PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. B. DELIFER

G. MAURY

Un exemple de domaine de Krull non commutatif au sens de Marubayashi borné qui n'est ni noethérien, ni un R-ordre de Fossum

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 4 , p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_4_49_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-4

UN EXEMPLE DE DOMAINE DE KRULL NON COMMUTATIF AU SENS DE MARUBAYASHI BORNE QUI N'EST NI NOETHERIEN, NI UN R-ORDRE DE FOSSUM

par J.B. DELIFER et G. MAURY

1. INTRODUCTION.

Marubayashi a introduit et étudié [8], [9] , [10] ,[11] la notion d'anneau de Krull non nécessairement commutatif. Avant de donner la définition de Marubayashi rappelons que, étant donnés une famille topologisante et idempotent $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche de l'anneau R et un R-module à gauche M, on note $\mathcal{F}M$ = $\mathcal{F}M = \{x | x \in M,\ \exists F \in \mathcal{F}$ avec $Fx = (o)\}$ et $M_{\mathcal{F}}$ l'enveloppe $\mathcal{F}$-injective du R-module à gauche $M/\mathcal{F}M$. On dira avec Marubayashi [8] que $\mathcal{F}$ définit une localisation essentielle si pour tout $I \in \mathcal{F}$ on a $R_{\mathcal{F}} I_{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{F}} R_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}$ et on dira alors que $R_{\mathcal{F}}$ est un localisé essentiel (à gauche) de l'anneau R. Marubayashi [8] donne la définition suivante :

Un anneau premier de Goldie R, dont l'anneau des fractions est noté Q, est un anneau de Krull non nécessairement commutatif s'il existe des familles $(R'_i)_{i \in I}$ et $(S_j)_{j \in J}$ de sous-anneaux de Q contenant R, localisés essentiels à droite et à gauche de R, vérifiant les propriétés suivantes :

K_1. $R = \bigcap_{i \in I} R'_i \bigcap_{j \in J} S_j$

K_2. Les R'_i sont des ordres d'Asano (par exemple [12]) semi-locaux (c'est-à-dire que J_i désignant le radical de Jacobson de R'_i l'anneau R'_i/J_i est artinien simple). L'ensemble J est fini et les S_j sont noethériens simples.

K_3. Tout élément régulier de R est inversible dans tous les R'_i sauf peut-être un nombre fini.

Dans le cas particulier ou l'ensemble J est l'ensemble vide, l'anneau R est dit régulier (ou borné). Marubayashi démontre qu'un anneau de Krull non nécessairement commutatif régulier (en abrégé AKR) est un ordre maximal régulier de son anneau des fractions Q (voir [12] et [8]).

Le but de cet article est de donner un exemple de AKR non commutatif, non noethérien, qui ne soit pas un R-ordre maximal au sens de Fossum [6] car un tel exemple manquait dans la littérature.

2. ENONCE DE L'EXEMPLE ET REMARQUES PRELIMINAIRES .

Köthe [7] a construit un corps non commutatif K' de rang infini sur son centre K tel que toute famille finie d'éléments de K' appartienne à un sous-corps de dimension finie sur son centre K (le même que celui de K'). Soient $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ des inconnues commutant entre elles et avec tout élément de K'. Posons $R = K'[X_i]_{i \in \mathbb{N}} = K'[X_1, X_2, \ldots]$. Nous allons démontrer que R constitue l'exemple annoncé à la fin de l'introduction.

Dans ce paragraphe faisons un certain nombre de remarques préliminaires :

Le centre de R est $A = K[X_i]_{i\in\mathbb{N}}$. Il est bien connu que A est un domaine de Krull. Posons $R_n = K'[X_1,\dots,X_n]$. C'est un anneau noethérien de corps des fractions Q_n et c'est un ordre maximal régulier de Q_n ([12] chapitre I) ; $R = \bigcup_{n\geqslant 1} R_n$ vérifie la condition de Ore par rapport à l'ensemble $\mathscr{C}(o)$ des éléments non nuls de R car si $c\in\mathscr{C}(o)$ et si $x\in R$, alors il existe $i\in\mathbb{N}$ avec c et x appartenant à R_i et on peut trouver c', $c''\in\mathscr{C}(o)\cap R_i$ et x', $x''\in R_i$ avec $cx' = xc'$ et $x''c = c''x$. Soit donc Q le corps des fractions de R. L'anneau R admettant un corps des fractions est premier, de Goldie. On a évidemment $Q = \bigcup_{n\geqslant 1} Q_n$. Il est facile de voir que R est entier sur A, R_n étant entier sur son centre $A_n=K[X_1,\dots,X_n]$, et que R n'est pas noethérien [la suite $RX_1\subseteq RX_1+RX_2\subseteq \dots$ n'est pas stationnaire car sinon pour un $n\in\mathbb{N}$ on aurait $X_n\in RX_1+\dots+RX_{n-1}$ ce qui est impossible comme on le voit en faisant $X_1=\dots=X_{n-1}=0$ et , $X_i=1$ pour $i > n$] . Le centre de Q est le corps des fractions de A c'est-à-dire $Q_o = K(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$: en effet Q_o est compris dans le centre de Q ; soit $\xi = g^{-1}f$ avec $f\in R$, $g\in R$; f et g appartiennent à un R_i, les coefficients de f et g appartiennent à un sous-corps Σ de K' de dimension finie sur son centre K ; f et g appartiennent donc à $\Sigma_i = \Sigma[X_1,\dots,X_i]$ de dimension finie sur son centre $A_i = K[X_1,\dots,X_i]$. D'après [12] chapitre I, c'est un A_i-ordre maximal classique dont on sait que le corps des fractions a pour centre le corps des fractions Q_i de A_i ; aussi ξ appartient à Q_i donc à Q_o et d'ailleurs on a $\xi = a^{-1}r$, $a\in A$, $r\in R$. Enfin Q n'est pas de dimension finie sur Q_o sinon il existerait des éléments f_ig^{-1} , $f_i\in R$, $g\in R$, $i=1,\dots,n$ tels que pour tout $k'\in K'$ on puisse écrire $k' = \sum_{i=1}^{n} k^{-1}k_if_ig^{-1}$ (n dépendant de k', ainsi que les éléments $k\in A$, $k_i\in A$), d'où $kk'g = \sum_{i=1}^{n} k_if_i$.

Les deux membres fonc intervenir seulement un nombre fini d'indéterminées ; égalons les coefficients du terme le plus haut (dans l'ordre lexicographique) dans les deux membres : on obtient, g_o et k_o désignant ces coefficients dans g et k respectivement, que $k'k_o g_o$ est combinaison linéaire à coefficient dans K des coefficients $f_{i\ell}$, $f_{i\ell} \in K'$, des polynômes f_i, donc que k' est combinaison linéaire à coefficients dans K des coefficients $f_{i\ell} g_o^{-1} \in K'$ et ceci prouve que K' est de dimension finie sur K : Contradiction ! Ainsi en particulier R ne peut être un R-ordre de Fossum.

Nous allons maintenant vérifier que l'anneau R est un AKR.

3. L'ANNEAU R EST UN AKR.

Nous gardons les notations du paragraphe précédent et démontrons un succession de points.

1°. Démontrons que R est un ordre maximal régulier de Q : on sait que R_i est un ordre maximal régulier de Q_i et on peut démontrer facilement que $Q_i \cap R = R_i$. Soit B un idéal bilatère non nul de R, et soit $x \in Q$ tel que $xB \subseteq B$. Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in Q_i$ et $B \cap R_i \neq (o)$ et $x(B \cap R_i) \subseteq B \cap Q_i \subseteq R \cap Q_i = R_i$ donc $x(B \cap R_i) \subseteq B \cap R_i$ On déduit de là $x \in R_i$ puisque R_i est un ordre maximal. Il en résulte $B \cdot\!\cdot B = \{x | x \in Q, xB \subseteq B\} = R$ et de même $B \cdot\!\cdot B = \{x | x \in Q, Bx \subseteq B\} = R$, et par suite R est un ordre maximal de Q, l'anneau R est un ordre régulier de Q car soit I un idéal à droite non nul de R on peut trouver i tel que $I' = I \cap R_i \neq (o)$, I' étant un idéal à droite non nul de R_i contient un idéal bilatère non nul B_i de R_i, puisque R_i est un ordre régulier de Q_i. Mais d'après [4] (4.4.1), B_i est engendré par des éléments de son centre A_i et il existe $u \neq o$, $u \in A_i$ tel que $I \supseteq Ru = uR$. On ferait la même démonstration pour un idéal à gauche non nul de R et R est bien un ordre régulier de Q.

On sait qu'alors tout c-idéal P premier [12] de R est un idéal premier non nul minimal de R(voir [12]). Etudions les c-idéaux premiers de R.

2 *Etude des c-idéaux premiers de* R *et de* R_n.

Soit I un idéal bilatère non nul de R, montrons d'abord que $I = R(I \cap A)$.

Soit $f \in I$ on a $f \in I_n = R_n \cap I$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$; [4] (4.4.1) prouve $I_n = R_n(I_n \cap A)$ et $f \in R(I \cap A)$ puis $I \subseteq R(I \cap A) \subseteq I$. Il en résulte aussi : $I, \mathfrak{J}$ idéaux bilatères de R, $I \cap A = \mathfrak{J} \cap A \Longleftrightarrow I = \mathfrak{J}$.

Soit P un idéal premier de A tel que $p = P \cap A$ est un c-idéal premier de A ; si Q est un idéal premier non nul de R,(1) $q = Q \cap A$ est un idéal premier non nul de A donc on a $q = p$ et $Q = P$. Aussi P est un c-idéal premier de R. Réciproquement si P est un c-idéal premier de R, démontrons que $p = P \cap A$ est un c-idéal premier de A. En effet soit q un idéal premier de A, non nul, contenu dans p ; il existe un idéal premier Q de R tel que $Q \cap A = q$ d'après Blair [3] car R est entier sur A. On a $Q = Rq \subsetneq P$ et $Q = P$.

Soit p un c-idéal premier de A et soit λ un élément non nul de p, λ appartient à un A_i et comme l'anneau A_i est factoriel on a $\lambda = \alpha \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{p_i}$ où α est un élément inversible de A_i et les λ_i des éléments irréductibles de A_i.

Un élément irréductible de A_i est irréductible dans tous les A_ℓ $\ell > i$ donc aussi dans A (vérification facile). Il est facile de vérifier que A est un anneau factoriel ; ainsi $A\lambda_i$ est un idéal premier de A pour $i = 1,\dots,r$ et de $\alpha \prod_{i=1}^{r} A\lambda_i^{p_i} \subseteq p$ on déduit $A\lambda_i \subsetneq p$ pour un i donc $A\lambda_i = p$. Ainsi on a $R\lambda_i = Rp = P$.

(1) avec $Q \subseteq P$

Réciproquement on voit facilement que pour tout élément irréductible λ de A (donc d'un anneau A_i pour un entier i) $R\lambda$ est un c-idéal premier de R.

On peut reprendre les raisonnements précédents en remplaçant R par R_i et A par A_i. En particulier les c-idéaux premiers P_i de R_i sont les $R_i\lambda$ où λ parcourt l'ensemble des éléments irréductibles de A_i. Si P est un c-idéal premier de R, on a $P = R\lambda_i$, λ_i irréductible de A_i. Si P est un c-idéal premier de R, on a $P = R\lambda_i$, λ_i irréductible dans A_i, donc $P = R(R_i\lambda_i) = RP_i$ en posant $P_i = R_i\lambda_i$.

Démontrons l'égalité $P\cap R_k = P_k = R_k\lambda_i$ pour $k \geq i$ et $P = R\lambda_i$, λ_i élément irréductible de A_i. Soit $\mu \in P\cap A_k$ on a $\mu = \lambda'\lambda_i$, $\lambda' \in R$ et on peut prendre λ' dans R_k (faire $X_j = o$ pour $j \geq k$ dans les deux membres de l'égalité $\mu = \lambda'\lambda_i$) ; d'ailleurs λ_i appartient à A_k. Ainsi on a $P\cap A_k = A_k\lambda_i$ et $P\cap R_k = R_k(P\cap A_k) = R_kA_k\lambda_i = R_k\lambda_i = P_k$. Remarquons que si P_i est un c-idéal premier de R_i donc de la forme $P_i = R_i\lambda_i$, λ_i élément irréductible dans A_i, on a $P_{i+k} = R_{i+k}\lambda_i = P_iR_{i+k} = R_{i+k}P_i$.

3 . Notons $\mathcal{C}(P) = \{c \mid c \in R,\ x \in R,\ cx \in P \Rightarrow x \in P\}$ pour P c-idéal premier de R et de même $\mathcal{C}(P_i) = \{c \mid c \in R_i, x \in R_i\ cx \in P_i \Rightarrow x \in P_i\}$ pour P_i c-idéal premier de R_i. On a $P = R\lambda_j$ pour un entier naturel j et λ_j irréductible dans A_j. Pour $n \geq j$ on pose comme plus haut $P_n = R_n\lambda_j$. Démontrons $\mathcal{C}(P_n) \subseteq \mathcal{C}(P_{n+1})$ pour $n \geq j$: soit $x \in P_{n+1}$ et $c \in \mathcal{C}(P_n)$ avec $cx \in P_{n+1}$. On a $x = \sum_{i=o}^{\ell} a_iX_{n+1}^i$, $a_i \in R_n$ et $cx = \sum_{i=o}^{\ell} ca_iX_{n+1}^i$ avec $ca_i \in R_n$. Comme cx appartient à $P_{n+1} = R_{n+1}P_n$

Les éléments ca_i appartiennent à P_n donc aussi les a_i et x appartient à P_{n+1}. Démontrons $\mathcal{C}(P) = \bigcup_{n\geq j} \mathcal{C}(P_n)$: il suffit de démontrer que pour $n \geq j$ on a $\mathcal{C}(P)\cap R_n = \mathcal{C}(P_n)$ puisque l'on a $R = \bigcup_{n\geq j} R_n$.

Soit donc $c \in \mathscr{C}(P) \cap R_n$ et soit $f \in R_n$ tel que $cf \in P_n$. On a donc $cf \in P$, car $P = RP_n$ pour $n \geqslant j$ et $f \in P$ puisque $c \in \mathscr{C}(P)$. On a donc déjà $\mathscr{C}(P) \cap R_n \subseteq \mathscr{C}(P_n)$. Réciproquement soient $c \in \mathscr{C}(P_n)$ $n \geqslant j$ et $f \in R_{j'}$. Choisissons $k \geqslant \mathrm{Sup}(n;j')$ on a $c \in \mathscr{C}(P_k)$ et $f \in R_k$. Donc $cf \in P$ implique $cf \in R_k \cap P = P_k$ et $f \in P_k$. Aussi on a $\mathscr{C}(P_n) \subseteq \mathscr{C}(P) \cap R_n$.

Démontrons que R vérifie la condition de Ore par rapport à $\mathscr{C}(P)$: soient $x \in R$, $c \in \mathscr{C}(P)$, il existe k tel que $x \in R_k$ et $c \in \mathscr{C}(P) \cap R_k = \mathscr{C}(P_k)$; il suffit alors de remarquer que la condition de Ore est valable dans R_k par rapport à $\mathscr{C}(P_k)$ [5] . Remarquons pour terminer que l'on peut écrire aussi $\mathscr{C}(P) = \{c \in R \mid x \in R,\ xc \in P \Rightarrow x \in P\}$ puisque pour tout n on a $\mathscr{C}(P_n) = \{c \mid c \in R_n, x \in R_n\ cx \in P_n \Rightarrow x \in P_n\}$.

4. Démontrons que, pour P c-idéal premier de R, R/P est un anneau de Goldie.

On a $P = RP_n$ et de là résulte facilement $R/P = (R_n/P_n)[X_{n+1},\dots]$ pour n suffisamment grand. Comme on a la condition de Ore par rapport à $\mathscr{C}(P)$ et que $\mathscr{C}(P)/P$ est formé d'éléments réguliers dans R/P, R/P admet un anneau de fractions. Il faut démontrer que cet anneau de fractions est semi-simple. Pour cela il suffit de démontrer que tout idéal à droite essentiel de R/P contient un élément régulier. Posons $\bar{R} = (R_n/P_n)[X_{n+1},\dots]$ et soit I un idéal à droite essentiel de $\bar{R}$. Notons $A' = (o) \cup \{$coefficients dominants des pollynômes non nuls de I$\}$ (On ordonne suivant l'ordre lexicographique d'où la notion de coefficient dominant). Posons $\bar{R}_n = R_n/P_n$. Alors A' est un idéal à droite de $\bar{R}_n$. Démontrons que A' contient un élément régulier ; il en sera alors de même pour I. Comme $\bar{R}_n$ est un anneau de Goldie, il suffira de démontrer que A' est essentiel. Soit $\mathfrak{U}$ un idéal à droite non nul de $\bar{R}_n$, démontrons $\mathfrak{U} \cap A' \neq (o)$. Mais I étant essentiel, $\mathfrak{U}[X_{n+1},\dots] \cap I$ est non nul. Soit f un élément non nul de cette intersection. Son coefficient dominant est à la fois dans A' et dans $\mathfrak{U}$ d'où $\mathfrak{U} \cap A' \neq (o)$.

5 . Démontrons que P désignant un c-idéal premier de R la famille ${}_P\mathcal{F}$ des idéaux à droite de R contenant un idéal bilatère B non contenu dans P coïncide avec la famille des idéaux à droite de R coupant $\mathcal{C}(P)$ (et donc est une famille topologisante et idempotente).

Soit I un idéal à droite de R coupant $\mathcal{C}(P)$, on a alors pour un $k \in \mathbb{N}$ $I \cap \mathcal{C}(P_k) \neq (o)$ et $R_k \cap I \cap \mathcal{C}(P_k) \neq (o)$. Mais R_k étant un ordre maximal régulier noethérien et premier et P_k étant un c-idéal premier on sait d'après Chamarie [5] qu'il existe un idéal bilatère B_k de R_k contenu dans $R_k \cap I$. Posons $B = B_k\,[X_{k+1}, \dots\,] = B_kR = RB_k$, B n'est pas contenu dans P, car $B \cap R_k = B_k$, et il est contenu dans I. Réciproquement un idéal bilatère de R non contenu dans P contient un élément c de $\mathcal{C}(P)$ car R/P est de Goldie

6 . Démontrons $R_P = \bigcup_{i \geqslant i_o} (R_i)_{P_i}$ en notant R_P l'anneau des fractions à droite de R selon $\mathcal{C}(P)$. Soit $x \in (R_i)_{P_i}$ (on a $P = R\,\lambda_{i_o}$, λ_{i_o} élément irréductible de A_{i_o} et on prend $i \geqslant i_o$). Comme $(R_i)_{P_i} = (R_i)_{\mathcal{C}(P_i)}$ [5] , il existe $c \in \mathcal{C}(P_i)$ avec $xc \in R_i$ d'où $x \in R_{\mathcal{C}(P)}$. Réciproquement soit $x \in R_P$ il existe $c \in \mathcal{C}(P)$, avec $xc \in R$. On peut trouver $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant i_o$ tel que $x \in Q_k$, $c \in \mathcal{C}(P_k) \cap R_k$ et par suite $x \in (R_k)_{P_k}$. Remarquons d'ailleurs que l'on a $(R_i)_{P_i} \subseteq (R_{i+1})_{P_{i+1}}$. Remarquons enfin que comme $(R_i)_{P_i}$ est l'anneau des fractions à droite et à gauche selon $\mathcal{C}(P_i)$ il résulte immédiatement de $R_P = \bigcup_{i \geqslant i_o} (R_i)_{P_i}$ que R_P est aussi l'anneau des fractions à gauche de R selon $\mathcal{C}(P)$ et R_P est le localisé de R selon la famille ${}_P\mathcal{F}$ mais aussi selon la famille $\mathcal{F}_P$ des idéaux à gauche de R contenant un idéal bilatère de R non contenu dans P.

7 . Démontrons que $x \in R$ non nul est inversible dans R_P si et seulement si x appartient à $\mathcal{C}(P)$.
Il est évident qu'un élément de $\mathcal{C}(P)$ est inversible dans R_P. Réciproquement si x est inversible dans R_P on a $x^{-1} \in R_P$ donc $x^{-1}c \in R$ pour $c \in \mathcal{C}(P)$, $x^{-1}c = \lambda$, $xx^{-1}c = c = x\lambda$. Soit $z \in R$ tel que $zc \in P$ alors on a $zc = zx\lambda \in P$ et $z \in P$ et $x \in \mathcal{C}(P)$.

8 . Démontrons que pour tout $I \in {}_P\mathcal{F}$ (resp. $I \in \mathcal{F}_P$) on a $IR_P = R_PI = R_P$ et par suite que R_P est un localisé essentiel à droite et à gauche de R. Il suffit de remarquer que I contient un élément $c \in \mathcal{C}(P)$ doncinversible dans R_P.

9 . Montrons que R vérifie la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux bilatère entiers (c'est-à-dire contenus dans R).
Soit I un R-idéal. Il existe $\tau \in R$ tel que $I\tau \subsetneq R$; un raisonnement déjà fait à la fin du paragraphe 2 montre que $\tau^{-1} = a^{-1}r$ avec $r \in R$ et $a \in A$. On a $Iar^{-1} \subseteq R$, $Ia \subseteq Rr \subseteq R$, $Ia = R(Ia \cap A)$ d'après Cauchon (déjà cité) et $I = R(Ia \cap A)a^{-1} \subseteq R(I \cap Q_o)$. Par ailleurs on a $R(I \cap Q_o) \subseteq I$ et $I = R(I \cap Q_o)$. Mais $I \cap Q_o$ est un A-idéal. Etudions $(I \cap Q_o)^{-1} = \{x \mid x \in Q_o, (I \cap Q_o)x \subseteq A\}$. De $(I \cap Q_o)x \subseteq A$ on déduit $R(I \cap Q_o)x = Ix \subseteq R$ et $x \in I^{-1} \cap Q_o$, donc $I^{-1} \cap Q_o = (I \cap Q_o)^{-1}$ et $\underline{I^{-1}} = R(I^{-1} \cap Q_o) = R(I \cap Q_o)^{-1}$ et $\bar{I} = (I^{-1})^{-1} = R(\bar{I} \cap Q_o) = R(I \cap Q_o)$. En particulier si $\bar{I} \subseteq R$, on a $\bar{I} \cap Q_o = \bar{I} \cap Q_o \cap R = \bar{I} \cap A$ et $\bar{I} = R(\bar{I} \cap A) = R(\overline{\bar{I} \cap A})$. Comme A vérifie la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux entiers il en est de même pour R.

10. Montrons que l'on a $R = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} R_P$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des c-idéaux premiers de R.
Comme R est un ordre maximal régulier de Q vérifiant la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux bilatères entiers, le résultat est donné dans [1].

11 . Montrons qu'un élément non nul de R est inversible dans tous les R_P sauf un nombre fini.

Soit $a \in R$, $a \neq o$; aR contient un c-idéal bilatère B et $B = \prod_{i=1}^{r} P_i^{p_i}$ (au sens du produit des c-idéaux), P_i désignant un c-idéal premier de R pour $i = 1,\dots,r$. Si P est un c-idéal premier de R distinct de $P_1,\dots,P_r$, on a $B \not\subset P$ et B coupe $\mathcal{C}(P)$ donc $BR_P = R_P$ et $aR_P \supseteq BR_P = R_P$ donc $aR_P = R_P$ et a admet un inverse à droite dans R_P. On fait le même raisonnement pour Ra et on parvient au résultat que a est inversible dans R_P pour tous les c-idéaux premiers P sauf un nombre fini.

12. *Structure de* R_P : Démontrons que R_P est un anneau "semi-local" de radical $P' \supseteq R_P = PR_P$. Comme R/P est un anneau de Goldie et que R vérifie la condition de Ore par rapport à $\mathcal{C}(P)$ on peut appliquer le théorème 3 de [2] : le radical de Jacobson Rad R_P de R_P est $PR_P = R_P P$ et $R_P/\mathrm{rad}R_P$ est semi-simple en fait simple artinien car nous allons démontrer qu'ici PR_P est un idéal bilatère maximum : soit en effet B un idéal bilatère non nul de R_P et distinct de R_P ; il existe un $i \in \mathbb{N}$ avec $B \cap (R_j)_{P_j} \neq (o)$ et distinct de $(R_j)_{P_j}$ pour $j \geq i$. Il en résulte $B \cap (R_j)_P \subseteq P_j R_{P_j}$ et

$B \subseteq \bigcup_{j \geq r} P_j (R_j)_{P_j}$, en posant $P = R_P\lambda = \lambda R_P$ avec λ irréductible dans A_n, mais comme on a $P_j = R_j\lambda \subseteq R_P P = PR_P$ pour $j > n$, on a aussi $B \subseteq PR_P = R_P P$ (rappelons que nous disons qu'un anneau est semi-local si le quotient de cet anneau par son radical de Jacobson est artinien simple).

13 . Il résulte immédiatement de [1] que R_P est un ordre maximal régulier dont les seuls idéaux bilatères sont les P'^n, $n = 0,1,2,\dots$ donc un ordre d'Asano) ([12] par exemple).

14. Démontrons que R_P est un anneau noethérien :

Soit $I'_1 \subseteq I'_2 \subseteq \dots \subseteq I'_k \subseteq \dots$ une suite croissante d'idéaux d'un côté par exemple à droite, non nuls de R_P. Il existe $k \in N$ avec $P'^k \subseteq I'_1$ et en passant aux classes modulo P'^k on obtient une suite croissante d'idéaux à droite de R_P/P'^k, $\bar{I}'_1 \subseteq \bar{I}'_2 \subseteq \dots$ Démontrons que R_P/P'^k est un anneau artinien donc noéthérien : Soit $\bar{\mathfrak{J}}_1 \supseteq \bar{\mathfrak{J}}_2 \supseteq \dots$ une suite décroissante d'idéaux à droite de

$\bar{R}_P = R_P/P'^n$ et soit $\mathfrak{J}_1 \supseteq \mathfrak{J}_2 \supseteq \dots \supseteq P'^n$ la suite correspondante

d'idéaux à droite de R_P. Soit Q' tel que $Q'P' = P'Q' = R_P$. On a $P'^n \subseteq \mathfrak{J}_j \cap P' \subseteq P'$ et $Q'P'^n = P'^{n-1} \subseteq Q'(\mathfrak{J}_j \cap P') \subseteq R_P$. Ceci étant

raisonnons par récurrence sur n on sait que R_P/P' est artinien (voir 12 ci-dessus). Supposons que R_P/P'^{n-1} soit artinien, alors la suite d'idéaux à droite $\{Q'(\mathfrak{J}_j \cap P')\}$ modulo P'^{n-1} de

R_P/P'^{n-1} est stationnaire donc aussi la suite d'idéaux à droite de R_P $\{\mathfrak{J}_j \cap P' = P'Q'(\mathfrak{J}_j \cap P')\}$. Mais la suite $\{\mathfrak{J}_j + P'\}$ d'idéaux

à droite de R_P est stationnaire puisque R_P/P' est artinien, de la résulte que la suite $\{\mathfrak{J}_j\}$ elle-même est stationnaire. D'où résulte que R_P/P'^n est artinien pour tout n donc noethérien et la suite $\{I'_1\}$ est stationnaire et R_P est bien un anneau noéthérien.

15 . Les résultats de ce paragraphe montrent que les conditions K_1, K_2, K_3 du paragraphe 1 sont vérifiées et que R est bien AKR.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ASANO K. et MURATA K. , *Arithmetical ideal theory in semi groups*. J. Inst. Polyt. Osaka Univ. , Série A, t.4 (1953) p. 9-33.

[2] BEACHY and BLAIR, *Localization at semi prime ideals,* J. of algebra 38 (1976) p. 309-314.

[3] BLAIR, *Right noetherian rings integral over their center.* J. of algebra 27 (1973) p. 187-198.

[4] G. CAUCHON, T-*anneaux et* I-P-*anneaux noethériens.* Thèse d'état. Université Paris XI (1977).

[5] CHAMARIE M., *Localisation dans les ordres maximaux.*Comm. in algebra 2, (4), 279 - 293 (1974).

[6] FOSSUM R., *Maximal orders over Krull domains.* J. of algebra 10 (1968), p. 321-332.

[7] KOTHE, *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum.* Math. Annalen 105, (1931) p. 15-39.

[8] MARUBAYASHI M. , *Non commutative Krull prime rings.*Osaka J. of Math. 12 (1975), p. 703.

[9] MARUBAYASHI M. , *On bounded Krull prime rings.*Osaka J. Math. 13 (1976), p. 491-501.

[10] MARUBAYASHI M. , *Charactérisation of bounded Krull Prime rings.* Osaka J. of Math. 15 (1978), p. 13-20.

[11] MARUBAYASHI M., *Remarks on ideals of bounded Krull.prime rings,* Procedings of the Japan Academy, Vol. 53, n° 1 (1977).

[12] MAURY G. , *La théorie des ordres maximaux au sens de K. Asano* Vorlesungen aus dem Math. Institut Giessen Heft 6 (1976).

G. MAURY
J.B. DELIFER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX