \neq 0$ et, d'après un théorème de Steinhaus (qui dit que l'ensemble des distances des points de deux ensembles de mesure positive, contient un intervalle ; voir (3)) $T_{2p}K$ contient un intervalle $[a,b]$. Or $T_{2p}K = K+\ldots+K-p$ donc $S_{2p}K = \left\{ \sum_{i \leq 2p} x_i\ ,\ x_i \in K \right\}$ contient un intervalle. Cela veut donc dire que la projection de K^{2p} sur la droite D_{2p} d'équation $x_1 = \ldots = x_{2p}$ (x_i sont les axes de coordonnées de $\mathbb{R}^{2p}$) contient un intervalle $[\alpha, \beta]$. Mais α ne peut être nul, puisque $\lim_i \left(|K_{n_i}^{j}| \ / \ |K_{n_i-1}^{j}| \right) = 0$. (En effet, si $K_{n_i}^{j_o}$ est l'intervalle de l'étape n_i qui contient 0, l'intervalle immédiatement contigu à la projection de $(K_{n_i}^{j_o})^{2p}$ sur D_{2p} sera obtenu en projetant un intervalle du type

$$(K_{n_i}^{j_o})^{p_1} \times K_{n_i}^{j_o+1} \times (K_{n_i}^{j_o})^{p_2}$$

et ces intervalles seront disjoints pour i assez grand). De la même façon, on voit que la projection sur D_{4p} de K^{4p} contient $[\alpha_1, \beta_1]$ avec $\alpha_1 \neq 0$.

Mais alors, il existe t_o tel que $[0,t]^{2p} \cap K^{2p}$ se projette, pour tout $t < t_o$ en un ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur D_{2p}. Cela signifie donc que la projection de K^{2p} sur D_{2p} a une mesure nulle, puisque K^{2p} est réunion d'ensembles, tous identiques à un $[0,t]^{2p} \cap K^{2p}$, en nombre fini.

Cette contradiction nous indique que TK est d'intérieur vide, puisque sa mesure de Lebesgue est nulle.

9. - Cet exemple montrera qu'il existe un compact de dimension de Hausdorff nulle engendrant R.

Posons $A_o = [0,1]$.

$$A_1 = [0,1/n_1] \cup \bigcup_{k_1 \leq n_1} [k_1/n_1, k_1/n_1 + 1/(n_1 n_2)]$$

....

De façon générale, A_{2p} étant choisi, il est de la forme $A_{2p} = B_{2p} \cup C_{2p}$.

B_{2p} est réunion d'intervalles de la forme

$$[b, b+1/(n_1 n_2 \ldots n_{2p+1})]$$

C_{2p} est réunion d'intervalles de la forme

$$[c, c+1/(n_1 n_2 \ldots n_{2p})]$$

Alors $A_{2p+1} = B_{2p+1} \cup C_{2p+1}$, avec $B_{2p+1} = B_{2p}$, et chaque intervalle constituant C_{2p} est transformé en

$$\bigcup_{k \leq n_{2p+1}} [c+k/(n_1 n_2 \ldots n_{2p+1}), c+k/(n_1 n_2 \ldots n_{2p+1}) + 1/(n_1 \ldots n_{2p+2})] .$$

Puis $A_{2p+2} = B_{2p+2} \cup C_{2p+2}$, avec $C_{2p+2} = C_{2p+1}$, et chaque intervalle constituant B_{2p+1} est transformé en

$$\bigcup_{k \leq n_{2p+2}} \left[b+k/(n_1\ldots n_{2p+2}), b+k/(n_1\ldots n_{2p+2}) + 1/(n_1\ldots n_{2p+3})\right] .$$

Posons $A = \bigcap_n A_n$. Nous montrons d'abord par récurrence que $A_n+A_n = \{x+y,\ x,y \in A_n\}$ contient toujours $[0,1]$.

C'est vrai au départ. Supposons que, à l'étape n, tout x soit dans A_n+A_n ; c'est-à-dire que si, par exemple n=2p, et si x est somme d'un élément de B_{2p} et d'un élément de C_{2p}, il existe a, b, θ_1, θ_2, tous compris entre 0 et 1 tels que :

$x=a+b+\theta_1/P_1 + \theta_2/P$, avec les notations

$$P=1/(n_1\ldots n_{2p}) \ ; \ P_1 = P/n_{2p+1} \ ; \ P_2 = P_1/n_{2p+2} .$$

Ce même x de $[0,1]$ appartiendra à $A_{2p+1} + A_{2p+1}$ si, par exemple, on peut trouver $k \leq n_{2p+1}$ et α, $\alpha' \in [0,1]$ tels que

$$\theta_1/P_1 + \theta_2/P = k/P_1 + \alpha/P_1 + \alpha'/P_2$$

On choisit $\alpha = \theta_1$; les domaines de variation de k et de α' nous apprennent que l'égalité est réalisable.

De la même façon, on traiterait les cas où x est somme d'éléments de C_{2p} et de C_{2p}, puis les cas où n=2p+1.

Ainsi, A étant compact, cela prouve que $A+A \supset [0,1]$.

Evaluons maintenant la dimension de Hausdorff de A. Supposons A_{2p} choisi Prenons comme recouvrement (I_l) celui qui est déterminé par la construction récurrente de A_{2p+2} :

$$\sum_l |I_l|^{d_p} = n_2 n_4 \ldots n_{2p+2}/(n_1 n_2 \ldots n_{2p+3})^{d_p} +$$
$$+ \; n_1 n_3 \ldots n_{2p+1}/(n_1 n_2 \ldots n_{2p+2})^{d_p} \; ,$$

en posant $d_p = 1/(2p+2)$.

On peut choisir n_{2p+2} assez grand pour que, au 2-ème membre de l'égalité ci-dessus, le 2-ème terme de la somme soit plus petit que $1/(4p+4)$; on peut ensuite choisir n_{2p+3} assez grand pour que

$$\sum_l |I_l|^{d_p} \leqslant 1/(2p+2).$$

Ce la signifie que dim A = 0.

REFERENCES. -

(1) C.A. ROGERS , Hausdorff measures, Cambridge University Press, 1970.

(2) A.F. BEARDON, On the Hausdorff dimension of general Cantor sets, Proc. Camb. Math. Soc. , vol. 61 (1965), p. 679.

(3) H. STEINHAUS, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, Fund. Math., vol. 1, p. 93.