PAUL NOUYRIGAT

Sur les points extrémaux de la boule unité de l'espace des coefficients d'une représentation unitaire et sur l'égalité $A_\pi(G) = B_\pi(G)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1 , p. 27-36

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_27_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t. 16. 1

SUR LES POINTS EXTREMAUX DE LA BOULE UNITE DE L'ESPACE DES COEFFICIENTS D'UNE REPRESENTATION UNITAIRE ET SUR L'EGALITE $A_\pi(G) = B_\pi(G)$

par Paul NOUYRIGAT

Soit π une représentation unitaire d'un groupe localement compact G. Eymard [3] puis Arsac [1] ont défini et étudié les espaces $B_\pi(G)$ et $A_\pi(G)$. L'espace $B_\pi(G)$ est l'ensemble des coefficients des représentations unitaires continues de G qui sont faiblement contenues dans π. L'espace $A_\pi(G)$ est le sous-espace de Banach de B(G) engendré par les coefficients de π. Nous montrons que les points extrémaux de la boule unité de $A_\pi(G)$ sont liés aux sous-représentations irréductibles de π, puis que l'égalité $A_\pi(G) = B_\pi(G)$ entraîne que π est somme de multiples de représentations irréductibles.

Nous adopterons les notations de [1] .

Soit G un groupe localement compact et soit dx une mesure de Haar à gauche sur G, choisie une fois pour toutes. Soit π une représentation unitaire continue de G dans un espace Hilbertien $\mathscr{H}$. Pour ξ et $\eta \in \mathscr{H}$, on désigne par $\xi * \eta$ la fonction sur G définie par $\xi * \eta(s) = (\pi(s)\xi|\eta)$. On désigne par VN_π l'algèbre de Von Neumann engendrée dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ par $\pi(G)$. On sait que $A_\pi(G)$ s'identifie au prédual de VN_π , la formule de dualité étant :

$$<T,\xi * \eta> \quad = \quad (T\xi|\eta) \quad , \text{ pour } T\in VN_\pi \quad ,\xi\in\mathcal{H} \quad \eta\in\mathcal{H}$$

On écrira désormais A_π et B_π au lieu de $A_\pi(G)$ et $B_\pi(G)$.

1. - Soit π une représentation unitaire de G.

On montre que, si u est extrémal dans la boule unité de A_π, il existe σ sous-représentation irréductible de π telle que u soit extrémal dans la boule unité de A_σ. On désigne par $\mathcal{B}$ la boule unité de A_π.

(1.1.) PROPOSITION. - *Soient* u *et* v *dans* A_π. *On suppose qu'il existe un opérateur partiellement isométrique* $T\in VN_\pi$ *tel que*

$$u = Tv \quad ; \quad v = T^* u \; , \; ||u|| \; = ||v||.$$

Alors pour que u *soit extrémal dans* $\mathcal{B}$, *il faut et il suffit que* v *le soit.*

Soit $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ tel que T^*T soit le projecteur sur $\mathcal{H}_1$. Alors T (resp. T^*) est nul sur $\mathcal{H}_1^\perp$ (resp. $[T(\mathcal{H}_1)]^\perp$) et est une isométrie sur $\mathcal{H}_1$ (resp. $T(\mathcal{H}_1)$).

Supposons u extrémal dans $\mathcal{B}$ et soit $v = 1/2(v_1+v_2)$ où $v_1\in\mathcal{B}$, $v_2\in\mathcal{B}$. On a donc

$u = Tv = 1/2[Tv_1+Tv_2]$, avec $Tv_1\in\mathcal{B}$ et $Tv_2\in\mathcal{B}$.

d'où $u = Tv_1 = Tv_2$. On peut écrire $v_1 = \sum_i(\xi_i+\xi_i')*\eta_i$ avec $\xi_i\in\mathcal{H}_1$; $\xi_i'\in\mathcal{H}_1^\perp$; $||v_1|| = \Sigma||\xi_i+\xi_i'||\;||\eta_i||$. Ce qui donne

$$Tv_1 = \sum_i T\xi_i * \eta_i \text{ puis}$$

$$1 = ||u||=||Tv_1|| \leq \sum_i ||T\xi_i||\,||\eta_i||= \sum_i|| \xi_i||\,||\eta_i||\leq \sum_i||\xi_i+\xi_i'||\,||\eta_i|| \leq 1$$

On en déduit que pour tout i on a $||\xi_i||=||\xi_i+\xi_i'||$ et, les éléments ξ_i et ξ_i' étant orthogonaux, $\xi_i' = o$ puis $v_1 = \sum_i \xi_i*\eta_i$.

Or $\xi_i = T^*T\xi_i$ d'où $v_1 = \Sigma T^*T\xi_i * \eta_i = T^*Tv_1 = T^*u = v$.

Par suite $v_2 = v$ et v est extrémal dans $\mathcal{B}$.

Pour la réciproque on permute u et v puis T et T^*.

(1.2) COROLLAIRE. - *Pour que $u \in A_\pi$ soit extrémal dans $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que sa valeur absolue $|u|$ le soit.*

On utilise la décomposition polaire $u = T|u|$ de u et on applique le résultat précédent.

(1.3) REMARQUE. - Soit $u \in \mathcal{B}$. Si u est positif (i.e. u est une forme linéaire positive sur VN_π, si $u = 1/2(u_1+u_2)$ et $||u|| = 1$ avec $u_1 \in \mathcal{B}$ et $u_2 \in \mathcal{B}$ alors u_1 et u_2 sont positifs.

En effet on a $1 = ||u|| = u(e) = 1/2(u_1(e)+u_2(e)) \leq 1/2(||u_1||+||u_2||) \leq 1$ d'où $||u_1|| = u_1(e)$ et $||u_2|| = u_2(e)$. Alors d'après [2] prop. 2.19 on a le résultat.

Ceci montre que pour que u, positif, soit extrémal dans $\mathcal{B}$ il suffit qu'il le soit dans la partie positive de $\mathcal{B}$.

(1.4) PROPOSITION. - *Soit $u \in \mathcal{B}$. Alors si u est extrémal dans $\mathcal{B}$, u peut s'écrire $u = \xi * \eta$, avec $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{H}$ et $||u|| = ||\xi|| = ||\eta|| = 1$.*

En effet, on peut écrire $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, avec $||u|| = \Sigma ||\xi_i|| \, ||\eta_i|| = 1$ ($\xi_i \in \mathcal{H}$; $\eta_i \in \mathcal{H}$). Si la somme comporte plus d'un terme, on a $u = u_1+u_2$ avec $1 = ||u|| = ||u_1||+||u_2||$ d'où $u = ||u_1|| \frac{u_1}{||u_1||} + ||u_2|| \frac{u_2}{||u_2||}$.

D'où, u étant extrémal, tous les termes de la somme sont proportionnels.

Il résulte alors que $u = \xi * \eta$ avec $||u|| = ||\xi|| = ||\eta|| = 1$.

(1.5) PROPOSITION. - *On suppose la représentation π irréductible. Alors les points extrémaux de $\mathscr{B}$ sont les $u \in A_\pi$ qui s'écrivent*

$u = \xi * \eta$, avec $||u|| = ||\xi|| = ||\eta|| = 1$.

D'après (1.4) il suffit de montrer que les $\xi * \eta$ avec $\xi \in \mathscr{H}$ $\eta \in \mathscr{H}$, $||\xi * \eta|| = ||\xi|| = ||\eta|| = 1$, sont extrémaux dans $\mathscr{B}$. Soit donc un tel $\xi * \eta$. Puisque π est irréductible, on a $VN_\pi = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ d'où $A_\pi(G)$ s'identifie à l'espace des opérateurs à trace sur $\mathscr{H}$, cet espace s'identifie à $\mathscr{H} \hat{\otimes} \overline{\mathscr{H}}$ et $\xi * \eta$ s'identifie à $\xi \otimes \eta$

Or $\xi \otimes \eta$ est un opérateur de Hilbert Schmidt et sa norme d'opérateur de Hilbert-Schmidt est 1. Donc $\xi \otimes \eta$ est extrémal dans la boule unité des opérateurs de Hilbert-Schmidt et, par suite, dans la boule unité des opérateurs à trace qui est plus petite.

Pour toute sous-représentation irréductible, α de π, il existe un seul projecteur central $P_\alpha \in VN_\alpha$ tel que $P_\alpha A_\pi = A_\pi P_\alpha = A_\alpha \subset A_\pi$ ([1] Prop (3.16) p. 50). Si α et β sont des sous-représentations irréductibles de π disjointes on a ([1] (3.12)) $A_\alpha \cap A_\beta = \{0\}$ d'où on déduit $P_\alpha P_\beta = 0$. Les sous-espaces $P_\alpha(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_\alpha$ et $P_\beta(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_\beta$ sont donc orthogonaux.

Prenons dans chaque classe de sous représentations irréductibles de π une représentation π_i. Soit n_i l'ordre de multiplicité de π_i dans π. On pose alors

$$\tau = \bigoplus_i n_i \pi_i \quad ; \quad \mathscr{H}_\tau = \bigoplus_i \mathscr{H}_i ; \; P = \bigoplus_i P_i \; ; \text{ avec}$$

$$\mathscr{H}_i = P_{\pi_i}(\mathscr{H}) \text{ et } P_i = P_{\pi_i} \quad .$$

D'après [1] on peut écrire

$A_\pi = A_\sigma \oplus A_\tau$, avec $u = u_\sigma + u_\tau$ et $||u|| = ||u_\sigma|| + ||u_\tau||$.
De plus $A_\tau = PA_\pi$ et $A_\sigma = (1-P)A_\pi$; en effet $A_\tau = \underset{i}{\oplus} A_{\pi_i} = \underset{i}{\oplus}(P_i A_\pi) = (\underset{i}{\oplus} P_i)A_\pi$ car les P_i sont orthogonaux deux à deux.

(1.6) REMARQUES. - (i) Si $\mathcal{H}_i$ désigne l'espace de la représentation π_i et si $P_i^!$ est le projecteur sur $\mathcal{H}_i$, alors $P_i^!$ est dans le commutant de VN_π et P_i est le support central de $P_i^!$.

(ii) Il se peut qu'il n'y ait aucune sous-représentation irréductible de π, auquel cas $A_\sigma = \{0\}$.

(1.7) THEOREME. - *On conserve les notations ci-dessus. Les points extrémaux de* $\mathcal{B}$ *sont les points extrémaux des boules unités des* A_{π_i} *, c'est-à-dire les* $\xi_i * \eta_i$*, où*

$\xi_i \in \mathcal{H}_i \quad \eta \in \mathcal{H}_i \quad ||\xi_i * \eta_i|| = 1 = ||\xi_i|| = ||\eta_i||$.

On a d'abord le lemme suivant :

(1.8) LEMME . - *Soit* E *un espace de Banach. Soient* E_1 *et* E_2 *deux-sous-espaces fermés de* E. *On suppose* $E = E_1 \oplus E_2$ *et que, dans l'écriture d'un* x *de* E *sous la forme* $x = x_1 + x_2 (x_1 \in E_1 ; x_2 \in E_2)$ *on a,* $||x|| = ||x_1|| + ||x_2||$. *Alors, si* $u \in E_1$ *est extrémal dans la boule unité de* E_1*, il est extrémal dans la boule unité de* E.

La vérification est immédiate.

Si u est extrémal dans la boule unité de A_{π_i} alors u est extrémal dans la boule unité de A_π : on applique le lemme à la décomposition de A_π sous la forme $A_\pi = A_{\pi_i} \oplus A_{\pi'}$ ([1] th. (3.18) p. 53).

Réciproquement, soit u extrémal dans $\mathcal{B}$; alors, d'après (1.5), u est de la forme $u = \xi * \eta$ avec $||u||=||\xi||=||\eta|| =1$.

Supposons d'abord $\xi = \eta$.

Soit $H \subset \mathcal{H}$ le sous-espace fermé engendré par les $\pi(s)\xi$ pour $s \in G$. Alors H est stable par la représentation π et $\pi|_H$ est la représentation associée à la fonction continue de type positif u sur G.

D'après [2] p. 261, 13.6.2. pour montrer que $\pi|_H$ est irréductible , il suffit de montrer que dans toute décomposition $u = u_1+u_2$ en somme de deux fonctions continues de type positif, u_1 et u_2 sont proportionnelles à u. Soit donc $u = u_1+u_2$ une telle décomposition avec $u_1 \in B(G)$, $u_2 \in B(G)$, $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$. On a $||u_1||=u_1(e)$ et $||u_2||=u_2(e)$, d'où $1 =||u||=u(e) = u_1(e)+u_2(e)$. On en déduit $||u_1||+||u_2||=1$. D'autre part on peut écrire $B(G) = A_{\pi_i} \oplus A_r$ ([1] th. (3.18), p.53). Appliquant le lemme (1.8) on voit que u est extrémal dans la boule unité de B(G).

Or $u = ||u_1||\frac{u_1}{||u_1||} + ||u_2||\frac{u_2}{||u_2||}$, d'où $u = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{u_2}{||u_2||}$.

Par suite $\pi|_H$ est irréductible, donc équivalent à l'un des π_i et $u \in A_{\pi|_H} = A_{\pi_i}$. En outre, u est extrémal dans la boule unité de A_{π_i} donc est de la forme $u = \xi_i * \eta_i$; $\xi_i \in \mathcal{H}_i$; $\eta_i \in \mathcal{H}_i$ $||u||=||\xi_i||=||\eta_i||= 1$.

On ne suppose plus $\xi = \eta$.

Soit $u = T\zeta * \zeta$ la décomposition polaire de u. D'après (1.2), $\zeta * \zeta$ est extrémal dans $\mathcal{B}$. D'après ce qui précède, $\zeta * \zeta$ est de la forme $\alpha_i * \beta_i$, avec $\alpha_i \in {}_i$; $\beta_i \in \mathcal{H}_i$ $||\alpha_i||=||\beta_i||=1$, pour un certain i. De plus, $T \in VN_\pi$; donc $T\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_i$.

On a alors $u = T(\zeta * \zeta) = T(\alpha_i * \beta_i) = T\alpha_i * \beta_i$

et $||u|| \leqslant ||T\alpha_i||\ ||\beta_i|| \leqslant ||\alpha_i||\ ||\beta_i|| = 1 = ||u||$;

d'où $||T\alpha_i|| = 1$, ce qui achève la démonstration.

(1.9) REMARQUE. - Le théorème a d'abord été démontré dans le cas où G est unimodulaire et π la représentation régulière de G par G. Mauceri ([3]).

2. - On conserve les notations du § 1) et on suppose en plus que $A_\pi = B_\pi$. On va montrer que π est somme de multiples de représentations irréductibles.

L'espace de Banach A_π est alors l'espace de Banach dual de C^*_π, la fonction $u \in A_\pi$ étant identifiée à la forme linéaire $\pi(f) \longmapsto \int_G f(x)\, u(x)dx$ pour $f \in L^1(G)$.

(2.1) PROPOSITION. - *L'espace* A_τ *est* $\sigma(A_\pi, C^*_\pi)$ *dense dans* A_π.

En effet, pour la topologie de dualité $\sigma(A_\pi, C^*_\pi)$, la boule unité $\mathscr{B}$ de A_π est compacte. Elle est donc l'enveloppe convexe $\sigma(A_\pi, C^*_\pi)$-fermée de ses points extrémaux. Or les points extrémaux de $\mathscr{B}$ sont dans A_τ d'après (1,8). On a alors le résultat.

(2.2) COROLLAIRE. - *Soit* $T \in C^*_\pi$. *Alors*

$$||T|| = \operatorname{Sup}\{|\langle T,u\rangle|,\ u \in A_\tau,\ ||u|| \leqslant 1\}.$$

En effet T est une forme linéaire $\sigma(A_\pi, C^*_\pi)$ continue sur A_π et sur $\mathscr{B}$ elle atteint son maximum en un point extrémal qui est donc dans A_τ.

On va maintenant construire une $*$ isométrie entre les algèbres C^*_π et C^*_τ. On a pour $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}||\pi(f)|| &= \mathrm{Sup}\{|\langle\pi(f),u\rangle|,\ u \in A_\tau\ ,\ ||u|| \leqslant 1\}\\ &= \mathrm{Sup}\{|\int_G f(x)u(x)dx|\ ,\ u \in A_\tau\ ,\ ||u|| \leqslant 1\}.\end{aligned}$$

D'autre part $\tau(f) \in VN_\tau$, d'où

$$\begin{aligned}||\tau(f)|| &= \mathrm{Sup}\{|\langle\tau(f),u\rangle,\ u \in A_\tau\ ,\ ||u|| \leqslant 1\}\\ &= \mathrm{Sup}\{|\int_G f(x)u(x)dx|\ ,\ u \in A_\tau\ ,\ ||u|| \leqslant 1\}.\end{aligned}$$

Et, par suite, $||\pi(f)|| = ||\tau(f)||$ pour tout $f \in L^1(G)$.

D'autre part, puisque $\tau(x)$ est la restriction de $\pi(x)$ à $\mathscr{H}_\tau$ pour $x \in G$, on a

$$\pi(f)|_{\mathscr{H}_\tau} = \tau(f) = P\circ\pi(f) \text{ pour } f \in L^1(G)$$

P étant le projecteur sur $\mathscr{H}_\tau$. La dernière égalité suppose, ce que nous ferons toujours, que l'on identifie un opérateur T sur $\mathscr{H}_\tau$ à l'opérateur sur $\mathscr{H}$ qui est nul sur $\mathscr{H}_\tau^\perp$ et qui coïncide avec T sur $\mathscr{H}_\tau$. Cette identification est une $*$ isométrie de $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\tau)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

(2.3) **PROPOSITION.** - *L'application $\pi(f) \mapsto \tau(f)$ se prolonge en une $*$-isométrie φ de C^*_π sur C^*_τ. Pour $T \in C^*_\pi$, on a $\varphi(T) = P.T$.*

Il suffit de remarquer que les $\pi(f)$, pour $f \in L^1(G)$, sont denses dans C^*_π et que les $\tau(f)$ le sont dans C^*_τ, pour obtenir que φ est une isométrie. Que φ soit un $*$-homomorphismes résulte de l'égalité $\tau(f) = P.\pi(f)$ et du fait que P est un projecteur central de VN_π.

(2.4) PROPOSITION. - *Les espaces de Banach de fonctions sur* G, B_τ *et* A_π *sont égaux.*

On va voir que l'application $\theta : B_\tau \dashrightarrow A_\pi$, obtenue en transposant φ est l'identité.

Soit $\bar{u} \in B_\tau = (C^*_\tau)'$. Alors $\bar{u}$ est identifié à la seule fonction continue u sur G, vérifiant

$$<\bar{u}, \tau(f)> = \int_G f(x)u(x)dx \text{ pour tout } f \in L^1(G).$$

D'autre part, $\theta(\bar{u}) \in (C^*_\pi)'$ est identifié à la seule fonctions continue v sur G vérifiant

$$< \theta(\bar{u}), \pi(f)> = \int_G f(x) v(x)dx \text{ pour tout } f \in L^1(G).$$

D'après la définition de θ on a, pour $f \in L^1(G)$:

$$<\theta(\bar{u}), \pi(f)> = <\bar{u}, \varphi(\pi(f))> = <\bar{u}, \tau(f)> \text{ c'est-à-dire}$$

$$\int_G f(x)u(x)dx = \int_G f(x) v(x)dx \quad \text{pour tout } f \in L^1(G).$$

Par suite $u = v$; θ est l'identité et $B_\tau = A_\pi$.

(2.5) PROPOSITION. - *Les espaces de Banach* A_τ *et* B_τ *sont égaux.*

Soit $u \in B_\tau$ $(=A_\pi)$. Pour que u soit dans A_τ il faut et il suffit que l'application $\tau(f) \mapsto <\tau(f),u>$ soit ultrafaiblement continue sur C^*_τ . Or $u \in A_\pi$; donc la forme linéaire $T \longmapsto <T,u>$ sur VN_π est ultrafaiblement continue. De plus la topologie ultrafaible de VN_τ est induite par celle de VN_π . Donc la restriction de u à $C^*_\tau \subset VN_\tau$ est ultrafaiblement continue et $u \in A_\tau$.

(2.6) THEOREME. - *Sous l'hypothèse* $A_\pi = B_\pi$ *on peut écrire* $\pi = \bigoplus_i n_i \pi_i$, *où les* π_i *sont des représentations irréductibles de multiplicité* n_i .

La proposition (2.5) montre que $A_\tau = A_\pi$, donc $A_\sigma = \{0\}$ d'où $\sigma = 0$; or $\pi = \sigma \oplus \tau$, donc $\pi = \tau$ et le résultat.

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] G. ARSAC, *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire*. PubL. Dép. Math. Lyon, Tome 13 fasc. 2, p. 1-101.

[2] J. DIXMIER, *Les C -algèbres et eleurs représentations*.Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[3] P. EYMARD, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*. Bull. Soc. Math. France, t. 92 (1964), p. 181-236.

[4] G. MAUCERI, *Square integrals représentations and the Fourier Algebra of a unimodular group*. Pacific J. Math. 73, (1977) p. 143-147.

[5] P. NOUYRIGAT, *Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une représentation unitaire d'un groupe localement compact*. Publ. Dép. Math. Lyon (1972), tome 9 fasc; 2, p. 31-59.

P. NOUYRIGAT
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE cedex