PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MARCO FONTANA

Carrés cartésiens et anneaux de pseudo-valuation

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1980, tome 17, fascicule 1
, p. 57-95
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1980__17_1_57_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1980 t.17-1

CARRES CARTESIENS ET ANNEAUX DE PSEUDO-VALUATION (*)

par
MARCO FONTANA (**)

INTRODUCTION ET SOMMAIRE

Le but de ce papier est celui de développer la théorie des anneaux de pseudo-valuation, au sens de HEDSTROM-HOUSTON [24] qui les ont introduits, compte tenu de quelques résultats récents de ANDERSON-DOBBS [3] permettant de relier cette théorie à celle des carrés cartésiens des anneaux commutatifs. A partir de ce nouveau point de vue, nous parvenons, d'une part, à récouvrer facilement et directement (en faisant appel principalement à des simples propriétés topologiques et d'ordre du spectre premier et à quelques résultats généraux sur les carrés cartésiens prouvés par FONTANA [13]) la plupart des résultats démontrés avec

---

Classification AMS (MOS) 1980: 13A18, 13A15, 13A17, 13B20, 13B30.

Vedettes Matières: anneau de pseudo-valuation, carré cartésien, anneau cohérent, anneau de valuation, QQR-anneau, GQR-anneau.

(*) Travail effectué dans le cadre des activités du C.N.R. (Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni).

(**) Je désire remercier M. Maury, son équipe de recherche et, en particulier, A. Bouvier pour m'avoir offert la possibilité de traiter ces arguments dans leur Séminaire, pendant mon séjour á Lyon (avril 1980).

des procédés proprement algébriques et techniques par HEDSTROM-HOUSTON [24], [25] et DOBBS [10], et, d'autre part, à étendre les connaissances sur la structure des anneaux de pseudo-valuation.

L'intérêt porté à cette classe d'anneaux, qui est prouvé par les différentes études qui ont été effectuées récemment sur le sujet (cf. [3], [8], [9], [10], [24] et [25]), est dû non seulement au fait que ces anneaux sont étroitement liés aux anneaux de valuation, mais, aussi, au fait que les anneaux de pseudovaluation fournissent les exemples probablement plus significatifs d'anneaux divisés (d'après AKIBA [1] et DOBBS [8]), et donc de GD-anneaux, non intégralement clos.

Les principales nouveautés contenues dans le présent papier touchent l'opération de normalisation des anneaux de pseudo-valuation, la structure et les propriétés des sur-anneaux d'un anneau de pseudo-valuation. Plus particulièrement, on signale plusieurs caractérisations des anneaux de pseudo-valuation dont tous les sur-anneaux vérifient quelque propriété de finitude ou dont tous les sur-anneaux sont des anneaux de fractions d'un type plus ou moins général. En outre, on prouve un résultat, qui assure que tout anneau de pseudo-valuation, quoiqu'il ne soit pas normal en général, est un anneau seminormal (au sens de TRAVERSO [42]).

Un paragraphe à part est dédié à la construction et à l'analyse de plusieurs nouveaux exemples qui, en tre autres, mettent en évidence les différences plus ou moins importantes, qui existent entre les diverses classes d'anneaux de pseudo-valuation étudiées ici.

0. RAPPELS ET PRELIMINAIRES

Tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Tout homomorphisme d'anneaux envoie l'élément neutre dans l'élément neutre.

Si A est un anneau, on dénote par Spec(A) l'ensemble des idéaux premiers de A muni de la topologie de Zariski (sauf mention explicite, le cas échéant) et ordonné par rapport à la relation d'inclusion ensembliste.

Si $f: A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, on dénote par $f^*: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ l'application continue canoniquement associée à f.

Si $\underline{p}$ est un idéal premier d'un anneau A, on dit que $\underline{p}$ *est un idéal branché dans* A s'il existe, au moins, un idéal $\underline{p}$-primaire propre dans A.

Si A est un anneau intègre et si K est son corps de fractions, alors, pour tout couple de sous-A-modules M et N de K, on dénote par $(M:_K N)$ (ou, simplement, par $(M:N)$) le sous-A-module de K formé de tous les éléments $x \in K$ tels que $x N \subseteq M$. Par *idéal divisoriel* de A, on entend un idéal non zéro $\underline{a}$ de A tel que $(A:(A:\underline{a})) = \underline{a}$. Par *sur-anneau* de A, on entend un anneau B qui est un sous-anneau de K et qui contient A comme sous-anneau.

Si $f\colon A \to B$ est un homormorphisme d'anneaux et si F est un B-module, alors on pose par simplicité $a \cdot F$, à la place de $f(a)F$, pour tout $a \in A$.

Pour faciliter la lecture, on rappelle aussi quelques notions et résultats de [10], [13] et [24] auxquels nous ferons référence par la suite.

(0.1) Soient A un anneau intègre, K son corps de fractions et $\underline{p}$ un idéal premier de A. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(i) $xy \in \underline{p}$ et $x,y \in K \Rightarrow x \in \underline{p}$ ou $y \in \underline{p}$;

(ii) pour tout $x \in K \setminus A$, $x^{-1}\underline{p} \subseteq \underline{p}$,

(cf. [24; Prop. 1.2]). *Un idéal* $\underline{p}$ qui vérifie une des conditions précédentes est appelé *fortement premier*. Un anneau intègre dont tous ses idéaux premiers sont fortement premiers est appelé *anneau de pseudo-valuation* (en bref: PVD); cf. HEDSTROM-HOUSTON [24; Sec.1]. Il est clair que tout anneau de valuation est un anneau de pseudo-valuation.

(0.2) Un anneau intègre A est dit *anneau divisé* (en bref: DD) si, pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A, une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

(i) $\underline{p} = \underline{p}A_{\underline{p}}$;

(ii) $A = A + \underline{p}A_{\underline{p}}$;

(iii) le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/\underline{p} \arrow[d] \\ A_{\underline{p}} \arrow[r] & \mathbf{k}(\underline{p}) \end{tikzcd}$$

est cartésien; cf. DOBBS [8] et aussi FONTANA [14].

(0.3) Il n'est pas difficile de montrer que:

(a) Tout PVD est un DD, donc, en particulier, son spectre premier est totalement ordonné et, par conséquent, il est un anneau local; cf. [10; Sec. 4].

(b) Si $\underline{p}$ et $\underline{q}$ sont deux idéaux premiers d'un anneau intègre A, si $\underline{p} \subseteq \underline{q}$ et si $\underline{q}$ est fortement premier, alors $\underline{p}$ est de même.

De (a) et (b), il s'ensuit que:

(c) Un anneau local $(A,\underline{m})$ est un PVD si, et seulement si, $\underline{m}$ est un idéal fortement premier.

Du point (a), il découle que tous les résultats concernant les DD (cf. par exemple FONTANA [14]) restent valables aussi pour les PVD.

(0.4) Soient $(A,\underline{m},k)$ un anneau local et k' un sous-corps de k. Considérons le diagramme cartésien suivant:

$$\begin{tikzcd} A'=A\times_k k' \arrow[r, two heads, "v'"] \arrow[d, hook, "u'"] & k' \arrow[d, hook, "u"] \\ A \arrow[r, two heads, "v"'] & k \end{tikzcd}$$

dans lequel tous les homormorphismes sont des homormorphismes canoniques et identifions, par simplicité, A' avec son image dans A. Alors:

(a) $\underline{m} \cap A' = \underline{m}$ est le conducteur de $A' \hookrightarrow A$;

(b) Pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A, $\underline{p} \cap A' = \underline{p}$. En outre, si $\underline{p} \neq \underline{m}$ l'homomorphisme canonique $A'_{\underline{p}} \to A_{\underline{p}}$ est un isomorphisme.

(c) A' est un anneau intègre si, et seulement si, A est un anneau intègre. Dans ce cas, si $A \neq k$ (c.-à-d. $A' \neq k'$), A' et A ont le même corps de fractions.

(d) Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(d_1) u' est de type fini;

(d_2) u' est fini;

(d_3) $[k: k'] < \infty$.

(e) A' est un anneau noethérien si, et seulement si, A est un anneau noethérien et $[k: k'] < \infty$.
Cf. [13; Prop. 2.1, Prop. 2.2, Th. 2.3].

1. CARRES CARTESIENS ET PVD

Dans ce premier paragraphe, nous nous proposons de développer l'étude des anneaux de pseudo-valuation dans l'esprit, auquel nous avons fait allusion dans la introduction. Commençons à démontrer un important résultat, dont la preuve est seulement esquissée par ANDERSON-DOBBS [3].

THEOREME 1.0. (Anderson-Dobbs). *Tout anneau de pseudo-valuation* A *peut être obtenu en faisant le produit fibré d'un anneau de valuation* $(V, \underline{m}, k(V))$ *avec un sous-corps* k *de* k(V), *au-dessus de* k(V):

$$(\square_A) \qquad \begin{array}{ccc} A \cong V \times_{k(V)} k & \xrightarrow{v'} & k \\ \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ V & \xrightarrow{v} & k(V) \end{array}$$

Par conséquence, si nous identifions par simplicité A *avec son image* u'(A) *dans* V, *alors:*

(a) $\underline{m} \cap A = \underline{m}$; *donc* $\underline{m}$ *est le conducteur de* $A \hookrightarrow V$;

(b) *L'application continue* u'^{*}: $\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(A)$ *est l'homéomorphisme identique; elle coïncide avec l'isomorphisme identique de schémas au-dehors de* $\{\underline{m}\}$;

(c) A *et* V *ont le même corps de fractions* F;

(d) *Si* A *n'est pas un anneau de valuation, alors l'anneau de valuation* V *dans le diagramme* $(\square_A)$ *est univoquement déterminé par* A, *étant*

$$V = (A : \underline{m}) = (\underline{m} : \underline{m}).$$

DEMONSTRATION. On sait que, si on donne un anneau de valuation $(V, \underline{m}, k(V))$ et un diagramme cartésien comme le carré $(\square_A)$, les propriétés (a), (b) et (c) sont nécessairement vérifiées (cf. (0.4) ou [13]). Donc $(A, \underline{m})$ est un anneau local. En outre, $\underline{m}$ est un idéal fortement premier dans A, car, si $x \in F \setminus A$, alors soit $x \in F \setminus V$ soit $x \in V \setminus A$, donc soit $x^{-1} \in \underline{m}$ soit $x^{-1} \in V$ (étant V un anneau de valuation), d'où on conclut que $x^{-1}\underline{m} \subseteq \underline{m}$. En ce qui concerne (d), compte tenu de l'affirmation (a), il est évident que $V \subseteq (\underline{m} : \underline{m}) \subseteq (A : \underline{m})$. Si, par l'absurde, il existe $x \in (A : \underline{m})$ et $x \notin V$, alors $x\underline{m} \subseteq A$, mais $x\underline{m} \nsubseteq \underline{m}$, et $x^{-1} \in \underline{m}$ donc $x\underline{m} = A$, c'est-à-dire $\underline{m} = x^{-1}A$. Mais, alors $(\underline{m} : \underline{m}) = A$, d'où une contradiction. Réciproquement, si on donne un PVD $(A, \underline{m})$ et si $V = (\underline{m} : \underline{m})$, alors V est un anneau de valuation de F, ayant comme idéal maximal $\underline{m}$,

et $(\underline{m} : \underline{m}) = (A : \underline{m})$.
En effet, si $x \in F \setminus V$, il existe $m \in \underline{m}$ de façon telle que $xm \notin \underline{m}$; du fait que $x^{-1}xm \in \underline{m}$ et que $xm \notin \underline{m}$, il découle que $x^{-1} \in \underline{m}$. Pour terminer, il suffit de remarquer que A est canoniquement isomorphe à $V \times_{V/\underline{m}} A/\underline{m}$. ■

Par la suite, nous noterons par $(V_A, \underline{m}, k(V_A))$, ou simplement par $(V, \underline{m}, k(V))$, le sur-anneau de valuation canoniquement associé à un PVD $(A, \underline{m}, k(A))$ donné (cf. Th. 1.0). Pour éviter le cas trivial, nous supposerons toujours que $\underline{m} \neq (0)$.

Du théorème précédent et de quelques résultats de FONTANA [13], nous obtenons immédiatement toute une série de conséquences sur les anneaux de pseudo-valuation, dont la plupart des propriétés connues, qui permettent d'approfondir les connaissances relatives à la structure de cette classe d'anneaux.

Commençons par donner un Corollaire, qui décrive la structure des idéaux d'un PVD, en éclairant les analogies et différences existentes avec celle des idéaux d'un anneau de valuation.

COROLLAIRE 1.1. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0.

(a) *L'ensemble des idéaux premiers de* A *est totalement ordonné. Donc, en particulier, pour tout idéal* $\underline{a}$ *de* A, *nous avons que* $\mathrm{rad}_A(\underline{a})$ *est un idéal premier de* A.

(b) *Si* $\underline{h}$ *est un idéal* $\underline{p}$*-primaire dans* A *et si* $\underline{p} \neq \underline{m}$, *alors* $\underline{h}$ *et* $\underline{p}$ *sont des idéaux de* V *(c.-à-d.* $\underline{h}V = \underline{h}$ *et* $\underline{p}V = \underline{p}$*) et, donc, en particulier,* $\underline{h}$ *est un idéal* $\underline{p}$*-primaire dans* V.

(c) *Un idéal premier est branché dans* A *si, et seulement si, il est branché dans* V.

(d) *Soient* $A \neq V$ *et* $\underline{a}$ *un idéal de* A. *Si* $\underline{a}V \supsetneqq \underline{a}$, *alors il existe un élément* $\alpha \in \underline{a}V \subseteq \underline{m}$ *et un sous-*A*-module* E *de* V *(ou, ce qui revient au même, un sous-*k*-espace vectoriel* $\mathcal{E}$ *de* k(V)*) de façon telle que:*

$$\underline{a}V = \alpha V,\ \underline{a} = \alpha\underline{m} + \alpha E\,(\cong \alpha\underline{m} + \alpha\cdot\mathcal{E},\ E \cong v^{-1}(\mathcal{E})).$$

De plus, $\underline{a}$ *est de type fini si, et seulement si,* E *(resp.* $\mathcal{E}$*) est un* A*-module (resp.* k*-espace vectoriel) de type fini (resp. de dimension finie).*

(e) *Si* $\underline{a}$ *est un idéal principal propre de* A *et si* $A \neq V$, *alors* $\underline{a} \subsetneqq \underline{a}V$. *En particulier, si* A *possède un idéal premier principal non nul, alors* $A = V$.

(f) *Si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont deux idéaux de* A*, alors soit* $\underline{a} \subseteq \underline{b}$ *soit* $\underline{b}^2 \subseteq \underline{b}\underline{m} \subseteq \underline{a}$.

(g) *Si* $\underline{I}$ *est un idéal de* V*, alors* $\underline{I} \cap A = \underline{I}$ *(c.-à-d.* $\underline{I}$ *est aussi un idéal dans* A*) et, mieux, si* $\underline{I} \neq (0)$, $\underline{I}$ *est divisoriel dans* A.

(h) *Si* $\underline{a}$ *est un idéal de* A *et si* $\underline{a}$ *n'est pas principal, alors* $\underline{a}V = ((A : (A : \underline{a}))$. *Donc, les idéaux divisoriels non principaux de* A *coïncident avec les idéaux non nuls de* V.

(i) *Tout idéal de* A *est comparable (par rapport à la relation d'inclusion) à tout idéal premier de* A.

(j) *Si* $\underline{a}$ *est un idéal de* A *comme dans* (d)*, alors il existe* $\alpha \in \underline{a}V$ *de façon telle que* $\underline{a}\underline{m} = \alpha\underline{m}$.

(k) *Si* $\underline{a}$ *est un idéal propre de* A, *alors:*

$$\bigcap_{n\geq 1} \underline{a}^n \overset{\text{not.}}{=\!=} \underline{p}_{\underline{a}}$$

est un idéal premier (de A*). En outre, si* $\underline{a}^h = \underline{a}^{h+1}$ *pour un quelque* $h \geq 1$, *alors* $\underline{p}_{\underline{a}}$ *est un idéal premier idempotent.*

(ℓ) *Si* $\underline{a}$ *est un idéal propre de* A *et si* $\underline{p}$ *est un idéal premier (de* A*), tel que* $\underline{p} \subseteq \underline{a}$, *alors* $\underline{p} \subseteq \underline{p}_{\underline{a}}$.

(m) *Si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont deux idéaux de* A *et si* $\underline{a} \subseteq \mathrm{rad}_A(\underline{b})$, *alors il existe* $n \geq 1$ *de façon telle que* $\underline{a}^n \subseteq \underline{b}$.

(n) *Si* $\underline{h}$ *est un idéal* $\underline{p}$*-primaire de* A *et si* $x \in A \setminus \underline{p}$, *alors* $x\underline{h} = \underline{h}$. *Si* $\underline{h}$ *est de type fini, alors nécessairement* $\underline{p} = \underline{m}$.

(o) *Soient* $\underline{p}$ *un idéal premier (de* A*) et* $P_A(\underline{p})$ *l'ensemble des idéaux* $\underline{p}$*-primaires dans* A, *qui sont différents de* $\underline{p}$. *Alors:*

$$\underline{h},\ \underline{h}' \in P_A(\underline{p}) \Rightarrow \underline{hh}' \in P_A(\underline{p}).$$

En particulier, $\{\underline{p}^n \mid n \geq 2\}$ *est contenu dans* $P_A(\underline{p})$.

(p) *Si* $\underline{p}$ *est un idéal premier (de* A*) et si* $\underline{p}^2 \subsetneqq \underline{p} \subsetneqq \underline{m}$, *alors* $P_A(\underline{p}) = \{\underline{p}^n \mid n \geq 2\}$.

(q) *Si* $\underline{p}$ *est un idéal premier branché (de* A*) (c.-à-d. si* $P_A(\underline{p}) \neq \emptyset$*), alors, pour tout* $\underline{t} \in P_A(\underline{p})$:

$$\bigcap_{n\geq 1} \underline{t}^n = \bigcap_{\underline{h}\in P_A(\underline{p})} \underline{h}\ .$$

(r) *Si* $\underline{p}$ *est un idéal premier branché (de* A*), alors:*

$$\bigcap_{\underline{h}\in P_A(\underline{p})} \underline{h} \overset{\text{not.}}{=\!=} \underline{p}_o$$

est un idéal premier de A, *tel qu'il n'existe aucun idéal de* A *proprement contenu entre* $\underline{p}_o$ *et* $\underline{p}$.

(s) *Si* $\underline{p}$ *est un premier (de* A*), alors les conditions suivantes sont équivalentes entre elles:*

(s_1) $\underline{p}$ *est branché dans* A*;*

(s_2) *il existe un idéal* $\underline{a}$ *de* A*, de façon telle que* $\underline{a} \subsetneqq \mathrm{rad}_A(\underline{a}) = \underline{p}$*;*

(s_3) *il existe* $a \in A$ *de façon telle que* $aA \subsetneqq \mathrm{rad}_A(aA) = \underline{p}$*;*

(s_4) *l'idéal* $\underline{p}$ *ne peut pas être obtenu comme réunion d'une chaîne d'idéaux premiers de* A *proprement contenus dans* $\underline{p}$*;*

(s_5) *il existe un idéal premier* $\underline{p}_o$ *(de* A*) de façon telle que tout autre idéal premier (de* A*) ne peut pas être inclus proprement dans* $\underline{p}$*, sans être inclus dans* $\underline{p}_o$.

DEMONSTRATION. (a) découle du Th. 1.0(b) et de [30; Ch. 4, Prop. II.3]. (b): La preuve est analogue à celle donnée par GILMER pour démontrer le point (e) du Th. A dans [18; Appendix 2, p. 561]. (c): Si $\underline{p} \neq \underline{m}$, la présente affirmation est une conséquence immédiate de (b). Supposons que $\underline{p} = \underline{m}$. Etant $\underline{m}$ l'idéal maximal de A et V, si $\underline{I} \subsetneqq \mathrm{rad}_V(\underline{I}) = \underline{m}$, pour un quelque idéal $\underline{I}$ de V, alors $\underline{I} \cap A \subsetneqq \underline{m} = \mathrm{rad}_V(\underline{I}) \cap A = \mathrm{rad}_A(\underline{I} \cap A)$; si $\underline{m}$ est non-branché dans V et si, par l'absurde, il existe un idéal $\underline{a}$ de A de façon telle que $\underline{a} \subsetneqq \mathrm{rad}_A(\underline{a}) = \underline{m}$, alors $\mathrm{rad}_V(\underline{am}) = \underline{m}$ [18; Th. 14.3, p. 173] donc $\underline{am} = \underline{m}$, d'où un absurde: $\underline{m} = \underline{am} \subseteq \underline{a}$. (d): la preuve est inspirée par un raisonnement déjà utilisé par GILMER (cf. [18; Appendix 2, Th. A(k), p. 562]); elle est dévelop pée, avec tous les détails, par FONTANA [14; Lemme 1.14] dans un cas à peine plus général. L'affirmation (e) est triviale, car V(et A $\subsetneqq$ V) sont des anneaux intègres. (f): Si $a \in \underline{a} \setminus \underline{b}$, pour tout $b \in \underline{b}$, $b \neq 0$, on a que $a/b \notin A$, donc $b/a\,\underline{m} \subseteq \underline{m}$ et, par conséquent, $b\underline{m} \subseteq a\underline{m} \subseteq \underline{a}\underline{m} \subseteq \underline{a}$. L'affirmation (g) (resp. (h)) à été demontrée par HEDSTROM-HOUSTON à partir de la (f) (resp. (g)); cf. [24; Th. 2.13 et Prop. 2.14]. (i) est une conséquence immédiate de la (f), car si $\underline{p}$ est un idéal premier de A, si $\underline{a}$ est un idéal quelconque de A et si $\underline{p} \not\subseteq \underline{a}$, alors $\underline{a}^2 \subseteq \underline{p}$, donc $\underline{a} \subseteq \underline{p}$. (j) découle facilement de (d), car $\underline{am} = \underline{am}V = \alpha\underline{m}V = \alpha\underline{m}$. (k) s'ensuit de (f) (cf. aussi [24; Prop. 2.4]). (ℓ): Si $\underline{p} \subsetneqq a$, alors $\underline{p} \subseteq \underline{a}^h$ pour tout $h \geq 1$, car autrement il existerait un index $h_o \geq 2$ de façon telle que $\underline{a}^{h_o} \subseteq \underline{p}$ (cf. (f)), d'où l'absurde que $\underline{a} \subseteq \underline{p}$. (m): Si, par l'absurde, $\underline{a}^n \not\subseteq b$ pour tout $n \geq 1$, alors $\underline{b}^2 \subseteq \underline{a}^n$ pour tout $n \geq 1$ (cf. (f)), donc $\underline{b}^2 \subseteq \underline{p}_{\underline{a}}$ et, par conséquent, $\underline{b} \subseteq \underline{p}_{\underline{a}} \subseteq \underline{a}$, ce qui est absurde. La première affirmation contenue dans (n) s'ensuit immédiatement de la (b) et de [18; Th. 14.3(a), p. 173]. La deuxième affirmation est une conséquence facile du Lemme de Nakayama. (o): Il est clair que $\mathrm{rad}_A(\underline{hh}') = \underline{p}$. Si $x \in A$, $y \in A \setminus \underline{p}$ et $xy \in \underline{hh}'$, alors, compte tenu du fait que $y\underline{h} = \underline{h}$ (cf. (m)), $xy \in y\underline{hh}'$, donc $x \in \underline{hh}'$. Les affirmations (p), (q), (r) et (s) s'ensuivent facilement des résultats analogues concernant les anneaux de valuation (cf. par exemple [18; Th. 14.3, p. 173]). En effet, en ce qui concerne (p), si $\underline{p} \neq \underline{m}$, alors $A_{\underline{p}} = V_{\underline{p}}$

est un anneau de valuation; pour les autres points, les démonstrations sont tout à fait analogues à celles données dans [18; loc. cit.] pour prouver les affirmations c), d) et e), compte tenu du Th. 1.0 ((a) et (b)) et des points (b), (c), (f), (k), (ℓ) et (m).■

REMARQUE 1.2. (a). Si $A \neq V$, les affirmations (b) et (p) du Cor. 1.1 ne sont plus valables pour $\underline{p} = \underline{m}$; cf. l'exemple (2.1).

(b). Bien que tout anneau de valuation soit un S-anneau (d'après GILMER et KIKUCHI; cf. [16; Sec. 2] et [28]), il n'est pas vrai, en général, que un PVD soit aussi un S-anneau; cf. l'exemple (2.1).

En ce qui concerne les sur-anneaux, nous allons montrer que les PVD possèdent une variété d'espèces de sur-anneaux bien plus ample et différenciée que celle (monocorde) des anneaux de valuation.

PROPOSITION 1.3. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0. *Dénotons par* $\overline{k}$ *la fermeture algébrique de* $k = k(A)$ *dans* $k(V)$*, par* $\overline{A}$ *(resp.* A^**) la fermeture intégrale (resp. intégrale complète) de* A *dans* B *et par* A' *(resp.* C(A), C(V)*) la clôture intégrale (resp. intégrale complète) de* A *(resp.* A, V*).*

(a) *Tout sur-anneau de* A *est comparable (par rapport à la relation d'inclusion) avec* V. *Plus précisément, si* T *est un sur-anneau de* A *et si* $T \not\supseteq V$*, alors* $A \subseteq T \subsetneq V$ *et* $T = v^{-1}(v(T)) \cong V \times_{k(V)} v(T)$*; en outre, l'application* $\tilde{T} \mapsto T = V \times_{k(V)} \tilde{T}$*, où* $\tilde{T}$ *est une sous-*k-

algèbre de $k(V)$, *définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-*k*-algèbre de* $k(V)$ *et l'ensemble des sous-anneaux de* V *contenant* A *comme sous-anneau.*

(b) *Soit* T *un sur-anneau de* A, *alors:*

$$\dim(T)\begin{cases} \geq \dim(A), & si\ A \subseteq T \subseteq V \\ \\ \lneq \dim(A), & si\ V \subsetneq T \subseteq F. \end{cases}$$

(c) $\bar{A} = A' = A^*$ *et l'homomorphisme canonique* $\bar{A} \to V \times_{k(V)} \bar{k}$ *est un isomorphisme.*

(d) $C(A) = C(V)$.

DEMONSTRATION. La preuve de (a) est analogue à celle donnée par BASTIDA-GILMER pour les anneaux du type "$D + \underline{M}$" (cf. [5, Th. 3.1]). (c): Il est clair que $\bar{A} = A'$, car tout élément du corps de fractions de A (et V), qui est entier sur A, appartient à V. En outre, $\bar{A} = A^*$ car, dans la situation actuelle, un élément $v \in V$ est quasi-entier sur A si, et seulement si, $v + \underline{m} \in k(V)$ est quasi entier (ou, ce qui est de même, entier) sur k (cf. [18; Prop. 12.5]). Les vérifications des autres affirmations ne présentent aucune difficulté, compte tenu du Th. 1.0, du point (a), de [18; Th. 14.6, p. 181] et de [13; Prop. 2.1(5) et Prop. 2.2 (9)]. ∎

COROLLAIRE 1.4. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0 *et de la* Prop. 1.3.

(a) *Si* $A \neq V$, *alors* A *est intégralement clos si, et* *seulement si,* $k(A) \hookrightarrow k(V)$ *est une extension transcendante pure.*

(b) A *est complétement intégralement clos si, et seulement si,* $A = V$ *et* $\dim(A) = 1$.

(c) *Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(c_1) *Tout sur-anneau de* A *est un PVD;*

(c_2) A' *est un anneau de valuation;*

(c_3) $A' = V$;

(c_4) $k(A) \hookrightarrow k(V)$ *est une extension algébrique;*

(c_5) *Pour tout sur-anneau* T *de* A *tel que* $A \subseteq T \subseteq V$, *l'application canonique* $\mathrm{Spec}(T) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *est l'identité;*

(c_6) A *est un i-anneau;*

(c_7) *Pour tout sur-anneau* T *de* A, $\dim(T) \leq \dim(A)$.

DEMONSTRATION. L'affirmation (a) est une conséquence immédiate de la Prop. 1.3(c). La (b) découle facilement de la Prop. 1.3(d) et de [18; Th. 14.5(3), p. 179]. (c): Les implications (c_4) $\Rightarrow$ (c_3) $\Rightarrow$ (c_2) sont immédiates, compte tenu de la Prop. 1.3(c), ainsi que les implications (c_5) $\Rightarrow$ (c_6) $\Rightarrow$ (c_7), compte tenu de la Prop. 1.3((a) et (b)) et de [18; Th. 14.6(a), p. 181]. (c_7) $\Rightarrow$ (c_4): Si, par l'absurde, il existe un élément $x \in k(V)$ transcendant sur $k(A)$, le sur-anneau $T = V \times_{k(V)} k(A)[x]$ de A est tel que $\dim(T) = \dim(V) + 1 = \dim(A) + 1$ (cf. [13; Prop. 2.1(5)]), d'où un absurde. (c_2) $\Rightarrow$ (c_4): Compte tenu de la Prop. 1.3(c), il est bien connu que A' est un anneau de valuation si, et seulement si, $\bar{k} = k(V)$ (cf. [33; p. 35] ou, aussi, [13; Th. 2.4]). Les implications $(c_4) \Leftrightarrow (c_1) \Rightarrow (c_5)$ découlent du fait que, dans ce cas, toute sous-$k(A)$-algèbre de $k(V)$ est un corps (cf. [18; Lemma 9.1]), compte tenu du Th. 1.0 et de la Prop. 1.3(a).■

COROLLAIRE 1.5. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0.

(a) A *est un G-anneau (cf.* KAPLANSKY [27; Sec. 1, p. 12]*) si, et seulement si,* V *est un G-anneau.*

(b) *Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(b_1) A *est un anneau localement pqr (cf.* RAMASWAMY-VISWANATHAN [38; p. 50]*);*

(b_2) A *est un anneau ouvert (cf.* PAPICK [34; p. 10]*);*

(b_3) *Tout idéal premier de* A *possède un successeur immédiat.*

(c) A *est un anneau proprement ouvert (cf.* PAPICK [34; p.11]*) si, et seulement si,* V *est de même.*

(d) *Soit* $A \subsetneq V$. A *est un GQR-anneau (cf.* HEINZER [26]*) si, et seulement si,* $\underline{m} = \underline{m}^2$ *et il n'existe aucun corps intermédiaire entre* $k(A)$ *et* $k(V)$. *Si* $A = V$, *il est trivial que* A *est toujours un GQR-anneau.*

(e) A *est un T-anneau (c.-à-d. tout sur-anneau de* A *est un transformé par rapport à un idéal de* A*; cf.* BREWER-GILMER [7]*) si, et seulement si,* A *est un GQR-anneau et* V *est un T-anneau (c.-à-d. tout idéal premier, qui est l'intersection des idéaux premiers* *qui le contiennent, est idempotent* [7; Lemma 2.9 et Th. 2.10]*).*

(f) *Soit* A $\subsetneqq$ V. A *est un QQR-anneau (cf.* GILMER-HEINZER [19]*) si, et seulement si,* $\underline{m}$ *est non-branché et il n'existe aucun corps intermédiaire entre* k(A) *et* k(V). *Si* A = V, *il est trivial que* A *est toujours un QQR-anneau.*

(g) *Soit* A $\subsetneqq$ V. A *est un* Δ*-anneau (cf.* GILMER-HUCKABA [21]*) si, et seulement si, l'ensemble des sous-corps de* k(V), *qui contiennent* k(A), *est un ensemble totalement ordonné (par rapport à l'inclusion). Si* A = V, *il est trivial que* A *est toujours un* Δ*-anneau.*

(h) A *est un FGR-anneau (c.-à-d. tout sur-anneau de* A *est un* A*-module de type fini; cf.* [35] *et* [38]*) si, et seulement si, tout idéal premier de* V *possède un successeur immédiat et* $[k(V) : k(A)] < \infty$.

(k) *Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(k_1) A *est un anneau de valuation;*

(k_2) A = V;

(k_3) A *est un anneau de Prüfer;*

(k_4) A *est un anneau de Bézout;*

(k_5) A *est un anneau pseudo-bézoutien (= GCD-anneau);*

(k_6) A *est un QR-anneau* (cf. GILMER-OHM [22]).

(i) A *est un G-anneau fort (cf.* RAMASWAMY-VISWANATHAN [38; Sec. 3] *et* MAROSCIA [32]*) si, et seulement si,* A = V *et le spectre premier de* A *est un ensemble bien ordonné (par rapport à la relation d'inclusion).*

DEMONSTRATION. Les affirmations (a) et (b) découlent immédiatement du Th. 1.0 (b), compte tenu des caractérisations topologiques des anneaux du type considéré (cf. [14; Lemma 1.5] ou [15], [35; Th. 2],[38] et aussi [37]). La (c) s'ensuit du Th. 1.0 (b) et de la Prop. 1.3 (a). Quelques passages des démonstrations des affirmations (d), (e) et (f) sont inspirés par des raisonnements suivis par BASTIDA-GILMER [5] dans des situations similaires. Donnons quelques détails. (d): Il n'existe aucun corps k, $k(A) \subsetneqq k \subsetneqq k(V)$, car autrement, du fait que l'anneau $V\times_{k(V)}k$, $A \subsetneqq V\times_{k(V)}k \subsetneqq V$, doit être un anneau de quotients généralisé de A, il s'ensuivrait que k est un anneau de quotients (généralisé) de k(A) (cf. aussi [5; Th. 3.2 (1)]), ce qui est évidemment absurde. Montrons que $\underline{m} = \underline{m}^2$. Par hypothèse, il existe une partie multiplicative généralisée Σ de A de façon que $V = A_\Sigma$. Il n'est pas difficile de voir que si $\Theta = \{\underline{a} \in \Sigma \mid \underline{a} \subseteq \underline{m}\}$ et $\Theta' = \{\underline{a}V \mid \underline{a} \in \Theta\}$ alors $A_\Sigma = A_\Theta = V_{\Theta'}$ (cf. [5; Th. 3.2 (2)]), par conséquent, $\Theta = \Theta' = \{\underline{m}\}$ et $\underline{m} = \underline{m}^2$ (cf. [5; Lemma 3.4] ou [7; Lemma 2.8]). Réciproquement, on sait que tout sur-anneau propre de V peut être obtenu comme anneau de quotients (= localisation) de A. En outre, dans les hypothèses actuelles, il n'existe aucun sur-anneau T de A, tel que $A \subsetneqq T \subsetneqq V$ (cf. Prop. 1.3 (a)) et $V = (A : \underline{m}) = T_A(\underline{m})$, étant $\underline{m} = \underline{m}^2$. (e): La partie "seulement si„ est triviale, montrons la partie "si„ . En effet, par ce qui précède (cf. (d)), il n'existe aucun sur-anneau T de A, tel que $A \subsetneqq T \subsetneqq V$ et en outre $V = T_A(\underline{m})$; étant V un T-anneau, il est clair que tout sur-anneau de V peut être obtenu comme transformé d'un idéal de A (cf. Cor. 1.1 et [7; Lemma 2.8]). (f): Etant tout QQR-anneau un GQR-anneau, la conclusion suit facilement du point précédent, de la Prop. 1.3 (c) et de [19; Th. 3.3, p. 143]. L'affirmation (g) est une conséquence immédiate de la Prop. 1.3 (a) et de [21; Th. 1]. La (h) découle aussi de la Prop. 1.3 (a), compte tenu de (0.4 (d)), [35; Th. 2] et [34; Th. 3.16]. (k): Les implications $(k_4) \Rightarrow (k_3) \Leftrightarrow (k_1) \Rightarrow (k_2) \Rightarrow (k_4) \Rightarrow (k_5)$ et $(k_2) \Rightarrow (k_6) \Rightarrow (k_3)$ sont soit immédiates soit bien connues. L'implication $(k_5) \Rightarrow (k_4)$ découle d'un résultat de SHELDON [41; Th. 3.7], compte tenu du Cor. 1.1 (a). L'affirmation (i) suit de (k) et de (b), compte tenu de [38; Cor. 3.3 et Th. 3.5]. ■

Les théorèmes principaux, concernant les PVD noethériens et cohérents, démontrés par HEDSTROM-HOUSTON et DOBBS (cf. [24], [25], [9], [10]), peuvent maintenant être réobtenus et complétés, de façon simple et directe, à partir de quelques-uns des résultats précédents.

COROLLAIRE 1.6. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) A *est un anneau noethérien;*

(ii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini de* A *et* V *est un anneau de valuation discrète;*

(iii) $[k(V) : k(A)] < \infty$ *et* V *est un anneau de valuation discrète;*

(iv) A' *est un anneau noethérien et* $A \hookrightarrow A'$ *est un homomorphisme fini;*

(v) *Tout sur-anneau de* A *est un PVD noethérien.*

Donc, en particulier, tout PVD noethérien A *est un anneau tel que* A' = V *et* dim(A) = 1. *Par conséquence, nous pouvons affirmer que tout PVD noethérien intégralement clos est un anneau de valuation discrète.*

DEMONSTRATION. Les implications (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i), (iii)⇒(iv)⇒(v) découlent de (0.4 (d)), du Lemme de Nakayama (cf. aussi la preuve du Cor. 1.8) et de la Prop. 1.3 (pour l'implication (iv)⇒(v), se rappeler que (i)⇔(iii)). L'implication (v)⇒(i) est triviale. ■

REMARQUE 1.7. Les PVD, qui sont aussi des anneaux laskériens ou fortement laskériens (cf. [6; Ch. 4, § 2, Ex. 23 et 28]), ont été caractérisés par BARUCCI-FONTANA [4]. Plus précisément, avec les notations et hypothèses du Th. 1.0, dans [4] est démontré le résultat suivant:

A *est un PVD laskérien (resp. fortement laskérien) si, et seulement si,* dim(V) = 1 *(resp.* V *est un anneau de valuation discrète).*

COROLLAIRE 1.8. *Conservons les notations et hypothèses du* Th. 1.0. *Supposons, en outre, que* $A \neq V$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(i) A *est un anneau cohérent;*

(ii) A *est un anneau à conducteur fini (c.-à-d. pour tout* a, b $\in$ A, *l'idéal* aA $\cap$ bA *est de type fini; cf.* Mc ADAM [31]*)*;

(iii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini dans* A;

(iv) $\underline{m} \neq \underline{m}^2$ *et* $[k(V) : k(A)] < \infty$;

(v) $\underline{m}$ *est un idéal principal dans* V *et* $[k(V) : k(A)] < \infty$;

(vi) *Tout sur-anneau de* A *est un PVD cohérent.*

Donc, en particulier, si A *est un PVD cohérent, alors* A' = V. *En outre, dans le cas de dimension 1,* A *est un PVD cohérent si, et seulement si,* A *est un PVD noethérien.*

DEMONSTRATION. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est bien connue (cf. par exemple [30; Prop. II.5, p. 56]). La preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii) peut se faire en s'inspirant de la démonstration du Lemme 2 de [12]. Plus précisément, soient $v \in V \setminus A$ et $m \in \underline{m}$, $m \neq 0$. Nous affirmons que $mA \cap vmA = m\underline{m}$. En effet, il est clair que $m\underline{m} \subset mA$, $vm\underline{m} \subset vmA$ et $v\underline{m} = \underline{m}$ (car v est inversible dans V), donc $m\underline{m} \subseteq mA \cap vmA$. Réciproquement, si $a = ma' = vma''$ avec $a', a'' \in A$, alors $a'' \in \underline{m}$, car autrement $v = a'a''^{-1} \in A$, donc $a' = va'' \in \underline{m}$. Dans l'hypothèse actuelle, $m\underline{m}$ doit être un idéal de type fini dans A. Du fait que $\underline{m}$ et $m\underline{m}$ sont isomorphes, en tant que A-modules, nous déduisons que $\underline{m}$ est un idéal de type fini de A. Les implications (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) s'ensuivent facilement du Lemme de Nakayama, de [23; Lemma 1.3] et du fait que dans la situation présente, il doit exister un entier $r \geq 2$, de façon telle que:

$$k(V) \cong \underline{m}/\underline{m}^2 \cong k(A)^r$$

où le premier est un isomorphisme de $k(V)$-espaces vectoriels et le deuxième est un isomorphisme de $k(A)$-espaces vectoriels. (v) $\Rightarrow$ (i): Il suffit de démontrer que V est un A-module de présentation finie (cf. RICHMAN [40; Cor. 1.2]). Du fait que V est un A-module de type fini (cf. (0.4 (d))), nous pouvons affirmer qu'il existe un homomorphisme surjectif $A^r \longrightarrow V$ dont le noyau est isomorphe à la somme directe de $(r-1)$-copies de $\underline{m}$, d'où la conclusion, $\underline{m}$ étant un idéal de type fini. Compte tenu de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (v) et de la Prop. 1.3 (a), il est clair que (i) $\Rightarrow$ (vi). L'implication réciproque est triviale. Les autres affirmations découlent facilement de la Prop. 1.3 (c) et du Cor. 1.6, compte tenu du Théorème de Cohen (cf. [27; Th. 8]).■

REMARQUE 1.9. (a) Dans le cas d'un anneau (intègre) complètement intègralement clos, les notions de PVD noethérien, PVD cohérent, PVD à conducteur fini et anneau de valuation discrète coïncident (cf. Cor. 1.4, Cor. 1.6 et Cor. 1.8).

(b) En utilisant le langage des couples noethériens et cohérents (d'après WADSWORTH [43] et PAPICK [36]), avec les notations et hypothèses du Th. 1.0, les Corollaires 1.6 et 1.8, nous permettent d'affirmer que *les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(i) A *est un anneau noethérien (resp. cohérent);*

(ii) (A,V) *est un couple noethérien (resp. cohérent);*

(iii) (A,F) *est un couple noethérien (resp. cohérent).* Donc, en particulier, nous pouvons affirmer que, si A est un PVD noethérien, alors, pour tout sur-anneau B de A et pour tout idéal $\underline{b}$ de B, B/$\underline{b}$ est un A-module de type fini (cf. [43; Th. 2]).

(c) Soit (A,$\underline{m}$) un PVD. Si A est cohérent, alors A vérifie la propriété "topologique" suivante: Spec(A) muni de la "topologie plate" (ou, ce qui revient au même, de la topologie de "l'ordre opposé" de Hochster) (cf. [11; Sec. 2]) est tel que son point générique {$\underline{m}$} est ouvert. L'affirmation réciproque est fausse; voir l'exemple (2.2) suivant.

Nous avons vu (cf. Prop. 1.3 (c)) que, à la différence des anneaux de valuation, les anneaux de pseudo-valuation ne sont pas intégralement clos. Néanmoins, tout anneau de pseudo-valuation est seminormal dans le sens de TRAVERSO [42].

PROPOSITION 1.10. *Tout PVD est seminormal.*

DEMONSTRATION. Conservons les notations du Th. 1.0 et de la Prop. 1.3. Nous savons que la seminormalisation, +A, d'un anneau local intègre (A,$\underline{m}$), intégralement clos au-dehors de $\underline{m}$, tel est un PVD, est donné par A+J(A'), J(A') étant le radical de Jacobson de la clôture intégrale (ou normalisation) de A; cf. [42; p. 586]. Dans notre cas, $A' = v^{-1}(\bar{k}) \cong V \times_{k(V)} \bar{k}$, donc A' est local, ayant $\underline{m}$ comme idéal maximal. La conclusion est alors immédiate, car $+A = A + \underline{m} = A$. ■

Pour terminer, nous voulons signaler qu'un anneau local intègre seminormal n'est pas, en général, un PVD, même en dimension 1; voir l'exemple (2.9) suivant. Il se pose naturellement, alors, une question analogue à celle célèbre formulée par KRULL [29].

Un anneau local intègre de dimension 1 intégralement clos ou, mieux, complètement intégralement clos est nécessairement un PVD?

La réponse à cette question est négative, comme ou peut le voir en utilisant le même exemple construit par RIBENBOIM dans [39], pour répondre négativament à la question originaire de KRULL. En effet, on sait que un anneau intègre complètement intégralement clos, qui est aussi un PVD, est nécessairement un anneau de valuation (cf. Cor. 1.4).

2. EXEMPLES

Tout d'abord, il nous semble utile de préciser et résumer les rapports existant entre les différentes classes d'anneaux de pseudo-valuation, considérées dans le Paragraphe 1, à l'aide de quelques tableaux d'implications.

En ce qui concerne les PVD, dont l'ensemble des sur-anneaux est soumis à quelque propriété "remarquable", nous avons les implications suivantes:

$\boxed{\text{PVD}}$

$$
\begin{tikzcd}
& \text{G-anneau fort} \arrow[r, phantom, "\overset{(1)}{=}"] \arrow[ddl, Rightarrow, "(2)^{(+)}"] & \text{anneau de valuation ouvert} \arrow[d, Rightarrow, "(7)"'] \arrow[ddrr, Rightarrow, "(8)"] & & \\
& & \text{anneau de valuation = QR-anneau} \arrow[dddr, Rightarrow, "(9)"] & & \\
\text{FGR-anneau} \arrow[d, Rightarrow, "(3)"] & & & & \text{T-anneau} \arrow[ddd, Rightarrow, "(10)"] \\
\text{anneau ouvert} \arrow[r, phantom, "\overset{(4)}{=}"] \arrow[d, Rightarrow, "(5)"] & \text{anneau localement pqr} \arrow[d, Rightarrow, "(6)"] & & & \\
\text{G-anneau} & \text{anneau proprement ouvert} & & \text{QQR-anneau} \arrow[dr, Rightarrow, "(11)"'] & \\
& & & & \text{GQR-anneau} \arrow[d, Rightarrow, "(12)"] \\
& & & & \Delta\text{-anneau}
\end{tikzcd}
$$

(En détail: Les implications (5), (6), (7), (9) et (11) sont triviales; (1): voir [38; Cor. 3.3] et [34; Th. 3.16]; (2) et (3): voir [35; Prop. 1 et Th. 2] ou, aussi, Cor. 1.5 ((b) et (h)); (4): Cor. 1.5 (b); (8): voir [7; Lemma 2.9 et Th. 2.10] et, aussi, Cor. 1.5

(+) Dans le cas d'un PVD intégralement clos, les notions de FGR-anneau et de G-anneau fort coïncident [35; Th. 2].

((d) et (e)); (10): Cor. 1.5 (e); (12): voir [18; Th. 14.6] et, aussi, Cor. 1.5 ((f) et (g))).

En ce qui concerne les PVD qui sont soumis à quelque propriété de finitude, nous avons les implications suivantes:

$$\boxed{\text{PVD}}$$

$$\begin{tikzcd} & \text{anneau noethérien} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{anneau fortement laskérien} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{anneau cohérent} \\ \text{anneau laskérien = anneau 1-dimensionnel} \arrow[d, Rightarrow] & & \\ \text{anneau à spectre noethérien} & & \end{tikzcd}$$

(voir Cor. 1.6, Rq. 1.7 et Cor. 1.8).

Nous nous proposons, maintenant, de construire plusieurs exemples pour montrer explicitement que, en général, les implications précédentes ne s'inversent pas. En particulier, nous allons voir que:

$$\boxed{\text{PVD}}$$

FGR-anneau $\not\Rightarrow$ Δ-anneau (cf. (2.1));
FGR-anneau $\not\Rightarrow$ G-anneau fort (cf. (2.8));

anneau ouvert $\not\Rightarrow$ FGR-anneau (cf. (2.2) et (2.3));
G-anneau $\not\Rightarrow$ anneau ouvert (cf. (2.4));
anneau proprement ouvert $\not\Rightarrow$ anneau localement pqr (cf. (2.3));
QR-anneau $\not\Rightarrow$ G-anneau fort (cf. (2.4));
QQR-anneau $\not\Rightarrow$ QR-anneau (cf. (2.3) et (2.5));
T-anneau (et donc GQR-anneau) $\not\Rightarrow$ QQR-anneau (cf. (2.2));
Δ-anneau $\not\Rightarrow$ GQR-anneau (cf. (2.6));
QQR-anneau $\not\Rightarrow$ G-anneau (cf. (2.5));
T-anneau $\not\Rightarrow$ G-anneau fort (cf. (2.3));
GQR-anneau $\not\Rightarrow$ T-anneau (cf. (2.10));
anneau fortement laskérien $\not\Rightarrow$ anneau noethérien (cf. (2.8));
anneau laskérien $\not\Rightarrow$ anneau fortement laskérien (cf. (2.2));
anneau cohérent $\not\Rightarrow$ anneau à spectre noethérien (cf. (2.7));
anneau fortement laskérien $\not\Rightarrow$ anneau cohérent (cf.(2.8)).

(2.1) Soient $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$, X une indéterminée sur K, $V = K[[X]]$, $\underline{m} = XV$ et $A = k + \underline{m}$. Etant $k \hookrightarrow K$ une extension finie, alors il est facile de voir que A *est un PVD noethérien 1-dimensionnel, qui est un FGR-anneau, mais qui n'est pas un Δ-anneau*. En outre, les idéaux $\underline{a} = iXA$ et $\underline{a}' = \sqrt{2}XA$ sont $\underline{m}$-primaires, incomparables (par rapport à la relation d'inclusion) et distincts de $\underline{m}$, étant $\underline{m} = iXA + \sqrt{2}XA$ non principal dans A (cf. Cor. 1.1 (e)). D'autre part, $\underline{a}V = \underline{a}'V = \underline{m}$, car i et $\sqrt{2}$ sont inversibles dans K. Donc, A est un PVD *qui n'est pas un S-anneau,* car l'ensemble de ses idéaux $\underline{m}$-primaires n'est pas totalement ordonné (cf. [16] ou [28]). Cet exemple montre aussi que les affirmations (b) et (p) du Cor. 1.1 ne sont plus valables dans le cas de l'idéal maximal $\underline{m}$.

(2.2) Soient k un corps, $\{X_h : h \geq 0\}$ une famille d'indéterminées sur k, $K = k(X_o)$, $R = K[X_h : h \geq 1]$, $\underline{a}$ l'idéal de R engendré par $\{X_2^2 - X_1, X_3^2 - X_2, \ldots, X_h^2 - X_{h-1}, \ldots\}$, $S = R/\underline{a}$ et $x_h = X_h + \underline{a}$. Alors, l'anneau $S = K[x_h : h \geq 1] = \bigcup_{h \geq 1} K[x_1, \ldots, x_h]$ est un anneau intègre de Prüfer de dimension 1 (cf. [18; Prop. 18.6, p. 260]). N'ayant pas l'idéal maximal $\underline{M} = (x_h : h \geq 1)$ de S un système de générateurs fini, l'anneau $V = S_{\underline{M}}$ est un anneau de valuation de dimension 1, dont l'idéal maximal n'est pas principal (cf. [18; Th. 14.1 (1), p. 169]), c'est-à-dire V n'est pas un anneau de valuation discrète. De plus, son idéal maximal $\underline{m} = \underline{M}S_{\underline{M}}$ est tel que $\underline{m} = \underline{m}^2$ (car, si par l'absurde $z \in \underline{m} \setminus \underline{m}^2$, alors $\underline{m} = zV$, puisque si $y \in \underline{m} \setminus zV$ alors $zV \subset yV$ et, donc, $z = vy$, avec $v \in \underline{m}$). Alors, l'anneau $A = k + \underline{m}$ ($\subsetneq V = K + \underline{m}$) *est un PVD qui est un GQR-anneau* et, mieux, *qui est un T-anneau,* mais *qui n'est pas un QQR-anneau,* car pour tout $z \in \underline{m}$, $z \neq 0$, $\mathrm{rad}_A(z) = \mathrm{rad}_V(z) = \underline{m}$. En outre, nous avons déjà remarqué que A est un anneau *intégralement clos (mais non complètement intégralement clos) laskérien, mais non fortement laskérien* (cf. [4; (E.4)]). Il est clair aussi que A est un *anneau ouvert, mais non un FGR-anneau.* En outre, $\{\underline{m}\}$ est ouvert dans

Spec(A) muni de la topologie de l'ordre opposé, *mais A n'est pas un anneau cohérent.*

(2.3) Soient k un corps, $\{X_h : h \geq 0\}$ une famille d'indéterminées sur k, $F = k(X_o)$, $K = F(X_h : h \geq 1)$, G le groupe somme directe d'une famille dénombrable de copies de $\mathbb{Z}$. Sur $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$, nous pouvons introduire deux structures d'ordre, en parvenant ainsi à construire deux groupes ordonnés distincts, ayant, tous les deux, G comme groupe sous-jacent:

($\leq_1$) $x = (x_h : h \geq 1) \in G$ est positif, si la première coordonnée non nulle de x est un élément positif de $\mathbb{Z}$;

($\leq_2$) $x = (x_h : h \geq 1) \in G$ est positif, si la dernière coordonnée non nulle de x est un élément positif de $\mathbb{Z}$.

Soit $G_i = (G, \leq_i)$, $i = 1,2$. Nous pouvons définir un anneau de valuation V_1 (resp. V_2) de K, ayant comme groupe de valeurs G_1 (resp. G_2), en considérant la valuation v_1 (resp. v_2) associée à l'application $X_h \longmapsto (\delta_{j,h}) \in G_1$ (resp. G_2), où $\delta_{j,h}$ est le symbole de Kronecker [18; § 15]. Il est facile de voir que:

(a) Si $\underline{m}_i$ est l'idéal maximal de V_i $(i = 1,2)$, alors $V_i = F + \underline{m}_i$.

(b) Le spectre premier de V_1 (resp. V_2) est un ensemble totalement ordonné du type suivant:

$$\{(0) \subset \underline{p}_1 \subset \underline{p}_2 \subset \ldots \quad \ldots \subset \underline{m}_1\}$$

$$(\text{resp. } \{(0) \subset \ldots \quad \ldots \subset \underline{q}_2 \subset \underline{q}_1 \subset \underline{m}_2\}).$$

(cf. [28; Ex. 1], [17] et [19; Sec. 4]). Donc, l'idéal maximal $\underline{m}_1$ de V_1 n'est pas branché, tandis que l'idéal maximal $\underline{m}_2$ de V_2 est branché. Soit $A_1 = k + \underline{m}_1$ et $A_2 = k + \underline{m}_2$. Nous pouvons affirmer, alors, que A_1 *est un PVD de dimension infinie, qui* est *un QQR-anneau, un T-anneau et un anneau ouvert* (donc, en particulier, un G-anneau), *mais* A_1 *n'est ni un FGR-anneau ni un QR-anneau* (cf. Cor. 1.5). L'anneau A_2 *est un PVD de dimension infinie qui est proprement ouvert, mais non ouvert,* (donc, il n'est pas un G-anneau); cf. PAPICK [34; Sec. 3 et Sec. 5]. *Il est clair aussi que* A_1 *et* A_2 *sont deux anneaux intégralement clos (non complètement intégralement clos) non noethériens* (et, mieux, *non laskériens* et *non cohérents*); cf. Cor. 1.4, 1.6, 1.8 et Rq. 1.7.

(2.4) Soient K et A_2 comme dans l'exemple (2.3), T une indéterminée sur K, $W = K[T]_{(T)}$, $w : W \twoheadrightarrow K$ la projection canonique qui envoie T sur O. Il est facile de voir que $B_2 = A_2 + TW$ *est un PVD de dimension infinie, que n'est pas un QR-anneau, mais qui est un G-anneau sans être un anneau ouvert.* En effet, le diagramme suivant, dans lequel tous les homomorphismes sont canoniques, est composé de diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd}
B_2 = W_2 \times_{V_2} A_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A_2 = k + \underline{m}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\
W_2 = W \times_K V_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & V_2 = F + \underline{m}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & F \\
W \arrow[r, two heads] & K &
\end{tikzcd}$$

et, en outre, W_2 *est un anneau de valuation de dimension infinie* (car W et V_2 sont des anneaux de valuation et K est le corps de fractions de V_2; cf. [33; p. 35]), dont le spectre est un ensemble totalement ordonné du type suivant:

$$\{(0) \subset \underline{q}_\infty \subset \dots \quad \dots \subset \underline{q}'_2 \subset \underline{q}'_1 \subset \underline{m}'_2\}$$

où l'image de $\underline{q}'_h$ (resp. $\underline{m}'_2$) dans la projection $W_2 \twoheadrightarrow V_2$ coïncide avec $\underline{q}_h$ (resp. $\underline{m}_2$) et $\underline{q}_\infty$ coïncide avec la restriction à W_2 de l'idéal maximal de W (cf. [13; Prop. 2.1 et 2.2]). Donc, B_2 et W_2 *ne sont pas des anneaux ouverts*, car $\{(0), \underline{q}_\infty\}$ n'est pas un ensemble ouvert dans $\mathrm{Spec}(B_2) = \mathrm{Spec}(W_2)$ (cf. Cor. 1.5 et [34; Prop. 3.2]).

(2.5) Soient K, k, V_1 et A_1 comme dans (2.3). Soient $\{Y_i : i \geq 1\}$ une famille d'indéterminées sur K, $\tilde{K} = K(Y_i : i \geq 1)$ et $\tilde{V}_2$ l'anneau de valuation de $\tilde{K}$ défini de façon analogue à celle dans laquelle a été défini V_2 dans $K = F(X_h : h \geq 1)$. Donc, $\tilde{V}_2 = K + \tilde{\underline{m}}_2$, où $\tilde{\underline{m}}_2$ est l'idéal maximal de $\tilde{V}_2$. Considérons, alors, l'anneau $R = A_1 + \tilde{\underline{m}}_2$. Du fait que, le diagramme suivant, dans lequel tous les homomorphismes sont canoniques,

$$\begin{tikzcd}
R = A_1 + \tilde{\underline{m}}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A_1 = k + \underline{m}_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\
V_1 + \tilde{\underline{m}}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & V_1 = F + \underline{m}_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & F = k(X_0) \\
\tilde{V}_2 = K + \tilde{\underline{m}}_2 \arrow[r, two heads] & K &
\end{tikzcd}$$

est composé de carrés cartésiens, nous pouvons affirmer que le spectre premier de l'anneau R est un ensemble totalement ordonné du type suivant:

$$\{(0) \subset \ldots \subset \tilde{\underline{q}}_2 \subset \tilde{\underline{q}}_1 \subset \tilde{\underline{q}}_0 \subset \tilde{\underline{p}}_1 \subset \tilde{\underline{p}}_2 \subset \ldots \subset \tilde{\underline{m}}\}$$

où $\mathrm{Spec}(R_{\tilde{\underline{q}}_0})$ (resp. $\mathrm{Spec}(R/\tilde{\underline{q}}_0)$) est isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, à $\mathrm{Spec}(\tilde{V}_2)$ (resp. $\mathrm{Spec}(A_1)$); cf. [13; Prop. 2.1 et 2.2]. Donc, du fait que $V_1 + \tilde{\underline{m}}_2$ est un anneau de valuation de dimension infinie [33; p. 35], nous pouvons affirmer que R *est un PVD de dimension infinie intégralement clos, qui est un QQR-anneau* (car $\tilde{\underline{m}}$ est non-branché, puisque tel est l'idéal maximal $\underline{m}_1$ de V_1), *mais qui n'est pas un G-anneau* (car $\tilde{V}_2$ n'est pas un G-anneau) *ni un QR-anneau*; cf. Cor. 1.5.

(2.6) Soient k et F deux corps, tels que F est une extension algébrique de k et il existe seulement un corps k_0 inclus proprement entre k et F (par exemple, si p est un nombre premier, il suffit de considérer $k = \mathbb{Z}_p$ et $F = \mathbb{F}(p^4) = \mathbb{Z}_p(\zeta)$ alors $k_0 = \mathbb{Z}_p(\zeta^2)$). Soient $\{X_h : h \geq 1\}$ une famille d'indéterminées sur F, $K = F(X_h : h \geq 1)$ et V_2 l'anneau de valuation de K défini comme dans (2.3), donc, si $\underline{m}_2$ est l'idéal maximal de V_2, alors $V_2 = F + \underline{m}_2$. L'anneau $A_2 = k + \underline{m}_2$ *est un PVD de dimension infinie, qui est un Δ-anneau et un anneau proprement ouvert, mais non un GQR-anneau, ni un anneau ouvert* (donc, il n'est pas un G-anneau) *et ni un anneau intégralement clos*. Si W est comme dans (2.5), alors l'anneau $B_2 = A_2 + TW$ est *un PVD de dimension infinie, qui est un Δ-anneau, mais qui n'est* *pas un GQR-anneau ni un anneau ouvert, bien qu'il soit un G-anneau.*

(2.7) Soient k, $F = k(X_0)$, K et $V_1 = F + \underline{m}_1$ comme dans (2.3). Supposons que k' soit un sous-corps propre de k, tel que $[k : k'] < \infty$. Soit $W_1 = k[X_0]_{(X_0)} + \underline{m}_1$. W_1 est un anneau de valuation de dimension infinie, dont l'idéal maximal est principal, car $W_1 = k + X_0 W_1$ (cf. [14; (E. 1.4)] et [33; p. 35]). L'anneau $R = k' + X_0 W_1$ *est un PVD cohérent (qui n'est pas un anneau de valuation) de dimension infinie,* dont le spectre premier est un ensemble totalement ordonné du type suivant:

$$\{(0) \subset \tilde{\underline{p}}_1 \subset \tilde{\underline{p}}_2 \subset \ldots \subset \tilde{\underline{p}}_\infty \subset \tilde{\underline{m}}\} ,$$

où $\mathrm{Spec}(R_{\tilde{\underline{p}}_\infty})$ est isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, à $\mathrm{Spec}(V_1)$. Il est facile de voir, en outre, que Spec(R) *n'est pas un espace noethérien.*

(2.8) Soient $K = \mathbb{C}$, $k_1 = \mathbb{Q}$, $k_2 = \mathbb{R}$, $A = K[X]_{(X)}$, $A_1 = k_1 + XA$ et $A_2 = k_2 + XA$. Alors, on voit immédiatement que A_1 *est un PVD de dimension 1, qui est un anneau fortement laskérien, mais qui n'est pas noethérien, ni cohérent, ni intégralement clos* et que A_2 *est un PVD de dimension 1, qui est un FGR-anneau, mais qui n'est pas un G-anneau fort* (cf. Cor. 1.5).

(2.9) Soient k un corps, t une indéterminée sur k, $A = k[t^2-1,\ t(t^2-1)]$, $\underline{m} = (t^2-1)A + t(t^2-1)A$ et $R = A_{\underline{m}}$ (c.-à-d. R est l'anneau local dans l'origine, qui est un point nodal, de la courbe affine plane de équation $y^2 - x^3 - x^2 = 0$). Il est bien connu que R *est un anneau seminormal, local, intègre, noethérien de dimension 1, divisé* (0.2). R *n'est pas un PVD*, car l'unique sur-anneau de valuation de R est sa clôture intégrale $R' = k[t]_{(t)} = k + tR'$ et, en outre, pour tout sous-corps k_0 de k, l'anneau $R_0 = k_0 + tR'$ est différent de R.

(2.10) Soient k, K, $V = K + \underline{m}$, $A = k + \underline{m}$ comme dans (2.2). A est un PVD ayant comme corps de fractions $F = K(x_h : h \geq 1)$. Soient $\{Y_i : i \geq 1\}$ une famille d'indéterminées sur F, $E = F(Y_i : i \geq 1)$, $V_2 = F + \underline{m}_2$ l'anneau de valuation de E définit comme dans (2.3), Z une indéterminée sur E et $W = E[Z]_{(Z)} = E + \underline{M}$ où $\underline{M} = ZE$. On voit aussitôt que l'anneau $R = A + \underline{m}_2 + \underline{M}$ est un PVD de dimension infinie dont le spectre est un ensemble ordonné du type suivant:

$$\{(0) \subset \underline{q}_\infty \subset \ldots\ldots \subset \underline{q}_2 \subset \underline{q}_1 \subset \underline{q}_0\}.$$

En effet, le diagramme suivant, dans lequel tous les homomorphismes sont canoniques,

$$\begin{tikzcd}
R = A+\underline{m}_2+\underline{M} \arrow[r, two heads] \arrow[ddd, hook] & A+\underline{m}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A = k+\underline{m} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\
 & V+\underline{m}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & V = K+\underline{m} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & K \\
 & V_2 = F+\underline{m}_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & F & \\
W = E+\underline{M} \arrow[r, two heads] & E & &
\end{tikzcd}$$

est composé par des carrés cartésiens. En outre, $\underline{q}_\infty^2 \neq \underline{q}_\infty = \bigcap_{i\geq 1}\underline{q}_i$ et $\underline{q}_{0}^{2} = \underline{q}_0^2$, car $R_{\underline{q}_\infty} \cong W$ et $\underline{M} \neq \underline{M}^2$ et car $R/\underline{q}_1 \cong A$ et $\underline{m} = \underline{m}^2$ (cf. (2.2), (2.3) et [13; Prop. 2.1 et 2.2]). Donc, R *est un PVD qui est un GQR-anneau, mais qui n' est ni un QQR-anneau ni un T-anneau* (cf. Cor. 1.5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AKIBA, A note on AV-domains. Bull. Kyoto Ed. Ser. B 31 (1967), 1-3.

[2] M.F. ATIYAH - I.G. MACDONALD, *Introdution to commutative algebra*. Addison-Wesley, New York 1969.

[3] D.F. ANDERSON - D.E. DOBBS, Pair of rings with the same prime ideals. Can. J. Math. (A paraître).

[4] V. BARUCCI - M. FONTANA, When are D+M rings Laskerian? (A paraître).

[5] E. BASTIDA - R.W. GILMER, Overrings and divisorial ideals of rings of the form D+M. Michigan Math. J. 20 (1974), 79-95.

[6] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*. Ch. 1-7. Hermann, Paris 1961/1965.

[7] J.W. BREWER - R.W. GILMER, Integral domains whose overrings are ideal transforms. Math. Nach. 51 (1971), 255-267.

[8] D.E. DOBBS, Divided rings and going-down. Pac. J. Math. 67 (1976), 353-363.

[9] D.E. DOBBS, On the weak global dimension of pseudo-valuation domains. Can. Math. Bull. 21 (1978), 159-164.

[10] D.E. DOBBS, Coherence, ascent of going-down and pseudo-valuation domains. Houston J. Math. 4 (1978), 551-567.

[11] D.E. DOBBS - M. FONTANA - I.J. PAPICK, On the flat spectral topology and certain distinguished spectral sets. (A paraître).

[12] D.E. DOBBS - I.J. PAPICK, When is D+M coherent? Proc. AMS 65 (1977), 370-371.

[13] M. FONTANA, Topologically defined classes of commutative rings. Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 331-355.

[14] M. FONTANA, Carrés cartésiens, anneaux divisés et anneaux localement divisés. Pre-Publ. Math. Univ. Paris-Nord (A paraître).

[15] M. FONTANA - P. MAROSCIA, Sur les anneaux de Goldman. Boll. Un. Mat. Ital. 13-B (1976), 743-759.

[16] R.W. GILMER, A class of domains in which primary ideals are valuation ideals. Math. Ann. 161 (1965), 247-254.

[17] R.W. GILMER, A class of domains in which primary ideals are valuation ideals, II. Math. Ann. 171 (1967), 93-96.

[18] R.W. GILMER, *Multiplicative ideal theory*. Queen's Math. Papers, Kingston 1968. Rev. Ed. Dekker, New York 1972.

[19] R.W. GILMER - W. HEINZER, Intersections of quotient rings of an integral domain. J. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), 133-150.

[20] R.W. GILMER - W. HEINZER, Primary ideals and valuation ideals, II. Trans. AMS 131 (1968), 149-162.

[21] R.W. GILMER - J.A. HUCKABA, Δ-rings. J. Algebra 28 (1974), 414-432.

[22] R.W. GILMER - J. OHM, Integral domains with quotient overrings. Math. Ann. 153 (1964), 97-103.

[23] B.V. GREENBERG, Global dimension in cartesian squares. J. Algebra 32 (1974), 31-43.

[24] J.R. HEDSTROM - E.G. HOUSTON, Pseudo-valuation domains. Pac. J. Math. 75 (1978), 137-147.

[25] J.R. HEDSTROM - E.G. HOUSTON, Pseudo-valuation domains, II. Houston J. Math. 4 (1978), 199-207.

[26] W. HEINZER, Quotient overrings of an integral domain. Mathematika 17 (1970), 139-148.

[27] I. KAPLANSKY, *Commutative rings*. Allyn-Bacon, Boston 1970. Rev. Ed. Univ. Chicago Press 1974.

[28] T. KIKUCHI, Some remarks on S-domains. J. Math. Kyoto Univ. 6 (1966), 49-60.

[29] W. KRULL, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, II. Math. Z. 41 (1936), 665- 679.

[30] J.-P. LAFON, *Algèbre commutative: Langages géométrique et algébrique*. Hermann, Paris 1977.

[31] S. McADAM, Two conductor theorems. J. Algebra 23 (1972), 239-240.

[32] P. MAROSCIA, Topological properties of some classes of G-domains. Boll. Un. Mat. Ital. 15-A (1978),

[33] M. NAGATA, *Local rings*. Interscience, New York 1962.

[34] I.J. PAPICK, Topologically defined classes of commutative rings. Trans. AMS 219 (1976), 1-37.

[35] I.J. PAPICK, Finite type extensions and coherence. Pac. J. Math. 78 (1978), 161-172.

[36] I.J. PAPICK, When coherent pairs are Noetherian pairs. Houston J. Math. (A paraître).

[37] G. PICAVET, Sur les anneaux commutatifs dont tout idéal premier est de Goldman. C.R. Acad. Sc. Paris A 280 (1975), A 1719 - A 1721.

[38] R. RAMASWAMY - T.M VISWANATHAN, Overring properties of G-domains. Proc. AMS 58 (1976), 59-66.

[39] P. RIBENBOIM, Sur une note de Nagata relative à un problème de Krull. Math. Z. 64 (1956), 159-168.

[40] F. RICHMAN, Generalized quotient rings. Proc. AMS 16 (1965), 794-799.

[41] P.B. SHELDON, Prime ideals in GCD-domains. Can. J. Math. 26 (1974), 98-107.

[42] C. TRAVERSO, Seminormality and Picard group. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 24 (1970), 585-595.

[43] A.R. WADSWORTH, Pairs of domains where all intermediate domains are Noetherian. Trans. AMS 195 (1974), 201-211.

Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex

Adresse Permanente:
Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"
Università degli Studi di Roma
00185 Roma (Italie)