

JEAN BRACONNIER

**1 - Algèbres graduées**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 1C  
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1982\\_\\_1C\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__1C_A1_0)

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# 1 - ALGÈBRES GRADUÉES

## (1.1) DEFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

Dans ce qui suit, on désigne par  $K$  un anneau commutatif dans lequel l'application  $t \mapsto 2t$  est injective (par exemple, un corps de caractéristique  $\neq 2$ ).

(1.1.1) Soit  $\Delta$  un groupe abélien, noté additivement. Un *facteur de commutation* sur  $\Delta$  est une application  $\varepsilon : \Delta \times \Delta \rightarrow \{\pm 1\}$   $\mathbb{Z}$ -bilinéaire et symétrique, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \varepsilon(i+i', j) = \varepsilon(i, j) \varepsilon(i', j), \\ \varepsilon(i, j) = \varepsilon(j, i) \quad (i, i', j \in \Delta). \end{cases}$$

EXEMPLES. -

a)  $\varepsilon = 1$  est un facteur de commutation, dit *trivial*.

b) Soit  $\Delta = \mathbb{Z}$  (ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Si  $\varepsilon$  est un facteur de commutation, on a  $\varepsilon(i, j) = \varepsilon(1, 1)^{ij}$ . Si  $\varepsilon(1, 1) = 1$ ,  $\varepsilon$  est trivial ; sinon  $\varepsilon$ , défini par  $\varepsilon(i, j) = (-1)^{ij}$ , est un facteur de commutation.

c) Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  des groupes abéliens et  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  des facteurs de commutation sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  respectivement ;  $((i, i'), (j, j')) \mapsto \varepsilon(i, j) \varepsilon'(i', j')$  est un facteur de commutation sur  $\Delta \times \Delta'$ . En particulier,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ , défini par  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}((p, i), (q, j)) = (-1)^{pq} \varepsilon(i, j)$ , est un facteur de commutation sur  $\mathbb{Z} \times \Delta$  (ou  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \Delta$ ).

Si  $\varepsilon$  est un facteur de commutation sur  $\Delta$ , si  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$  et si  $i_1, \dots, i_p \in \Delta$ , on pose

$$\varepsilon_{\sigma}(i_1, \dots, i_p) = \prod_{\substack{j < k \\ \sigma(k) < \sigma(j)}} \varepsilon(i_{\sigma(j)}, i_{\sigma(k)}).$$

On a 
$$\text{sgn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma}(i_1, \dots, i_p) = \prod_{\substack{j < k \\ \sigma(k) < \sigma(j)}} (-\varepsilon(i_{\sigma(j)}, i_{\sigma(k)})) .$$

(1.1.2) Soit  $\Delta$  un groupe abélien. Si  $E = \bigoplus_{i \in \Delta} E_i$  est un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué (où les  $E_i$  sont des sous- $K$ -modules de  $E$ ) et si  $y \in E_i - \{0\}$ , on dit que  $y$  est homogène de degré  $|y| = i$ ; et, si  $E = \bigoplus_{(p,i) \in \mathbb{Z} \times \Delta} E_i^p$  est  $\mathbb{Z} \times \Delta$  gradué, on note  $(\text{deg}(y), |y|) \in \mathbb{Z} \times \Delta$  le degré d'un élément homogène  $y \in E$ .

Soit  $A = \bigoplus_{i \in \Delta} A_i$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -gradu e (où les  $A_i$  sont des sous- $K$ -modules tels que  $A_i A_{i'} \subset A_{i+i'}$ ,  $(i, i' \in \Delta)$ ).

Soit  $\varepsilon$  un facteur de commutation sur  $\Delta$ . On dit que  $A$  est  $\varepsilon$ -commutative si :

- (i)  $A$  est associative et unifère ;
- (ii)  $x' x = \varepsilon(|x|, |x'|) x x'$  si  $x, x' \in A$  sont homogènes.

Si  $\varepsilon$  est trivial, une algèbre  $\varepsilon$ -commutative est simplement une algèbre commutative. Si  $A$  est une  $K$ -algèbre commutative,  $\Delta$ -gradu e trivialement ( $A_0 = A$ ,  $A_i = \{0\}$  et  $i \in \Delta - \{0\}$ ),  $A$  est  $\varepsilon$ -commutative pour tout facteur de commutation  $\varepsilon$ ; ainsi  $K$  est une  $K$ -algèbre  $\varepsilon$ -commutative.

Soit  $A$  une algèbre  $\mathbb{Z}$ -gradu e (ou  $(\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z})$ -gradu e)  $\varepsilon$ -commutative  $\varepsilon \neq 1$ , on dit que  $A$  est une algèbre alternée (ou anticommutative).

EXEMPLES. -

1) Soit  $A$  une algèbre  $\Delta$ -gradu e, on note  $\tilde{A}$  l'algèbre oppos e de  $A$  (dont le produit est  $x.x' = x' x$ ) ; si  $A$  est  $\varepsilon$ -commutative,  $\tilde{A}$  l'est aussi.

2) Soit  $E$  un  $K$ -module ; l'algèbre extérieure  $\Lambda_K(E) = \bigoplus_p \Lambda_K^p(E)$  (où  $\Lambda_K^p(E)$  est la puissance extérieure  $p$ -ième de  $E$ ) est  $\mathbb{Z}$ -gradu e et alternée.

3) Soit, de plus,  $C$  une  $K$ -algèbre commutative. L'injection  $C \otimes_K E \rightarrow C \otimes_K \Lambda_K(E)$  se prolonge en une application  $C$ -linéaire de  $\Lambda_C(C \otimes_K E)$

dans  $C \otimes_K (\bigwedge_K(E))$  qui est un isomorphisme de  $C$ -algèbres  $Z$ -graduées (sa

réciproque est l'application  $C$ -linéaire  $\phi$  définie par

$$\phi(f \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_p) = f (1 \otimes y_1) \wedge \dots \wedge (1 \otimes y_p) \quad (y_i \in E).$$

$C \otimes_K \bigwedge_K(E)$  est ainsi une  $C$ -algèbre alternée.

4) Soient  $A$  et  $A'$  des algèbres  $\Delta$ -graduées,  $\varepsilon$ -commutatives.  $A \otimes_K A'$ , gradué par  $(A \otimes_K A')_i = \bigoplus_{j+k=i} (A_j \otimes_K A'_k)$  et muni de produit  $K$ -bilinéaire

défini par  $(x \otimes x')(y \otimes y') = \varepsilon(|x'|, |y|) x y \otimes x' y'$  ( $x, y \in A$ ,  $x', y' \in A'$  homogènes), est une algèbre  $\varepsilon$ -commutative, notée  $A \overset{\varepsilon}{\otimes}_K A'$

(1.1.3) Soient  $A$  une algèbre  $\Delta$ -graduée,  $\varepsilon$ -commutative et  $E$  un  $A$ -module (à gauche)  $\Delta$ -gradué. On définit une structure de  $A$ -module (à droite) sur  $E$  en posant

$$yx = \varepsilon(|x|, |y|) x y \quad (x \in A, y \in E \text{ homogènes})$$

et on note  $\tilde{E}$  ce  $A$ -module à droite.  $E$  est un  $A$ -bimodule pour ces deux structures.

Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués. Soit  $i \in \Delta$  et

$$D_i = \{u \in \text{Hom}_K(E, F) \mid \forall j \in \Delta, u(E_j) \subset F_{i+j}\};$$

$\text{Homgr}_K(E, F) = \bigoplus_i D_i \subset (\text{Hom}_K(E, F))$  est un  $K$ -module gradué.

REMARQUE. - Lorsque  $E$  est un  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué et  $F$  un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué, on munit  $F$  de la  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduation définie par  $F_i^0 = F_i$  et  $F_i^p = 0$  pour tout

$p \neq 0$  et pour tout  $i \in \Delta$ . On gradue  $\text{Homgr}_K(E, F)$  par les  $H_i^{-p}$ ,  $(p, i) \in \mathbb{Z} \times \Delta$ ;  $H_i^{-p}$  est le sous-module des  $u \in \text{Hom}_K(E, F)$  tels que  $u(E_j^p) \subset F_{i+j}$  et  $u(E_j^q) = 0$

pour tout  $q \neq p$  et tout  $j \in \Delta$ .

(Supposons  $E_i^p = 0$  pour tout  $p < 0$  et tout  $i \in \Delta$ ; on a  $H_i^{-p} = 0$  pour tout  $p > 0$  et  $i \in \Delta$  et, si  $p < 0$ ,  $H_i^{-p}$  s'identifie au sous-module des  $u \in \text{Homgr}(E_p, F)$  de degré  $i$ ).

(1.1.4) Si  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$  est homogène, on définit  $\tilde{u} \in \text{Homgr}_K(E, F)$  en posant

$$\tilde{u}(y) = \varepsilon(|u|, |y|) u(y) \quad (y \in E \text{ homogène}).$$

On définit ainsi un  $K$ -isomorphisme involutif  $u \mapsto \tilde{u}$  de  $K$ -modules gradués de  $\text{Homgr}_K(E, F)$  sur lui-même.

(1.1.5) Supposons que  $F$  soit un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué. En posant

$$(1) \quad \begin{cases} (u \cdot x)(y) = u(y)x, \\ (x \cdot u)(y) = \varepsilon(|x|, |y|) x u(y) \end{cases} \quad (x \in A, y \in E \text{ homogènes}),$$

on définit sur  $\text{Homgr}_K(E, F)$  une structure de  $A$ -module  $\Delta$ -gradué ou de  $A$ -bi-module, les deux lois définies par (1) étant liées comme il est dit au début de (1.1.3).

Et il en est de même lorsqu'on munit  $\text{Homgr}_K(E, F)$  des lois définies par

$$(2) \quad \begin{cases} (x \cdot u)(y) = x u(y), \\ (u \cdot x)(y) = \varepsilon(|x|, |y|) u(y)x \end{cases} \quad (x \in A, y \in E \text{ homogènes}).$$

PROPOSITION . -  $u \mapsto \tilde{u}$  est un  $K$ -isomorphisme de  $\Delta$ -modules  $\Delta$ -gradués de  $\text{Homgr}_K(E, F)$ , muni des lois définies par (1), sur  $\text{Homgr}_K(E, F)$ , muni des lois définies par (2).

La démonstration est immédiate.

Soient  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules.  $\text{Homgr}_A(E, F)$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\tilde{E}, \tilde{F})$ ) est un sous- $A$ -module de  $\text{Homgr}_K(E, F)$  muni des lois (1) (resp. (2)).

COROLLAIRE. -  $u \mapsto \tilde{u}$  est un isomorphisme de  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués de

$\text{Homgr}_A(E, F)$  sur  $\text{Homgr}_A(\tilde{E}, \tilde{F})$  (munis respectivement des lois (1) et (2)).

(1.1.6) Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée,  $\varepsilon$ -commutative. Soient  $E_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) et  $F$  des  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués et  $p$  un entier  $\geq 0$ . On dit qu'une application homogène  $v : \prod_i E_i \rightarrow F$  est  $\varepsilon$ -multilinéaire si  $v$  est  $K$ -multilinéaire et si

$$v(y_1, \dots, xy_i, \dots, y_p) = \varepsilon(|x|, \sum_{j=1}^{i-1} |y_j|) x v(y_1, \dots, y_p)$$

pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $x \in A$  et  $y_j \in E_j$  ( $1 \leq j \leq p$ ) homogènes.

Soient  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués.  $\tilde{E} \otimes_A F$  est un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué (par les  $\bigoplus_{j+k=i} (\tilde{E}_j \otimes_A F_k)$ ); on a  $(yx) \otimes z = y \otimes (xz)$  si  $x \in A$ ,  $y \in E$  et  $z \in F$ ;

on le note simplement  $E \otimes_A F$ .

Soit  $\theta : E \times F \rightarrow E \otimes_A F$  l'application  $\varepsilon$ -bilinéaire  $(y, z) \mapsto y \otimes z$ . Pour tout  $A$ -module  $\Delta$ -gradué  $G$ ,  $u \mapsto u \circ \theta$  est un  $K$ -isomorphisme de  $\text{Homgr}_K(E \otimes_A F, G)$  sur le  $K$ -module des applications bilinéaires  $\varepsilon$ -graduées de  $E \times F$  dans  $G$ .

Ceci permet de définir une loi de  $A$ -bimodule sur  $E \otimes_A F$  en posant  $x(y \otimes z) = (xy) \otimes z$  et  $(y \otimes z)x = y \otimes (zx)$  ( $x \in A$ ,  $y \in E$ ,  $z \in F$ ) et on a  $x t = \varepsilon(|x|, |t|) tx$ , pour  $x \in A$  et  $t \in E \otimes_A F$  homogènes.

De même :

PROPOSITION. - Soient  $E, F$  et  $G$  des  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués.

a) Il existe un unique  $A$ -isomorphisme  $\phi : A \otimes_A E \rightarrow E$  tel que

$$\phi(x \otimes y) = xy \quad (x \in A, y \in E), \text{ ce qui permet d'identifier ces } A\text{-modules.}$$

b) Il existe un unique  $A$ -isomorphisme  $\alpha : E \otimes_A (F \otimes_A G) \rightarrow (E \otimes_A F) \otimes_A G$  tel que  $\alpha(y \otimes (z \otimes u)) = (y \otimes z) \otimes u$  ( $y \in E, z \in F, u \in G$ ),

ce qui permet d'identifier ces  $A$ -modules.

c) Il existe un unique  $A$ -isomorphisme  $\psi : E \otimes_A F \rightarrow F \otimes_A E$  tel que

$$\psi(y \otimes z) = \varepsilon(|y|, |z|)z \otimes y \quad (y \in E, z \in F \text{ homogènes}).$$

(1.1.7) Soit  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué; on définit, par récurrence sur  $p \geq 0$ , le  $A$ -module  $\Delta$ -gradué  $T_A^p(E)$  en posant  $T_A^0(E) = A$  et  $T_A^{p+1}(E) = T_A^p(E) \otimes_A E$ , et on désigne par  $T_A(E)$  le module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $\bigoplus_p T_A^p(A)$ .

Pour  $p \geq 0$ , si  $t_p$  est l'application  $(y_1, \dots, y_p) \mapsto y_1 \otimes \dots \otimes y_p$  de  $E^p$  dans  $T_A^p(E)$ ,  $u \mapsto u \cdot t_p$  est un  $K$ -isomorphisme de  $\text{Homgr}_A(T_A^p(E), F)$  sur le  $K$ -module des applications  $\varepsilon$ -multilinéaires de  $E^p$  dans  $F$ , pour tout  $A$ -module  $\Delta$ -gradué  $F$ .

On a une application  $\varepsilon$ -bilinéaire  $T_A^p(E) \times T_A^q(E) \rightarrow T_A^{p+q}(E)$  qui, à  $((y_1 \otimes \dots \otimes y_p), (y_{p+1} \otimes \dots \otimes y_{p+q}))$  fait correspondre  $y_1 \otimes \dots \otimes y_{p+q}$ ; d'où une multiplication notée  $\otimes$ , dans  $T_A(E)$ , qui est  $\varepsilon$ -bilinéaire et fait de  $T_A(E)$  une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée.

Si  $K$  est  $\Delta$ -gradué trivialement,  $T_K(E)$  est l'algèbre tensorielle usuelle de  $E$  considéré comme  $K$ -module et on a un  $K$ -morphisme naturel  $T_K(E) \rightarrow T_A(E)$  qui est surjectif.

(1.1.8). Par abus de langage, on appelle *A-algèbre* un  $A$ -module  $\Delta$ -gradu e  $B$ , qui est une  $K$ -algèbre (associative et unifère) telle que la multiplication

$$(y, z) \mapsto yz \quad \text{de } B$$

soit  $\varepsilon$ -bilinéaire. Si  $B$  ou  $B'$  sont des  $A$ -algèbres, un morphisme  $u : B \rightarrow B'$  est une application  $A$ -linéaire, de degré 0, qui est un morphisme de  $K$ -algèbres. Soit  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradu e ;  $T_A(E)$  est ainsi une  $A$ -algèbre.

PROPOSITION. - Soit  $B$  une  $A$ -algèbre et  $u : E \rightarrow B$  une application  $A$ -linéaire de degré 0. Il existe un unique morphisme de  $A$ -algèbres  $u' : T_A(E) \rightarrow B$  prolongeant  $u$ .

En effet,  $(y_1, \dots, y_p) \mapsto u(y_1) \dots u(y_p)$  est  $\varepsilon$ -multilinéaire. Il existe donc  $u'_p : T_A^p(E) \rightarrow B$   $A$ -linéaire de degré 0 et telle que  $u'_p(y_1 \otimes \dots \otimes y_p) = u(y_1) \dots u(y_p)$ .  
D'où  $u'$ .

(1.1.9). Soit  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradu e. Soit  $J$  l'idéal bilatère gradu e de  $T_A(E)$  engendr e par les éléments  $y \otimes y' + \varepsilon(|y|, |y'|)y \otimes y'$ , où  $y, y' \in E$  sont homogènes et soit  ${}^\varepsilon \Lambda_A(E)$  (ou  $\Lambda_A(E)$ ) la  $K$ -algèbre quotient  $T_A(E)/J$ , dont on note  $\Lambda$  le produit. En identifiant le module  $\Delta$ -gradu e  $T_A^p(E)/(J \cap T_A^p(E))$  à un sous- $K$ -module  ${}^\varepsilon \Lambda_A^p(E)$  (ou  $\Lambda_A^p(E)$ ) de  $\Lambda_A(E)$ , on a  $\Lambda_A(E) = \bigoplus_p \Lambda_A^p(E) = A \oplus E \oplus \Lambda_A^2(E) \oplus \dots$  ; ainsi  $\Lambda_A(E)$  est une  $A$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradu e.

PROPOSITION. -  $\Lambda_A(E)$  est  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative.

En effet, comme  $y \wedge y' = -\varepsilon(|y|, |y'|)y' \wedge y$  si  $y, y' \in E$  sont homogènes, on a  $y_1 \wedge \dots \wedge y_{p+q} = (-1)^{pq} \varepsilon\left(\sum_{j=1}^p |y_j|, \sum_{j=p+1}^q |y_j|\right) y_{p+1} \wedge \dots \wedge y_{p+q} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_p$ , pour des éléments homogènes  $y_j \in E (1 \leq j \leq p+q)$ .

Soit  $F$  une  $A$ -module  $\Delta$ -graduée. On dit qu'une application  $\varepsilon$ -multilinéaire  $v : E^p \rightarrow F$  est  $\varepsilon$ -alternée si l'on a

$$\begin{aligned} v(y_1, \dots, y_{i+1}, y_i, \dots, y_p) \\ = -\varepsilon(|y_i|, |y_{i+1}|) v(y_1, \dots, y_p) \quad (1 \leq i < p) \end{aligned}$$

pour des éléments  $y_j \in E$  homogènes. Ces applications forment un  $A$ -sous-module de  $\text{Homgr}_A(T_A^p(E), F)$ ; si  $a : E^p \rightarrow \Lambda_A^p(E)$  est l'application  $(y_1, \dots, y_p) \mapsto y_1 \wedge \dots \wedge y_p$ ,  $a$  est  $\varepsilon$ -alternée et  $u \mapsto u \cdot a$  est un isomorphisme de  $A$ -modules de  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A^p(E), F)$  sur le module des applications  $\varepsilon$ -multilinéaires et  $\varepsilon$ -alternées de  $E^p$  dans  $F$ . On identifie ces deux modules.

PROPOSITION. - Soient  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -graduée,  $B$  une  $A$ -algèbre et  $u : E \rightarrow B$  une application  $A$ -linéaire de degré 0, telle que

$$u(y)u(y') + \varepsilon(|y'|, |y|)u(y')u(y) = 0$$

( $y, y' \in E$  homogènes).

Il existe un morphisme de  $A$ -algèbres unique  $u' : \Lambda_A(E) \rightarrow B$  prolongeant  $u$ .

C'est clair.

Soit  $E$  un  $K$ -module  $\Delta$ -graduée; en munissant  $K$  de la  $\Delta$ -gradation triviale, on définit l'algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative  $\Lambda_K(E) = {}^{\varepsilon} \Lambda_K(E)$  comme ci-dessus. Et, pour tout  $A$ -module  $\Delta$ -graduée  $E$ , on a un morphisme naturel de  ${}^{\varepsilon} \Lambda_K(E)$  sur  ${}^{\varepsilon} \Lambda_A(E)$ , qui est surjectif.

(1.2) PRODUITS EXTERNES.

On désigne par  $\varepsilon$  un facteur de commutation sur  $\Delta$ .

(1.2.1) Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F)$  est un  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué ( $u$  est homogène de degré  $(p, i)$  si  $u(y_1 \wedge \dots \wedge y_p) \in F_{i + \sum_j |y_j|}$  ( $y_j \in E$  homogènes) et  $u(\Lambda_K^q(E)) = 0$  et  $q \neq p$ ).

Soient  $I = \{1, \dots, n\}$  et  $y_1, \dots, y_n \in E$  homogènes ; pour  $H \subset I$ , on pose  $y_H = y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p}$  si  $H = \{i_1, \dots, i_p\}$  et  $i_1 < \dots < i_p$ ,  $|y_H| = |y_{i_1}| + \dots + |y_{i_p}|$ ,  $H' = I - H$ ,  $\rho(H, H') = (-1)^v$  où  $v = \text{Card}(\{(i, i') \in H \times H' \mid i' < i\})$  et  $\eta(y_H, y_{H'}) = \prod_{\substack{(i, i') \in H \times H' \\ i' < i}} \varepsilon(|y_i|, |y_{i'}|)$ .

Soient  $E, F, F'$  et  $G$  des  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués et  $\phi: F \times F' \rightarrow G$  une application  $K$ -bilineaire de degré 0.

Soient  $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(E), F)$  et  $c' \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^{n-p}(E), F')$  ; posons  $v(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\text{card}(H) = p} \rho(H, H') \eta(y_H, y_{H'}) \varepsilon(|c|, |y_H|) \phi(c(y_H), c'(y_{H'}))$ .

On définit ainsi une application  $K$ -multilinéaire et  $\varepsilon$ -alternée  $v$  de  $E^n$  dans  $G$ , donc un élément  $\phi'(c, c') \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^n(E), G)$ .

D'où une application  $K$ -bilineaire graduée, de degré  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \phi' : \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F) \times \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F') \\ \rightarrow \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), G) . \end{aligned}$$

EXEMPLES. - Pour  $p = 0$ , on identifie  $\text{Homgr}_K(K, F)$  à  $F$  et on a

$$\phi'(z, c)(t) = \phi(z, c(t)) \quad \text{si } t \in \Lambda_K(E) \text{ et } z \in F.$$

Pour  $p = q = 1$ , on a

$$\phi'(c, c')(y_1 \wedge y_2) = \varepsilon(|c|, |y_2|) \phi(c(y_1), c'(y_2)) - \varepsilon(|y_1|, |y_2|) \varepsilon(|c|, |y_1|) \phi(c(y_2), c'(y_1)).$$

On désigne par  $\phi''$  l'application  $K$ -multilinéaire  $\varepsilon$ -alternée définie par

$$\phi''(c, c') = \phi'(\tilde{c}, \tilde{c}')^{\sim}.$$

EXEMPLES. - Pour  $p = 0$ . On a

$$\phi''(z, c)(t) = \varepsilon(|z|, |t|) \phi(z, c(t))$$

pour  $z \in F$  et  $t \in \Lambda_K(E)$  homogènes.

Pour  $p = q = 1$ , on a

$$\phi''(c, c')(y_1 \wedge y_2) = \varepsilon(|c'|, |y_1|) \phi(c(y_1), c'(y_2)) - \varepsilon(|c'| + |y_1|, |y_2|) \phi(c(y_2), c'(y_1)).$$

Pour  $z \in F$ ,  $z' \in F'$ , on a donc

$$\phi'(z, z') = \phi'(z, z') = \phi''(z, z').$$

(1.2.2). Soit  $A$  une algèbre  $\Delta$ -graduée. En faisant  $F = F' = G = A$  dans (1.2.1) et en prenant pour  $\phi$  la multiplication de  $A$ ,  $\phi'$  (resp.  $\phi''$ ), on définit sur  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), A)$  une structure de  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée dont  $A (= \text{Homgr}_K(K, A))$  est une sous-algèbre.

PROPOSITION. - *Si  $A$  est une  $K$ -algèbre graduée,  $\varepsilon$ -commutative,  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), A)$  est une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative (pour chacun des deux produits ci-dessus, notés  $\wedge$  et  $\mathcal{A}$  et dits externes).*

La vérification est affaire de routine. (cf. N. Bourbaki, Algèbre, ch. III, § 11).

(1.2.3). Soit  $A$  une algèbre  $\Delta$ -graduée  $\varepsilon$ -commutative et  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués.

En remplaçant  $F$  par  $A$  et  $F'$  et  $G$  par  $F$  dans (1.2.1), et en prenant pour  $\phi$  l'application  $(x, z) \mapsto xz$  de  $A \times F$  dans  $F$ ,  $\phi'$  (resp.  $\phi''$ ), on définit sur  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F)$  une structure de  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), A)$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué dont on note  $\Lambda$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) le produit.

$\text{Homgr}_A(\Lambda_A(E), A)$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\widetilde{\Lambda}_A(E), \widetilde{A})$ ) s'identifie à une sous-algèbre de  $\text{Homgr}_K(\Lambda_A(E), A)$  munie de  $\Lambda$  (resp.  $\mathcal{A}$ ).  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(E), F)$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\widetilde{\Lambda}_A(E), \widetilde{F})$ ) s'identifie à un sous- $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(E), A)$ -module de  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F)$ , pour  $\Lambda$  (resp.  $\mathcal{A}$ ).

### (1.3) PRODUITS INTERIEURS.

Soit  $\varepsilon$  un facteur de commutation sur  $\Delta$ .

(1.3.1). Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués. Pour  $z \in \Lambda_K^p(E)$  homogène et  $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^{p+q}(E), F)$ , on pose

$$(i(z)c)(z') = \varepsilon(|z|, |z'|)c(z \wedge z')$$

pour  $z' \in \Lambda_K^q(E)$  homogène.

On définit ainsi un élément  $i(z)c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E)^q, F)$ . D'où, pour tout  $z \in \Lambda_K(E)$ , un  $K$ -endomorphisme gradué  $i(z)$  de  $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F)$  (de degré  $(\deg(z), |z|)$  si  $z$  est homogène).

On pose  $j(z)c = i(z)(\check{c})$ , c'est-à-dire  $j(z) = \sim i(z) \sim$ , pour  $z \in \Lambda_K(E)$ .

On a ainsi  $(j(z)c)(z') = \varepsilon(|c|, |z|)c(z \wedge z')$

si  $z$  et  $c$  sont homogènes.

(1.3.2). Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée et  $\varepsilon$ -commutative et soient  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules.

PROPOSITION. - Pour  $y \in E$ ,  $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), A)$  et  $c' \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K(E), F)$

homogènes, on a

$$i(y)(c \wedge c') = (i(y)c) \wedge c' + (-1)^{\deg(c)} \varepsilon(|y|, |c|) c \wedge (i(y)c'),$$

$$j(y)(c \wedge c') = (j(y)c) \wedge c' + (-1)^{\deg(c)} \varepsilon(|y|, |c|) c \wedge (j(y)c').$$

Il suffit de démontrer la première formule, ce qui est un exercice facile.

De plus, on voit que, pour tout  $z \in \Lambda_K(E)$ ,  $i(z)$  (resp.  $j(z)$ ) est un  $A$ -endomorphisme de  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(E), F)$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(E)^\sim, \tilde{F})$ ).

#### (1.4) COMMUTATION.

(1.4.1). Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée, associative et unifère. Et soit  $E$  et  $F$  des  $A$ -modules  $\Delta$ -gradués. Pour  $x \in A$  et  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$ , homogènes, on pose

$$(\text{ad}(x)_\varepsilon u)(y) = xu(y) - \varepsilon(|u|, |x|) u(xy) \quad (y \in F).$$

On définit ainsi  $\text{ad}(x)_\varepsilon u \in \text{Homgr}_K(E, F)$ . D'où un endomorphisme  $\text{ad}(x)_\varepsilon$  (ou  $\text{ad}(x)$ ) de degré  $|x|$  de  $\text{Homgr}_K(E, F)$  et, pour tout  $x \in A$ , un endomorphisme gradué  $\text{ad}(x)$  de  $\text{Homgr}_K(E, F)$ . On pose, pour  $x \in A$  et  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$

$$\text{ad}(x)u = [x, u]$$

et  $[u, x] = -\varepsilon(|x|, |u|) [x, u],$

si  $x \in A$  et  $u$  sont homogènes, ce qui définit  $[u, x]$  dans tous les cas.

Soit  $G$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué ; pour  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$ ,  $v \in \text{Homgr}_K(F, G)$  et  $x \in A$  homogènes, on a

$$\text{ad}(x)(v.u) = (\text{ad}(x)v)u + \varepsilon(|x|, |v|) v(\text{ad}(x)u).$$

Soit  $h : A \rightarrow B$  un  $K$ -morphisme d'algèbres  $\Delta$ -graduées.

Soit  $E'$  un  $B$ -module  $\Delta$ -gradué ; par  $h$ ,  $E'$  est un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué ; si  $x \in A$  et  $u \in \text{Homgr}_K(E, E')$ , on a

$$\text{ad}(x)(u)(y) = h(x)u(y) - \varepsilon(|u|, |x|) u(xy) \quad (y \in E).$$

(1.4.2). Supposons  $A$ -alternée ; si  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$ , et  $x \in A$ ,  $y \in E$  sont homogènes, on a

$$(\text{ad}(x)\tilde{u})^\vee(y) = \varepsilon(|x|, |y|) (x u(y) - u(xy)).$$

Pour que  $u \in \text{Homgr}_A(E, F)$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\tilde{E}, \tilde{F})$ ), il faut et il suffit que  $\text{ad}(x)\tilde{u} = 0$  (resp.  $\text{ad}(x)u = 0$ ) pour tout  $x \in A$ .

(1.4.3). On identifie  $x \in A$  à  $\text{id}_A \in \text{Endgr}_K(A)$ . On a alors, pour  $x, x' \in A$  homogènes,

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad [x, x'] &= xx' - \varepsilon(|x|, |x'|) x'x; \\ [x', x] &= -\varepsilon(|x|, |x'|) [x, x']. \end{aligned}$$

(Ceci s'applique, en particulier, lorsque  $A = \text{Endgr}_K(E)$ , où  $E$  est un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué).

PROPOSITION. - Soit  $E, F$  des  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués ; pour  $x, x' \in A$  homogènes et  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$ , on a

$$[x, [x', u]] = [[x, x'], u] + \varepsilon(|x|, |x'|) [x, [x', u]]$$

(identité de Jacobi).

Autrement dit, on a, pour  $x, x' \in A$ ,

$$[\text{ad}(x), \text{ad}(x')] = \text{ad}([x, x'])$$

dans  $\text{Homgr}_K(E, F)$ .

Si  $A$  est  $\varepsilon$ -commutative, on a  $[x, x'] = 0$  si  $x, x' \in A$ , donc

$[\text{ad}(x), \text{ad}(x')] = 0$ , c'est-à-dire

$$\text{ad}(x) \cdot \text{ad}(x') = \varepsilon(|x|, |x'|) \cdot \text{ad}(x') \text{ad}(x)$$

si  $x, x' \in A$  sont homogènes.