ALI DEAIBES

Applications de radonification des mesures compactologiques d'un espace métrique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1
, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979.t. 16.1

APPLICATIONS DE RADONIFICATION DES MESURES COMPACTOLOGIQUES D'UN ESPACE METRIQUE

par Ali DEAIBES

RÉSUMÉ. On caractérise les applications uniformément continues d'un espace métrique dans lui-même qui transforment toute mesure compactologique en une mesure de Radon.

INTRODUCTION.

Pour tout espace métrique X, on désigne par $U^{\infty}(X)$ l'algèbre des fonctions réelles uniformément continues et bornées sur X.

Dans l'algèbre $U^{\infty}(X)$, on désigne par $\mathscr{H}^{\infty}$ la compactologie uniformément équicontinue formée des parties H qui sont uniformément équicontinues, uniformément bornées, et simplement fermées (fermées pour la topologie de la convergence simple sur X).

On rappelle qu'on désigne par $M^{\infty}(X)$ l'espace vectoriel des mesures compactologiques ou uniformes sur X, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $U^{\infty}(X)$ qui sont simplement continues sur chaque $H \in \mathscr{H}^{\infty}$.

Une application uniformément continue g de X dans lui-même est dite application de radonification des mesures compactologiques ou tout simplement application de radonification, si pour tout élément m de $M^{\infty}(X)$ la mesure compactologique image g(m) est de Radon.

Soit g une application uniformément continue d'un espace métrique X dans lui-même.

Alors g est une application de radonification ssi pour toute partie précompacte A de X, l'image directe g(A) est relativement compacte ; ce qui est équivalent à la condition : si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de X, alors la suite $(g(x_n))_{n\geq 1}$ est convergente (cf. 1.1).

CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS DE RADONIFICATION.

Rappelons tout d'abord certaines notions.

On munit l'espace métrique X de sa tribu de Baire Ba(X) qui coïncide, d'ailleurs, avec sa tribu de Borel.

On appelle mesure de Baire sur X, toute mesure signée bornée définie sur Ba(X). On identifie chaque mesure de Baire m avec la forme linéaire sur $U^{\infty}(X)$ définie par l'intégrale de Lebesgue associée à m.

Alors, une mesure de Baire m est dite t-régulière ou de Radon si elle est continue sur $\Delta(1)$ pour la topologie de la convergence compacte sur X , où $\Delta(1)$ est la boule unité de l'algèbre $U^{\infty}(X)$, munie de la norme de la convergence uniforme sur X.

D'autre part, pour toute mesure compactologique m et toute application uniformément continue g de X dans X on définit :

a) La mesure compactologique image g(m) par la formule

$$g(m)(f) = m(f \circ g) \; ; \; f \in U^{\infty}(X).$$

b) La mesure compactologique $\hat{m}$ sur le complété $\hat{X}$ de X, par la formule $\hat{m}(\hat{f}) = m(f)$; $f \in U^{\infty}(X)$ où $\hat{f}$ est le prolongement uniformément continu de f à $\hat{X}$.

c) L'application uniformément continue $\hat{g}$ de $\hat{X}$ dans $\hat{X}$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \hat{X} \arrow[r, "\hat{g}"] & \hat{X} \end{tikzcd}$$

commutatif.

1.1. THEOREME. - *Pour une application uniformément continue* g *d'un espace métrique* X *dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) g *est une application de radonification des mesures compactologiques.*

b) Il existe une application uniformément continue $\bar{g}$ *de* $\hat{X}$ *dans* X *prolongeant* g. *Autrement dit* $\hat{g}$ *est à valeurs dans* X.

c) Pour toute partie précompacte A *de* X, *l'image directe* $g(A)$ *est relativement compacte.*

d) Pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 1}$ *de* X, *la suite* $(g(x_n))_{n \geq 1}$ *est convergente.*

PREUVE. - Supposons qu'il existe un point u dans $\hat{X}$, tel que $\hat{g}(u) \in \hat{X} | X$. Alors la forme modulaire compactologique $\hat{g}(u)$ n'est pas dans le δ-complété de X, il existe donc une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de $U^{\infty}(X)$, décroissante vers zéro sur X , telle que $\hat{g}(u)(f_n) \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ [2, prop. 4.2.3]. Il en résulte que $\hat{g}(u)$ n'est pas une mesure de Radon sur X, et par conséquent $\hat{g}$ est à valeurs dans X.

b) $\Longrightarrow$ c) Soit A une partie précompacte de X, et soit E son adhérence dans $\hat{X}$. Alors la partie E est compacte, et $g(A)$ est relativement compacte parce qu'elle est contenue dans le compact $\hat{g}(E)$.

c)$\Longrightarrow$d) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de X. Alors la partie $\{x_n\}_n$ est précompacte, et son image $\{g(x_n)\}_n$ est relativement compacte. Il en résulte que la suite de Cauchy $(g(x_n))_{n \geq 1}$ possède une seule valeur d'adhérence dans $\hat{X}$, et par conséquent elle est convergente.

d)$\Longrightarrow$a) Soit u un point de $\hat{X}$. Il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de X qui converge dans $\hat{X}$, vers le point u. Alors la suite $(g(x_n))_{n \geq 1}$ converge dans X vers un point y. Il en résulte que $g(u) = y$, et par conséquent $\hat{g}$ est à valeurs dans X. Soient f une fonction de $U^{\infty}(X)$ et u un point de $\hat{X}$. Alors on a :

$$\hat{g}(u)(f) = \hat{f}(\hat{g}(u)) = f(\hat{g}(u)) = (f \circ \hat{g})(u) = \widehat{f \circ g}(u)$$

parce que $\hat{g}$ est à valeurs dans X et $\hat{f} \circ \hat{g} = \widehat{f \circ g}$.

Soit m une mesure compactologique sur X. Alors on a :

$$g(m)(f) = m(f \circ g) = \hat{m}(\widehat{f \circ g}) = \hat{m}(f \circ \hat{g}) = \hat{g}(\hat{m})(f) \;\; ; \; f \in U^{\infty}(X).$$

L'espace métrique $\hat{X}$ est complet. Il résulte de [1, th. 4.7] que la mesure compactologique $\hat{m}$ est de Radon, son image $\hat{g}(\hat{m})$ est donc de Radon, et tout est dit.

1.2. COROLLAIRE 1. - *Une application uniformément continue* g *d'un espace métrique précompact* X *dans* X *est de radonification ssi l'image* g(X) *est relativement compacte dans* X.

1.3. COROLLAIRE 2. - *Si l'espace métrique* X *est l'intervalle semi-ouvert* $]0,1]$ *du corps des nombres réels* $\mathbb{R}$, *alors les applications de radonification de* X *sont exactement les applications uniformément continues* g *de* X *dans lui-même telles que* $\lim\limits_{t \to 0} g(t) \neq 0$ *(la limite est prise dans* $\mathbb{R}$*). Autrement dit, ce sont les applications continues* $\bar{g}$ *de l'intervalle fermé* $[0,1]$ *dans* $]0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1.] I.A. BEREZANSKII, *Measures on uniform espaces*, trans. Moscow Math. Soc. , 19, 1968, p.1-40.

[2] A. DEAIBES, *Espaces uniformes et espaces de mesures*, Publ. Dép. Math. Lyon, 1975, t. 12 - 4 , p. 1-166.

Ali DEAIBES
Université Libanaise
BEYROUTH - LIBAN