PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

M. CHAMARIE
G. GERMAIN
A. BOUVIER

# À propos d'un théorème de Mori-Nagata

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 31-35
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_31_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-3

# A PROPOS D'UN THEOREME DE MORI-NAGATA

par M. CHAMARIE - G. GERMAIN - A. BOUVIER

La clôture intégrale d'un anneau noethérien intègre est un anneau de Krull. La démonstration de ce théorème de Mori-Nagata est une conséquence du théorème de Cohen sur la structure des anneaux locaux complets. Nous en donnons ici une démonstration qui ne fait appel qu'à des considérations élémentaires.

**§ 1.** Soient A un anneau noethérien intègre et A' sa clôture intégrale. Si A est de dimension 1, l'anneau A' est de Dedekind et tout anneau entre A et A' est noethérien (théorème de Krull-Akisuki). Si A est de dimension 2, l'anneau A' est noethérien mais il peut exister entre A et A' des anneaux non noethériens [7] . Si A est de dimension supérieure ou égale à 3, l'anneau A' n'est pas nécessairement noethérien [7] mais Krull avait conjecturé qu'un tel anneau est, ce que l'on nomme aujourd'hui, un anneau de Krull [2] . Cette conjecture fut établie par Mori (1953) lorsque A est un anneau local, puis globalisée par Nagata (1955).

Leurs démonstrations et celles que l'on trouve dans la littérature (voir par exemple, [2, chap. 2], [4] , [5] , [7] ) reposent sur le théorème de structure des anneaux locaux complets (Cohen).

En 1976, Nishimura [8] proposa une démonstration utilisant le fait qu'un anneau local complet est hensélien. En 1977, Querre [9] et [10] eut l'idée de remplacer les propriétés des anneaux locaux complets ou des anneaux henséliens par un résultat de Matijevic (1976) sur le transformé global d'un anneau noethérien [6] et d'utiliser une proposition de Brewer et Heinzer [3] que nous rappelons au § 2.

Enfin, Chamarie fit remarquer qu'il était possible de combiner ces derniers ingrédients avec un lemme complétant le résultat de Brewer et Heinzer pour obtenir la démonstration brève et simple présentée ici et qui reprend, pour l'essentiel, les idées de J. Querré [10] . Le lecteur s'assurera aisément que les lemmes 1 et 2 rappelés ci-dessous sont de nature élémentaire.

§ 2. Soient A un anneau noethérien intègre et K son corps des fractions. *Le transformé global de* A est l'anneau noté $A^g$ des éléments $x \in K$ pour lesquels il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et des idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ de A tels que $x(\mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_s)^{\alpha} \subset A$.

LEMME 1 (Matijevic [6] ). - *Soit* A *un anneau noethérien intègre ; tout anneau compris entre* A *et son transformé global* $A^g$ *est un anneau noethérien.*

On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-anneau de K vérifie la *propriété de caractère finie* si pour tout $x \in K^*$ , l'ensemble des $i \in I$ tels que x ne soit pas inversible dans $A_i$ est un ensemble fini.

LEMME 2. (Brewer et Heinzer [3, Prop. 4 ] ). - *Soient* A *un anneau noethérien intègre et* P *l'ensemble des idéaux premiers associés aux idéaux principaux non nuls de* A *; alors* $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} A_{\mathfrak{p}}$ *et la famille* $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in P}$ *vérifie la propriété de caractère fini.*

**LEMME** 3 (Chamarie). - *Soient A un anneau noethérien intègre, A' sa clôture intégrale et P l'ensemble des idéaux premiers de A associés aux idéaux principaux non nuls de A ; alors* $A' = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} A'_{\mathfrak{p}}$ *et la famille* $(A'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in P}$ *vérifie la propriété de caractère fini.*

**DEMONSTRATION.** - Il est clair, compte tenu du lemme 2, que la famille $(A'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in P}$ vérifie la propriété de caractère fini. Soit $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} A'_{\mathfrak{p}}$ et soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ les $\mathfrak{p} \in P$ tels que $x \notin A_{\mathfrak{p}}$ (lemme 2). Pour tout $i \in [1,n]$, il existe $a_i \in A$ tel que $a_i x^m \in A_{\mathfrak{p}_i}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ ; alors $ax^m \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} A_{\mathfrak{p}} = A$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $x \in A'$.

□

## § 3. THEOREME DE MORI-NAGATA.

*Soit A un anneau noethérien intègre. Sa clôture intégrale A' est un anneau de Krull.*

**DEMONSTRATION.** - D'après le lemme 3 et [2, prop. 1.5.4.], il suffit de prouver ce résultat lorsque A est un anneau noethérien local ; il suffit donc [1, cor. 11.11] de le montrer pour les anneaux noethériens de dimension finie. Soit A un tel anneau ; on fait la démonstration par récurrence sur n = dim A. Le résultat est vrai si n = 1 (théorème de Krull-Akizuki) ; on le suppose établi pour tout anneau noethérien de dimension < n. Soit A un anneau noethérien de dimension n ; d'après le lemme 3 et [2, prop. 1.5.4], on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Considérons l'anneau $R = A^g \cap A'$. Il est noethérien (lemme 1), entier sur A et R' = A'. Il est semi-local car l'anneau $R/\mathfrak{m}R$ est entier sur le corps $A/\mathfrak{m}$ donc artinien. De plus puisque dim R = dim A = n $\geqslant$ 2, R possède au moins un idéal maximal non inversible. En effet un anneau noethérien intègre dont tous les idéaux maximaux sont inversibles est de dimension inférieure ou égale à un : si $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(R)$ est inversible alors $\mathfrak{M}R_{\mathfrak{M}}$ est aussi inversible dans $R_{\mathfrak{M}}$ ;

soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de $R_{\mathfrak{m}}$ ; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}^n R_{\mathfrak{m}}$ et $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}^{n+1} R_{\mathfrak{m}}$ d'où $\mathfrak{p}\mathfrak{m}^{-n} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R_{\mathfrak{m}}$ et $\mathfrak{p}\mathfrak{m}^{-n} R_{\mathfrak{m}} \not\subseteq \mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$ donc $\mathfrak{p}\mathfrak{m}^{-n} R_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$, soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^n R_{\mathfrak{m}}$ et donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$ ce qui prouve que $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}} = 1$. **Soient** $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux non inversibles de R. Pour tout $i \in [1,r]$, **on a** $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i (R : \mathfrak{m}_i) \subseteq R$, donc $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i (R : \mathfrak{m}_i)$, d'où $R : \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i : \mathfrak{m}_i \subset R'$ **car** $\mathfrak{m}_i$ **est** un idéal de type fini. Or par définition du transformé global,
$R : \mathfrak{m}_i \subset R : \mathfrak{m} \subset A^g : \mathfrak{m} \subset A^g$ ; donc $R : \mathfrak{m}_i \subset R' \cap A^g = R$ et par conséquent
$R : \mathfrak{m}_i = R$.

Soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i$ ; on a $R : \mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{r} (R : \mathfrak{m}_i) = R$. Puisque R est noethérien, l'idéal $\mathfrak{a}$ est de type fini ; écrivons $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{s} x_j R$. L'égalité $R : \mathfrak{a} = R$ implique $R : \mathfrak{a}^n = R$ pour tout $n \geq 1$ et

$$R = \bigcup_{n \geq 1} R : \mathfrak{a}^n = \bigcap_{j=1}^{s} R_{x_j} \quad \text{où } R_{x_j} = R[x_j^{-1}] \text{ ; alors } R' = \bigcap_{j=1}^{s} R'_{x_j}$$

**et il suffit** de prouver que les $R'_{x_j}$ sont des anneaux de Krull. Compte tenu de l'hypothèse **de** récurrence, il suffit de vérifier que $\dim R_{x_j} < n$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ tel que $x_j \notin \mathfrak{p}$ ; deux cas sont possibles :

- $\mathfrak{p}$ est strictement contenu dans l'un des $\mathfrak{m}_i$ ; alors $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \mathrm{ht}(\mathfrak{m}_i) \leq n$ ;
- $\mathfrak{p}$ est contenu dans un idéal maximal inversible et $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ ;

ceci achève la démonstration.

□

REMARQUES. - 1) En utilisant le théorème de structure des anneaux locaux complets, on peut également démontrer que [2, chap. 2] :

. $A \to A'$ est à fibres finies ;

. étant donné $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A')$, soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ ; alors $[B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} : A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}]$ est fini.

Nishimura [8] obtient ces deux propriétés en utilisant à nouveau les anneaux henséliens. *Peut-on en donner une démonstration "élémentaire" ?*

2) J. Querré appelle anneau de Mori tout anneau intègre dont l'ensemble des idéaux divisoriels vérifie la condition de chaîne ascendante et demande : *"étant donné un anneau de Mori A, sa clôture intégrale est-elle un anneau de Krull ?*

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] M. F. ATYAH, I.G. MAC DONALD, Introduction to commutative algebra university of Oxford, 1969.

[2] A. BOUVIER et G. GERMAIN, Anneaux de Krull, Chap. 1 et 2, (1978), U.E.R. de Math., 43, bd du 11 novembre 1918 VILLEURBANNE.

[3] J.W. BREWER et W.J. HEINZER, Associated primes, Duk. Math. J., 41 (1974), 1 7.

[4] R. FOSSUM, The divisor class group of a Krull domain, Springer-Verlag, 1973.

[5] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE, Eléments de géométrie algèbrique IV, première partie, Pub. Math. I.H.E.S., n° 20, 1964.

[6] J.R. MATIJEVIC, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc., 54, (1976), 49-52.

[7] M. NAGATA, Local rings, Interscience n° 13, New York, 1962.

[8] J. NISHIMURA, Note on the integral closures of a noetherian integral domain. J. Math. Kyoto Univ. 16-1, (1976), 117-122.

[9] J. QUERRE, Sur les anneaux complètement intégralement clos. Preprint distribué au séminaire Malliavin, 1977.

[10] J. QUERRE, Sur un théorème de Mori-Nagata, C.R. Acad. Sc. Paris, 285, A, (1977), 323-324.



**Département de Mathématiques**
**Université Claude Bernard**
**43 bd du 11 novembre 1918**
**69621 VILLEURBANNE**