MAURICE POUZET

Sur les chaînes d'un ensemble partiellement bien ordonné

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1
, p. 21-26
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_21_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t. 16. 1

SUR LES CHAINES D'UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT BIEN ORDONNE

par Maurice POUZET

L'objet de la présente note est de prouver le résultat suivant au moyen d'une proposition plus générale :

THEOREME. - *Soit* E *un ensemble partiellement bien ordonné* (1)

Alors

- *ou bien* E *contient une antichaîne infinie dont les éléments ont des hauteurs toutes différentes,*
- *ou bien* E *contient une chaîne bien ordonnée dont le type d'ordre égale la hauteur* E.

Cet énoncé nous a été proposé par P. ERDÖS en juin 1979, son exactitude étant conjecturée par E.C. MILNER qui l'a prouvée pour les ensembles partiellement bien ordonnés de hauteur inférieure à ω_1^2 .

---

(1) Notre terminologie est classique. Rappelons toutefois qu'un ensemble partiellement ordonné E est partiellement bien ordonné lorsque chacune de ses parties non vide a au moins un élément un élément minimal. Dans ce cas, la hauteur d'un élément x de E est ordinal, que nous notons $h(x,E)$, défini inductivement par $h(x,E) = \operatorname{Sup}\{h(y,E)+1 / y \in E \text{ et } y < x\}$ et la hauteur de E, que nous notons $h(E)$, est l'ordinal $\operatorname{Sup}\{h(x,E) + 1 / x \in E\}$. Signalons enfin qu'avec cette définition, l'ensemble des éléments de hauteur o est l'ensemble $E(o)$ des éléments minimaux de E et que l'ensemble des éléments de hauteur δ est l'ensemble $E(\delta)$ des élémentx minimaux de $E - \bigcup_{\delta'<\delta} E(\delta')$.

Nous obtenons cet énoncé au moyen du résultat suivant :

PROPOSITION. - *Soit* E *un ensemble partiellement bien ordonné. Alors* E *contient un sous-ensemble* A *qui est de même hauteur que* E (i.e. $h(A) = h(E)$) *et qui pour chaque* δ *contient au plus un élément* x *de hauteur* δ *dans* E (i.e. $|A \cap E(\delta)|$ [(1)] $\leqslant 1$).

Si on admet un moment ce résultat, la preuve du théorème peut être obtenue comme suit :

Soit E partiellement bien ordonné ; ou bien E contient une antichaîne infinie dont les éléments ont des hauteurs toutes différentes et c'est terminé ; ou bien E n'en contient pas, dans ce dernier cas prenons A comme ci-dessus ; cet A ne contient pas d'antichaîne infinie.; donc en particulier les $A(\delta)$ sont tous finis ; l'existence d'une chaîne C dont le type égale la hauteur de E résulte alors de la généralisation bien connu du lemme de KOENIG, à savoir :

LEMME. - *Soit* A *partiellement bien ordonné. Si pour chaque* δ *l'ensemble* $A(\delta)$ *des éléments de hauteur* δ *est fini, alors* A *contient une chaîne* C *qui contient un élément de chaque* $A(\delta)$ *non vide. En particulier, le type de* C *égale la hauteur de* A.

Signalons que ce lemme peut se prouver en considérant d'abord les ensembles de hauteur finie, pour lesquels le résultat est

(1) Conformément à l'usage nous notons $|X|$ la cardinalité de n'importe quel ensemble X.

évident, puis les ensembles de hauteur infinie et, dans ce cas, en utilisant une "technique de compacité" fondée essentiellement sur la compacité de $\prod\limits_{\delta<h(A)} A(\delta)$.

La proposition est un cas particulier de l'énoncé suivant :

UN LEMME TECHNIQUE. - *Soient* E *un ensemble partiellement bien ordonné,* δ *un ordinal avec* $\delta \leqslant h(E)$, *et* X *une partie de* $E(\delta)$ *avec* $|X| \leqslant \mathrm{Ind}\,\delta$ (Ind δ *désignant la cardinalité de n'importe quel segment final indécomposable de* δ*). Alors* E *contient un sous ensemble* A *tel que :*

1) $|A \cap E(\delta')| \leqslant 1$ *pour tout* $\delta < \delta$ et $|A \cap E(\delta')| = 0$ *pour tout* $\delta' \geqslant \delta$,

2) $h(A \cap \leftarrow x[) = \delta$ (2) *pour tout* $x \in X$.

On obtient en effet la proposition en prenant $\delta = h(E)$, ou encore en appliquant ce résultat à l'ensemble E^* (obtenu en ajoutant un plus grand élément x à E), à l'ordinal $\delta = h(E)$ et à l'ensemble $X = \{x\}$.

PREUVE DU LEMME. - Contentons nous de prouver l'énoncé lorsque $\delta < h(E)$ (si $\delta = h(E)$ il suffit d'ajouter un plus grand élément à E). Pour cela, procédons par induction sur E et δ . L'énoncé étant vrai pour $\delta = o$, supposons le vrai pour tout E et tout $\delta' < \delta$ et distinguons deux cas :

---

(2) Nous notons $\leftarrow x[$ l'ensemble des $y < x$.

1-er CAS : <u>δ n'est pas indécomposable</u>.

Dans ce cas, on peut écrire $\delta = \delta' + \delta''$, avec δ'' segment final indécomposable maximal pour l'inclusion. Soit E'' l'ensemble des x de hauteur au moins égale à δ'. L'ensemble X est une partie de $E''(\delta'')$ (observer que $h(x,E) = \delta' + h(x,E'')$ pour tout $x \in E''$) et $|X| \leqslant \mathrm{Ind}\ \delta''$ (puisque $\mathrm{Ind}\ \delta = |\delta''| = \mathrm{Ind}\ \delta''$). Donc, via l'hypothèse inductive, on peut trouver $A'' \subset E''$ satisfaisant 1) et 2). Pour chaque $x'' \in A''$, choisissons un élément $x' \in E(\delta')$ qui soit inférieur ou égal à x''. Soit X' l'ensemble obtenu ; alors $|X'| \leqslant |A''| \leqslant |\delta''|$ et, d'après le choix de δ'', $|\delta''| \leqslant \mathrm{Ind}\ \delta'$; donc $|X'| \leqslant \mathrm{Ind}\ \delta'$. Via l'hypothèse inductive appliquée à E, δ' et X', nous pouvons encore trouver $A' \subset E$ satisfaisant 1) et 2). Il suffit alors de vérifier que $A = A' \cup A''$ satisfait lui aussi 1) et 2) (pour cela remarquer que, si $x \in X$ et $x'' \in A''$ avec $x'' \leqslant x$, alors $h(x'',A) \geqslant \delta' + h(x'',A'')$).

1-ème CAS : <u>δ est indécomposable</u>.

<u>1-er sous-cas</u> : $\delta = \omega$. Pour chaque $x \in X$, choisissons une partie infinie Y_x de ω, le choix étant fait de sorte que les Y_x obtenus soient deux à deux disjoints. Puis prenons dans $\leftarrow x[\ \cap \{y/h(y,E) \in Y_x\}$ une partie A_x qui contient un élément de chaque $E(n)$ pour $n \in Y_x$ et qui est de hauteur ω. (Pour voir que c'est possible écrire la chaîne Y_x munie de l'ordre induit sous la forme d'une somme d'intervalle $\sum_{m \in N} I_m$, chaque I_m étant de longueur m, et prendre A_x égal à $\bigcup_{m \in N} C_m$, avec C_m chaîne à m éléments de $\cup \{E(n)/n \in I_m\}$). Alors l'ensemble $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ vérifie 1) et 2).

<u>2-ème sous-cas</u>[(1)] : $\delta > \omega$. Choisissons une suite croissante $(\delta_i)_{i < cf(\delta)}$ telle que

a) $\mathrm{Sup}\{\delta_i + 1\} = \delta$

et b) $\mathrm{Ind}\ \delta_i = |\delta_i|$.(Utiliser le fait que δ est une $cf(\delta)$ somme croissante d'indécomposables). Puis choisissons une suite croissante $(x_i)_{i < cf(\delta)}$ de parties X_i de X telle que

a') $\bigcup X_i = X$ et

et b') $|X_i'| \leqslant \mathrm{Ind}\ \delta_i$.

Puisque δ est indécomposable et $\mathrm{Sup}\ \delta_i = \delta$, nous avons $\sum_{i < cf(\delta)} \delta_i = \delta$.

Pour chaque $i < cf(\delta)$, soit E^i l'ensemble des x de E tels que

$\sum_{j < i} \delta_j \leqslant h(x,E) < \sum_{j \leqslant i} \delta_j$ et soit $\breve{E}^i = E^i \cup X$. Alors X_i est une partie de $\breve{E}^i(\delta_i)$ et, comme $|X_i| \leqslant \mathrm{Ind}\ \delta_i$, nous pouvons appliquer l'hypothèse inductive à $\breve{E}^i$, δ_i et X_i et donc trouver une partie A_i de $\breve{E}^i$ vérifiant 1,2).

Prenons alors $A = \bigcup_{i < cf(\delta)} A_i$. Cet ensemble vérifie 1,2). (Fait évident une fois remarqué que les A_i sont deux à deux disjoints et que si $x \in X$ alors $h(A_i \cap \leftarrow x[) = \delta_i$).

QUELQUES OBSERVATIONS.

1) Pour le théorème annoncé, on peut se contenter de prouver une version affaiblie de la proposition en imposant seulement que pour chaque δ,A ne contient qu'un nombre fini d'éléments de hauteur δ. Plus facilement encore, on peut prouver le théorème en supposant que E ne contient pas d'antichaîne infinie formée d'éléments de hauteurs toutes différentes et en raisonnant par induction sur la hauteur. Pour cela on distingue deux cas :

---

(1) $cf(\delta)$ désigne la cofinalité de δ.

<u>1-er cas</u> : $\delta = h(E)$ n'est pas indécomposable. Dans ce cas, on écrit $\delta = \delta' + \delta''$ avec δ', $\delta'' < \delta$. Via l'hypothèse inductive, on choisit une chaîne C'' de type δ'' dans l'ensemble E'' des x'' tels que $h(x'',E) = \delta'$, puis, une fois choisi un minorant x_0 de C'' appartenant à $E(\delta')$, on choisit une chaîne C' de type δ' dans $E \cap \leftarrow x_0[$; l'ensemble $C = C' \cup C''$ est alors une chaîne de type $\delta' + \delta''$.

<u>2-ème cas</u> : $\delta = h(E)$ est indécomposable. On commence par prouver que E contient un sous ensemble A de même hauteur qui contient au plus un élément de chaque $E_{(\delta')}$ pour $\delta' < \delta$, puis on applique la généralisation du lemme de KOENIG. Pour cela, on écrit $\delta = \sum_{i < cf(\delta)} \delta_i$, où $(\delta_i)_{i < cf(\delta)}$ est une suite croissante satisfaisant $\mathrm{Sup}\ \delta_i =$. Dans chaque $E^i = \{x / \sum_{j < i} \delta_j \leqslant h(x,E) < \sum_{j \leqslant i} \delta_j\}$, on choisit une chaîne C_i de type δ_i. Puis on prend $A = \ _{i < cf(\delta\ )} C_i$.

Nous avons quand même tenu à prouver la proposition précédemment énoncée, celle-ci semblant présenter un intérêt propre.

2) Contrairement au lemme de KOENIG ou sa généralisation, on ne peut pas imposer dans le théorème l'existence d'une chaîne C rencontrant chaque $E(\delta')$ (pour $\delta' < h(E)$). (Considérer l'ensemble E des couples d'entiers (n,m) avec $m < n$ ordonné comme suit : $(n,m) \leqslant (n',m')$ lorsque ou bien $n = n'$ et $m \leqslant m'$ ou bien $n < n'$ et $m + 2 \leqslant m'$).

Addendum : (Fév. 80). Depuis que nous avons présenté cet article nous avons appris que ce théorème sur les chaînes était aussi obtenu par E.C. Milner et N. Sauer ainsi que par F. Galvin. Nous venons de recevoir le preprint de E.C. Milner et N. Sauer : "On chains and antichains in well founded partially ordered sets". Les auteurs présentent le résultat dans un cadre très général, analogue à celui du calcul des partitions, dont ils font une étude complète. Ainsi qu'ils le signalent eux-même leur méthode est entièrement différente de la nôtre.