

ALI DEAIBES

Mesures sur les espaces uniformes de type (σ_1^∞)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 63-73

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_63_0

© Université de Lyon, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES SUR LES ESPACES UNIFORMES DE TYPE (σ_1^∞)

ALI DEAIRES

RESUME.

Suite à l'article [4], donnant une description des espaces uniformes de type (σ_α^∞) , on étudie ici les espaces de formes linéaires m sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X)$] des fonctions numériques uniformément continues [resp. et bornées] sur un espace uniforme X de type (σ_α^∞) , qui sont bornées sur la boule unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ et qui vérifient la condition de commutation $m(\sum_i f_i) = \sum_i m(f_i)$ pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, qui est discrète [resp. et uniformément bornée] et indexée par un ensemble I de cardinal strictement inférieur à χ_α .

INTRODUCTION.

On considère des espaces uniformes séparés (X, μ) , où la structure uniforme μ est définie par une famille de recouvrements $\mathcal{V} = (V_Y)_{Y \in L}$. Soit $D(X, \mu) = D(X)$ l'ensemble des écarts d sur X qui sont μ -uniformément continus et soit $\mathcal{U}(X, \mu) = \mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X, \mu) = \mathcal{U}^\infty(X)$] l'espace vectoriel [resp. l'algèbre] des fonctions réelles uniformément continues [resp. et bornées] sur (X, μ) .

Une famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties de X est dite discrète s'il existe un écart $d \in D(X)$ tel qu'elle soit discrète dans l'espace (X, d) (on dira aussi qu'elle est d -discrète). Parallèlement une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions dans $\mathcal{U}(X)$ est dite discrète lorsque la famille des conoyaux $(\text{Coz}(f_i))_{i \in I}$ est discrète.

En suivant [4], on dit que l'espace uniforme (X, μ) est de type (σ_α^∞) si pour toute famille discrète $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, de cardinal $\text{card } I < \chi_\alpha$, la fonction $f = \sum_i f_i$ est élément de $\mathcal{U}(X)$.

Pour un espace uniforme (X, μ) de type (σ_α^∞) , on dit qu'une forme linéaire m sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$] est α -additive lorsque pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ qui est discrète [resp. et uniformément bornée], de cardinal $\text{card } I < \chi_\alpha$, on a $m\left(\sum_i f_i\right) = \sum_i m(f_i)$. Pour $\alpha = 1$, on dit plus simplement que les formes linéaires 1-additives sont σ -additives.

On désigne par $\mathcal{M}_\alpha(X, \mu) = \mathcal{M}_\alpha(X)$ [resp. $\mathcal{M}^\infty(X, \mu) = \mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$] l'espace vectoriel des formes linéaires m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X)$] qui sont à la fois α -additives et bornées sur la boule unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$.

On dit encore qu'une partie simplement bornée H de $\mathcal{U}(X)$ vérifie la propriété (P) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (V_\gamma)_{\gamma \in L}$ de μ tel que, pour tout indice $\gamma \in L$, il existe un recouvrement $\mathcal{U}^\gamma = (U_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$ de μ tel que toute fonction $f \in H$ varie au plus de ε sur chaque partie $V_\gamma \cap U_\beta^\gamma$. L'ensemble des parties H vérifiant (P) est noté $\mathcal{H}_p(X, \mu) = \mathcal{H}_p$ tandis que l'ensemble des parties uniformément bornées de \mathcal{H}_p est noté \mathcal{H}_p^∞ .

On rappelle qu'on désigne classiquement par $\mathcal{H}(X, \mu) = \mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}^\infty(X, \mu) = \mathcal{H}^\infty$] l'ensemble des parties H de $\mathcal{U}(X)$ qui sont simplement bornées [resp. uniformément bornées] et uniformément équi-continues. Il est clair que l'on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}_p^\infty$, et que \mathcal{H}_p et \mathcal{H}_p^∞ sont stables par passage à l'enveloppe disquée.

A chaque espace uniforme (X, μ) on associe diverses structures uniformes et divers espaces de mesures. Sans vouloir être exhaustif, et pour nous limiter à ceux qui interviendront ici, citons pour bien préciser les définitions :

a) La structure uniforme $\sigma\mu$ de la convergence simple sur $\mathcal{U}(X)$, appelée structure uniforme affaiblie de μ .

b) La structure uniforme $p\mu$ définie par les recouvrements finis de μ , donnant comme complété l'espace compact \widehat{pX} , appelé compactifié de Samuel de (X, μ) .

c) Pour tout ordinal α , la structure uniforme $D_c^\alpha \mu$ ayant pour base les recouvrements de μ , de cardinal strictement inférieur à χ_α , et qui sont d'ordre fini [5]. Pour un espace uniforme de type (σ_α^∞) on a l'égalité $D_c^1 \mu = \sigma \mu$ [4].

d) L'espace $M_\sigma(X)$ des formes linéaires σ -régulières m sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, c'est-à-dire telles que $m(f_n) \rightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f_n \rightarrow 0$.

e) L'espace $M_\cup(X)$ des formes linéaires σ -régulières sur $\mathcal{U}(X)$.

f) L'espace $M^\infty(X)$ des formes linéaires sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ dont les restrictions aux éléments $H \in \mathcal{H}^\infty$ sont simplement continues.

g) L'espace $M(X)$ des formes linéaires sur $\mathcal{U}(X)$ dont les restrictions aux éléments $H \in \mathcal{H}$ sont simplement continues.

h) L'espace $\text{Rad}(\widehat{pX})$ des mesures de Radon sur le compact \widehat{pX} , et l'espace $\check{M}(X)$ des mesures $m \in \text{Rad}(\widehat{pX})$ dont le support est contenu dans le complété $\widehat{X} = (X, \mu)^\wedge$.

Ces définitions nécessaires étant rappelées, l'essentiel de l'article est consacré à la démonstration des propriétés suivantes :

A) Soit X un espace uniforme de type (σ_α^∞) . L'espace $\mathcal{M}_\alpha(X)$ [resp. $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$] est exactement l'espace des formes linéaires m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$] dont les restrictions aux éléments $H \in \mathcal{H}_p(D_c^\alpha \mu)$ [resp. $H \in \mathcal{H}_p^\infty(D_c^\alpha \mu)$] sont simplement continues. Autrement dit, on a les égalités $\mathcal{M}_\alpha(X) = M(X, D_c^\alpha \mu)$ et $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) = M^\infty(X, D_c^\alpha \mu)$.

B) Soit X un espace uniforme de type (σ_1^∞) . L'espace $\mathcal{M}_1(X)$ [resp. $\mathcal{M}_1^\infty(X)$] est exactement l'espace des formes linéaires m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$] telles que $m(f_n) \rightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ [resp. de $\mathcal{U}^\infty(X)$] qui décroît faiblement uniformément localement vers zéro.

C) La propriété B), comparable à la propriété de σ -régularité, lui est en fait équivalente pour les espaces uniformes de type (A) [3], en particulier pour les espaces topologiques complètement réguliers identifiés aux espaces uniformes fins.

1. LES ESPACES $\mathcal{M}_\alpha(X)$ ET $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$.

Commençons par un lemme technique.

(1.1) LEMME. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_α^∞) . Soient $(g_\gamma)_{\gamma \in L}$ et $(h_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$, $\gamma \in L$, des partitions uniformément équi continues de l'unité telles que chacune d'elles soit réunion finie de familles discrètes de cardinal $< \chi_\alpha$. Alors pour toute $f \in \mathcal{U}(X)$, qui est bornée sur les conoyaux $\text{Coz}(g_\gamma)$, et pour toute $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ on a les égalités :

$$f = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} f g_\gamma h_\beta^\gamma \quad \text{et} \quad m(f) = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma).$$

PREUVE. - Chaque fonction $f g_\gamma h_\beta^\gamma$ est élément de l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$. Fixons une partition finie $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ de L , où chaque famille $(g_\gamma)_{\gamma \in L_k}$ est discrète. On a alors :

$$f = f \cdot \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma = \sum_k f \left(\sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma \right) = \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} f g_\gamma = \sum_{\gamma \in L} f g_\gamma.$$

Par le même raisonnement on a, pour chaque $\gamma \in L$, $g_\gamma = \sum_{\beta \in L^\gamma} g_\gamma h_\beta^\gamma$, de sorte qu'en définitive on a $f = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} f g_\gamma h_\beta^\gamma$. D'autre part la condition $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ garantit que :

$$m(f) = m \left(f \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma \right) = \sum_k m \left(f \sum_{\gamma \in L_k} g_\gamma \right) = \sum_k \sum_{\gamma \in L_k} m(f g_\gamma) = \sum_{\gamma} m(f g_\gamma)$$

et pour chaque $\gamma \in L$:

$$m(f g_\gamma) = \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma)$$

ce qui fournit, en rassemblant, l'égalité $m(f) = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f g_\gamma h_\beta^\gamma)$. \square

On tire de là :

(1.2) THEOREME. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_α^∞) . alors toute forme linéaire $m \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ est simplement continue sur toute partie $H \in \mathcal{H}_p(D_c^\alpha \mu)$.

PREUVE. - Supposons H disque et considérons une suite généralisée $(f_i)_{i \in I}$ de H tendant simplement vers zéro. Fixons $\epsilon > 0$ et associons à ϵ des recouvrements $\mathcal{V} = (V_\gamma)_{\gamma \in L}$ et $\mathcal{U}^\gamma = (U_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$, de la structure uniforme $D_C^\alpha \mu$, répondant aux conditions de la définition de la propriété P pour la structure uniforme $D_C^\alpha \mu$, et tels que chacun d'eux soit réunion finie de familles discrètes de cardinal $< \chi_\alpha$. Considérons des partitions uniformément équi continues de l'unité subordonnées respectivement aux recouvrements \mathcal{V} et \mathcal{U}^γ , $\gamma \in L$, et notés $(g_\gamma)_{\gamma \in L}$ et $(h_\beta^\gamma)_{\beta \in L^\gamma}$. Alors pour tout indice $i \in I$ on a, avec le lemme :

$$f_i = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} f_i g_\gamma h_\beta^\gamma \quad \text{et} \quad m(f_i) = \sum_{\gamma} \sum_{\beta \in L^\gamma} m(f_i g_\gamma h_\beta^\gamma).$$

Introduisons l'ensemble M des couples (γ, β) tels que $V_\gamma \cap U_\beta^\gamma \neq \emptyset$ et fixons pour chaque $(\gamma, \beta) \in M$ un point $x_{\gamma\beta} \in V_\gamma \cap U_\beta^\gamma$. Introduisons encore les nombres, pour $(\gamma, \beta) \in M$:

$$t_{\gamma\beta}^i = f_i(x_{\gamma\beta}), \quad i \in I$$

$$t_{\gamma\beta} = \sup_{f \in H} \|f\|_{V_\gamma \cap U_\beta^\gamma}$$

et rappelons que, m étant bornée sur le disque unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, on peut supposer $\|m\| = \sup_{f \in \Delta} |m(f)| \leq 1$.

$$\text{Alors les fonctions } g_i = \sum_{(\gamma, \beta) \in M} t_{\gamma\beta}^i g_\gamma h_\beta^\gamma \text{ et } g = \sum_{(\gamma, \beta) \in M} t_{\gamma\beta} g_\gamma h_\beta^\gamma$$

sont éléments de $\mathcal{U}(X)$ et

$$m(g_i) = \sum_{(\gamma, \beta) \in M} t_{\gamma\beta}^i m(g_\gamma h_\beta^\gamma) \quad \text{et} \quad m(g) = \sum_{(\gamma, \beta) \in M} t_{\gamma\beta} m(g_\gamma h_\beta^\gamma)$$

Il résulte de là que la famille $(t_{\gamma\beta} |m(g_\gamma h_\beta^\gamma)|)_{(\gamma, \beta) \in M}$ est sommable,

d'où l'on tire l'existence d'une partie finie $J \subset M$ telle que

$$\sum_{(\gamma, \beta) \notin J} t_{\gamma\beta} |m(g_\gamma h_\beta^\gamma)| \leq \epsilon.$$

Par ailleurs on a $\|f_i - g_i\| \leq \epsilon$ pour chaque $i \in I$, d'où $|m(f_i)| \leq \epsilon + |m(g_i)|$. Mais la condition $|t_{\beta\gamma}^i| < t_{\beta\gamma}$ pour chaque $i \in I$ donne aussitôt :

$$\begin{aligned} |m(g_i)| &\leq \overline{\sum_{(\gamma, \beta) \in J} |t_{\gamma\beta}^i m(g_\gamma h_\beta^\gamma)|} + \overline{\sum_{(\gamma, \beta) \notin J} t_{\gamma\beta} |m(g_\gamma h_\beta^\gamma)|} \\ &\leq \varepsilon + \overline{\sum_{(\gamma, \beta) \in J} |t_{\gamma\beta}^i|}. \end{aligned}$$

En résumé, on obtient l'inégalité, pour chaque $i \in I$

$$|m(f_i)| \leq 2\varepsilon + \overline{\sum_{(\gamma, \beta) \in J} |f_i(x_{\gamma\beta})|}$$

et il ne reste plus qu'à choisir un indice $i_0 \in I$ tel que l'on ait $\overline{\sum_{(\gamma, \beta) \in J} |f_i(x_{\gamma\beta})|} \leq \varepsilon$ pour tout $i \geq i_0$, pour pouvoir conclure à la condition $|m(f_i)| \leq 3\varepsilon$ pour $i \geq i_0$, ce qui termine tout. \square

En reprenant la preuve mot pour mot en remplaçant l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ par l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$ et la famille $\mathcal{H}_p(D_c^\alpha \mu)$ par la famille $\mathcal{H}_p^\infty(D_c^\alpha \mu)$ on obtient :

(1.3) THEOREME. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_α^∞) . Alors toute forme linéaire $m \in \mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$ est simplement continue sur toute partie $H \in \mathcal{H}_p^\infty(D_c^\alpha \mu)$.

On a vu dans l'introduction les inclusions $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}_p^\infty$, de sorte que les théorèmes (1.2) et (1.3) donnent les inclusions $\mathcal{M}_\alpha(X) \subset M(X, D_c^\alpha \mu)$ et $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) \subset M^\infty(X, D_c^\alpha \mu)$ pour les espaces X de type (σ_α^∞) . En fait on a même :

(1.4.) THEOREME. - Pour tout espace uniforme (X, μ) de type (σ_α^∞) on a les égalités (au sens algébrique et non pas au sens uniforme)

a) $\mathcal{M}_\alpha(X) = M(X, D_c^\alpha \mu)$;

b) $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) = M^\infty(X, D_c^\alpha \mu)$.

En particulier, pour $\alpha = 1$, on a $\mathcal{M}_1(X) = M(X, \sigma\mu)$ et $\mathcal{M}_1^\infty(X) = M^\infty(X, \sigma\mu)$.

PREUVE. - Il suffit de démontrer l'inclusion $M(X, D_c^\alpha \mu) \subset \mathcal{M}_\alpha(X)$. Or, fixons $m \in M(X, D_c^\alpha \mu)$. On sait déjà [3], que m est bornée sur le

disque unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$. Pour le reste considérons une famille discrète $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, de cardinal $\text{card } I < \chi_\alpha$. La partie H de $\mathcal{U}(X)$, définie par l'ensemble des sommes finies $f_J = \sum_{i \in J} f_i$, est élément de $\mathcal{M}(X, D_c^\alpha \mu)$, de sorte que :

$$m(\sum f_i) = \lim_J m(f_J) = \lim_J \sum_{i \in J} m(f_i) = \sum_i m(f_i)$$

et tout est dit. L'égalité b) se démontre de la même manière. Le reste provient de l'égalité $D_c^1 \mu = \sigma_\mu$ déjà notée. \square

Les propriétés générales des espaces $M(X)$ et $M^\infty(X)$, [2], [7], fournissent donc le corollaire suivant :

(1.5) COROLLAIRE. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_α^∞) . L'espace $M_\alpha(X)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace $M_\alpha^\infty(X)$, l'identification se faisant en associant à chaque $m \in M_\alpha(X)$ sa restriction \bar{m} à l'algèbre $\mathcal{U}^\infty(X)$. En particulier pour qu'une forme linéaire $m \in M_\alpha^\infty(X)$ soit élément de $M_\alpha(X)$ il faut et il suffit que, pour toute $f \in \mathcal{U}(X)$, la suite $\bar{m}[(f \wedge k) \vee (-k)]$ ait une limite quand l'entier k tend vers $+\infty$

2. LES ESPACES $M_1(X)$ ET $M_1^\infty(X)$ ET QUELQUES APPLICATIONS

Introduisons la définition suivante :

(2.1) DEFINITION. - On dit qu'une suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ décroît faiblement uniformément localement vers zéro, ce qu'on note $f_n \rightarrow 0$ (s.u.l), s'il existe un recouvrement dénombrable $\mathcal{V} = (V_k)$ de σ_μ tel que la suite (f_n) décroisse uniformément vers zéro sur chaque partie V_k .

L'intérêt de cette notion apparaît dans l'énoncé suivant, relatif aux espaces de type (σ_1^∞) :

(2.2) PROPOSITION. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_1^∞) . Pour toute forme linéaire m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$], les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $m \in \mathcal{M}_1(X)$ [resp. $m \in \mathcal{M}_1^\infty(X)$] ;

b) On a $m(f_n) \rightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ [resp. de $\mathcal{U}^\infty(X)$] telle que $f_n \rightarrow 0$ ($\sigma.u.\ell$).

PREUVE. - a) \Rightarrow b) : Fixons $m \in \mathcal{M}_1(X)$ et la suite $f_n \rightarrow 0$ ($\sigma.u.\ell$) dans $\mathcal{U}(X)$. Alors la partie $H = \{f_n ; n \geq 1\}$ est élément de $\mathcal{H}_P(D_c^1 \mu)$, de sorte que $m(f_n) \rightarrow 0$ avec (1.3).

b) \Rightarrow a) : Fixons m vérifiant b) et prouvons déjà que m est bornée sur le disque unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$, en suivant le raisonnement de [3 ; p. 100] : sinon on pourrait construire une suite (g_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $0 \leq g_n \leq 2^{-n}$ et $|m(g_n)| = 2^n - 1$. Posons $h_n = \sum_{k \leq n} g_k$ et $h = \sum g_k$; alors la suite $f_n = h - h_n$ est élément de $\mathcal{U}^\infty(X)$ et $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur X , donc a fortiori $f_n \rightarrow 0$ ($\sigma.u.\ell$). On a donc $m(h_n) \rightarrow m(h)$, ce qui implique la contradiction $m(h) = +\infty$ puisque l'on a, pour tout n :

$$|m(h_n)| \geq 2^n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = n.$$

Pour voir que l'on a $m \in \mathcal{M}_1(X)$, fixons une suite discrète (f_n) de $\mathcal{U}(X)^+$. La suite $h_n = \sum_{k=1}^n f_k$, croît faiblement uniformément localement vers la fonction $h = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in \mathcal{U}(X)$. On en déduit que la suite $g_n = h - h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ est telle que $g_n \rightarrow 0$ ($\sigma.u.\ell$), d'où l'on tire aisément $m(h_n) \rightarrow m(h)$, ce qui termine tout. \square

Comme première application on a :

(2.3) PROPOSITION. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_1^∞) . Alors les deux espaces $\mathcal{M}_1(X)$ et $\mathcal{M}_1^\infty(X)$ sont engendrés par leur cône positif.

PREUVE. - Pour l'espace $\mathcal{M}_1^\infty(X) = M^\infty(X, \sigma_1)$ il s'agit d'une propriété valable pour tout espace $M^\infty(X)$ [3]. Pour l'espace $\mathcal{M}_1(X) = M(X, \sigma_1)$ on utilise le critère (4.4.3) de [3] selon lequel $M(X, \sigma_1)$ est engendré par son cône positif si et seulement si toute $m \in M(X, \sigma_1)$ est bornée sur chaque disque $\Delta(f) = \{g ; |g| \leq |f|\}$ de $\mathcal{U}(X)$, $f \in \mathcal{U}(X)$. Raisonnons par l'absurde en supposant m non bornée sur un disque $\Delta(f_0)$. Il existe alors une suite (f_n) de $\Delta(f_0)$ telle que $|m(f_n)| \geq n^2$. La partie $h = \left\{ \frac{f_n}{n}, n \geq 1 \right\}$ de $\mathcal{U}(X)$ est élément de $\mathcal{H}_P(D_c^1 \mu)$, d'où l'on tire $m\left(\frac{f_n}{n}\right) \rightarrow 0$, contrairement à l'inégalité $|m(f_n)| \geq n$. \square

(2.4) COROLLAIRE 1. - Pour tout espace uniforme (X, μ) de type (σ_α^∞) les espaces $\mathcal{M}_\alpha(X)$ et $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X)$ sont engendrés par leur cône positif.

PREUVE. - Il suffit de remarquer que $\mathcal{M}_\alpha(X) \subset \mathcal{M}_1(X)$ et $\mathcal{M}_\alpha^\infty(X) \subset \mathcal{M}_1^\infty(X)$ et d'utiliser le critère [3, (4.4.3)]. \square

(2.5.) COROLLAIRE 2. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (C) [3]. Alors l'espace $M(X)$ est engendré par son cône positif.

PREUVE. - On sait, avec [1], [3], que l'espace uniforme (X, σ_1) est de type (σ_1^∞) , de sorte que $\mathcal{M}_1(X, \sigma_1) = M(X, \sigma_1)$ est engendré par son cône positif. On en déduit, toujours avec le critère (4.4.3) de [3], que $M(X, \mu)$ l'est aussi. \square

(2.6) PROPOSITION. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (σ_α^∞) . Alors $M(X, \mu) = \check{M}(X, \mu)$, autrement dit l'espace (X, μ) est un B-espace [3].

PREUVE. - L'espace uniforme (X, μ) est de type (U.P) [4], de sorte que $M(X, \mu)^+ = \check{M}(X, \mu)^+$ d'après [3, (4.5.6) et (4.5.7)]. D'autre part (X, μ) est aussi de type (C), donc $M(X, \mu)$ est, d'après (2.5), engendré par son cône positif, d'où l'égalité $M(X) = \check{M}(X)$. \square

(2.7) COROLLAIRE. - Pour tout espace uniforme (X, μ) de type (σ_α^∞) on a $\mathcal{M}_\alpha(X) = \check{M}(X, D_c^\alpha \mu)$.

3. σ -REGULARITE ET σ -ADDITIVITE.

Une forme linéaire σ -régulière m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$] est toujours σ -additive, mais la réciproque est fautive en général même si m est positive. Pour le voir il suffit de considérer un espace uniforme précompact (X, μ) , qui est toujours de type (σ_1^∞) , et pour lequel $\mathcal{M}_1^\infty(X) = \mathcal{M}_1(X) = M^\infty(X) = \text{Rad}(\hat{p}X)$ est un espace qui diffère en général de $M_0(X)$.

On rappelle qu'un espace uniforme (X, μ) est dit de type (A) dans [3], et "inversion-closed" dans [6], si pour toute fonction strictement positive $f \in \mathcal{U}(X)$, la fonction $\frac{1}{f}$ est encore élément de $\mathcal{U}(X)$. D'après [3] on sait que tout espace de type (A) est de type (σ_1^∞) .

Cela étant, on a pour les espaces de type (A) :

(3.1) PROPOSITION. - Soit (X, μ) un espace uniforme de type (A). Pour toute forme linéaire m sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$], les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) m est σ -régulière sur $\mathcal{U}(X)$ [resp. sur $\mathcal{U}^\infty(X)$] ;
- b) On a $m(f_n) \rightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ [resp. de $\mathcal{U}^\infty(X)$] telle que $f_n \rightarrow 0$ (σ .u.l) ;
- c) m est σ -additive et bornée sur le disque unité Δ de $\mathcal{U}^\infty(X)$.

PREUVE. - On a déjà $b) \Rightarrow c)$ avec la proposition (2.2). Il suffit donc de prouver l'implication $c) \Rightarrow a)$. Grâce à la proposition (2.3) on peut supposer m positive. Si m est une forme linéaire sur $\mathcal{U}(X)$ le résultat se déduit de [3, (4.5.9)]. Si m est une forme linéaire sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, le résultat se déduit de (1.4) et de la caractérisation des espaces uniformes de type (A) donnée dans [8] sous la forme suivante : Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f_n \rightarrow 0$, la partie $H = \{f_n ; n \geq 1\}$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ est élément de $\mathcal{H}^\infty(X, \mu)$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. AZZAM, *Mesures sur les espaces uniformes*, Prépublications univ. Saint-Etienne, 2, 1974, 53 p.
- [2] J. BERRUYER et B. IVOL, *Espaces de mesures et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 1-36.
- [3] A. DEAIBES, *Espaces uniformes et espaces de mesures*, Publ. Dép. Math. Lyon, 12-4, 1975, p. 1-66.
- [4] A. DEAIBES et R. PUPIER, *Sur la sommabilité de familles de fonctions uniformément continues*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 18-4 (1977), p. 741-753.
- [5] Z. FROLIK, *Three technical tools in uniform spaces*, Seminar uniform spaces 1973-1974, Prague (1975), p. 1-26.
- [6] J. PACHL, *Free uniform measures on sub-inversion closed spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 17-2, 1976, p. 291-306.
- [7] J. PACHL, *Free uniform measures*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 15-3, 1974, p. 541-553.
- [8] M. ZAHRADNIK, *Inversion closed uniform spaces have the Daniell property*, Seminar uniform spaces, 1973-1974, Prague (1975), p. 233-234.

Ali DEAIBES
Faculté des Sciences
Université libanaise
HADATH-BEYROUTH
Liban