

JEAN BRACONNIER

**3 - Algèbres de Lie graduées**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 1C  
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-19

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1982\\_\\_1C\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__1C_A3_0)

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

### 3 - ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES

Dans tout ce qui suit, on désigne par  $\varepsilon$  un facteur de commutation sur un groupe commutatif  $\Delta$ .

#### (3.1) DEFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

(3.1.1) Soit  $\mathfrak{g}$  un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué, muni d'une application  $K$ -bilineaire  $(x, x') \mapsto [x, x']$  de degré 0. On dit que  $\mathfrak{g}$  est une *algèbre de Lie graduée, relativement à  $\varepsilon$*  si

$$(i) [x, x''] = -\varepsilon(|x|, |x'|) [x', x] \quad ,$$

$$(ii) \varepsilon(|x|, |x''|) [x, [x', x'']] + \varepsilon(|x'|, |x|) [x', [x'', x]] + \varepsilon(|x''|, |x'|) [x'', [x, x']] = 0 \quad ,$$

quels que soient  $x, x', x'' \in \mathfrak{g}$  homogènes (identité de Jacobi).

La condition (i) signifie que  $(x, x') \mapsto [x, x']$  est une application  $\varepsilon$ -alternée.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, relativement à  $\varepsilon$ .  $\mathfrak{g}_0$  est une sous-algèbre de Lie (au sens usuel) de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $x \in \mathfrak{g}$ , on désigne par  $\text{ad}(x)$  l'application  $K$ -linéaire  $x \mapsto [x, x']$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$  : elle est homogène et de degré  $|x|$ , si  $x$  l'est.

L'identité de Jacobi s'écrit encore (compte tenu de (i)) :

$$\text{ad}(x) ([x', x'']) = [ \text{ad}(x)(x'), x'' ] + \varepsilon(|x|, |x'|) [x', \text{ad}(x)x''] \quad .$$

On dit que  $\mathfrak{g}$  est *commutative* si  $[x, x'] = 0$  quels que soient  $x, x' \in \mathfrak{g}$ .

Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{Ker}(\text{ad}(x))$  est une sous-algèbre graduée de  $\mathfrak{g}$  ;

$\bigcap_{x \in \mathfrak{g}} \text{Ker}(\text{ad}(x)) = \{x' \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{g}, [x, x'] = 0\}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ ,

appelé *centre de  $\mathfrak{g}$*  et noté  $Z(\mathfrak{g})$ .

EXEMPLES. - 1) Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée et associative. On définit sur  $A$  un produit  $K$ -bilineaire  $(x, x') \mapsto [x, x']_\varepsilon$  en posant

$$[x, x']_\varepsilon = xx' - \varepsilon(|x|, |x'|)x'x.$$

lorsque  $x$  et  $x'$  sont homogènes.  $A$ , muni de ce produit est une *algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, relativement à  $\varepsilon$* , notée  $A_\varepsilon$  (on écrit  $[ , ]$  au lieu de  $[ , ]_\varepsilon$  quand aucune confusion n'en résulte).

On notera que, si  $A$  est unifère, on a  $1 \in A_0$  et  $\text{ad}(1) = 0$ .

Pour que  $A$  soit  $\varepsilon$ -commutative il faut et il suffit que  $A_\varepsilon$  le soit.

2) En particulier, si  $E$  est un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué,  $\text{Endgr}_K(E)_\varepsilon$  est une  $K$ -algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, rel. à  $\varepsilon$ , notée encore  $\mathfrak{gl}_\varepsilon(E)$  (cf. (1.3)).

3) Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée et  $\varepsilon$ -commutative ;  $\text{Der}_\varepsilon(A)$  est une sous-algèbre de Lie graduée de  $\mathfrak{gl}_\varepsilon(A)$  ; de même,  $\text{Dif}_1(A)$  et  $\text{Dif}(A)$ .

4) Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  des  $K$ -algèbres de Lie,  $\Delta$ -graduées (rel. à  $\varepsilon$ ) On définit sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  une structure d'algèbre de Lie  $\Delta$ -graduées en posant  $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})_i = \sum_{j+k=i} \mathfrak{g}_j \times \mathfrak{h}_k$  ( $i \in \Delta$ ) et

$$[(x, y'), (x', y')] = \varepsilon(|x'|, |y|)([x, x'], [y, y']).$$

si  $x' \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \mathfrak{h}$  sont homogènes.

(3.1.2) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, relativement à  $\varepsilon$ . On note  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  l'ensemble des dérivations de  $\mathfrak{g}$ .  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  est une sous-algèbre  $\Delta$ -graduée de  $\mathfrak{gl}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ . Et  $x \mapsto \text{ad}(x)$  est un morphisme  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ , car l'identité de Jacobi s'écrit encore

$$\text{ad}([x, x']) = [\text{ad}(x), \text{ad}(x')]_\varepsilon.$$

Pour tout  $c \in \mathcal{D}er(\mathfrak{g})$  et tout  $x \in \mathfrak{g}$ , on a

$$[c, \text{ad}(x)]_{\varepsilon} = \text{ad}(c(x)).$$

REMARQUE. - Soit  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée, associative et unifère ; on a  $\text{Der}_{\varepsilon}(A) \subset \mathcal{D}er(A_{\varepsilon})$  et  $\text{ad}(x)_{\varepsilon} \in \text{Der}_{\varepsilon}(A)$  pour tout  $x \in A$ .

(3.1.3) Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, rel. à  $\varepsilon$ . Soit  $E$  un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué ; on dit qu'un morphisme de  $K$ -algèbres de Lie  $\Delta$ -graduées (rel. à  $\varepsilon$ )  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\varepsilon}(E)$  est une *représentation* de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$  ; et on dit encore que  $E$ , muni de l'application  $(x, y) \mapsto \pi(x)y$  de  $\mathfrak{g} \times E$  dans  $E$ , est un  $\mathfrak{g}$ -module ; pour qu'une application linéaire  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\varepsilon}(E)$  soit une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$ , il faut et il suffit qu'elle soit de degré 0 et que, pour  $x, x' \in \mathfrak{g}$  homogène, on ait

$$\pi([x, x']) = \pi(x)\pi(x') - \varepsilon(|x|, |x'|)\pi(x')\pi(x)$$

ou

$$\pi \cdot \text{ad}(x) = \text{ad}(\pi(x)) \quad (x \in \mathfrak{g}).$$

$\text{Ker}(\pi)$  est alors un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $y \in E$  est tel que  $\pi(x)y = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , on dit que  $y$  est *invariant par  $\pi$*  ; ces éléments forment un sous-module gradué  $E^{\mathfrak{g}}$  de  $E$ .

Soit  $E$  un  $K$ -module,  $\Delta$ -gradué trivialement ;  $\text{Endgr}_K(E) = \text{End}_K(E)$  est aussi gradué trivialement ; si  $\pi$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$ , on a  $\pi(\mathfrak{g}_i) = \{0\}$  pour tout  $i \in \Delta - \{0\}$  et  $\pi|_{\mathfrak{g}_0}$  est une représentation (au sens usuel) de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$  dans  $E$ .

Soit  $\rho$  (resp.  $\sigma$ ) une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans un  $K$ -module  $E$  (resp.  $F$ ) et soit  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$  ; on dit que  $u$  est un *morphisme* de  $\rho$  dans  $\sigma$  (ou que  $u$  entrelace  $\rho$  et  $\sigma$ ) si  $u\rho(x) = \sigma(x)u$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ . Les morphismes de  $\rho$  dans  $\sigma$  forment un sous-module de  $\text{Homgr}_K(E, F)$ .

(3.1.4) Soit  $\rho$  (resp.  $\sigma$ ) une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué  $E$  (resp.  $F$ ). Pour  $x \in \mathfrak{g}$  et  $u \in \text{Homgr}_K(E, F)$  homogènes on pose

$$\pi(x)u = \sigma(x) \cdot u - \varepsilon(|x|, |u|)u \cdot \rho(x) ;$$

on définit ainsi, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , un endomorphisme gradué  $\pi(x)$  de  $\text{Homgr}_K(E, F)$ ,

PROPOSITION. -  $\pi$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\text{Homgr}_K(E, F)$ .

En effet, si  $x, x' \in \mathfrak{g}$  sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} \pi(x)\pi(x')u &= \sigma(x)\sigma(x')u - \varepsilon(|x'|, |u|)\sigma(x)u\rho(x') \\ &\quad - \varepsilon(|x|, |x'|)(\varepsilon(|x|, |u|)\sigma(x')u\rho(x) + \varepsilon(|x|+|x'|, |u|)u\rho(x)\rho(x')) ; \end{aligned}$$

d'où le résultat .

Posons  $\pi'(x) = \sim(\pi(x))$  ; si  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in E$  sont homogènes, on a

$$\pi'(x)\omega(y) = \varepsilon(|x|, |y|)(\sigma(x)(u(y)) - u(\rho(x)y)).$$

PROPOSITION. -  $\pi'$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$ .

En effet, pour  $x, x' \in \mathfrak{g}$  et  $y \in E$  homogènes, on a

$$\begin{aligned} (\pi'([x, x'])(u)(y) &= \sim(\pi([x, x'])(u)(y) = \varepsilon(|x|+|x'|, |y|)(\pi(x)\pi(x')u(y) \\ &\quad - \varepsilon(|x|, |x'|)\pi(x')\pi(x)u(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi'(\pi'(x)\pi'(x')u')(y) &= \sim(\pi(x)\pi(x')\tilde{u})(y) \\ &= \varepsilon(|x|+|x'|, |y|)\pi(x)\pi(x')u(y). \end{aligned}$$

En permutant  $x$  et  $x'$ , on voit que

$$\pi'([x, x']) = [\pi'(x), \pi'(x')] .$$

Pour que  $u$  entrelace  $\rho$  et  $\sigma$ , il faut et il suffit que  $\pi'(x)u = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .

(3.2) L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE GRADUÉE.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $\Delta$ -graduée (relativement à  $\varepsilon$ ).

(3.2.1) Soit  $L$  l'idéal bilatère de  $T_K(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x \otimes x' - \varepsilon(|x|, |x'|)x' \otimes x - [x, x']$  ( $x, x' \in \mathfrak{g}$  homogènes).

On note  $U(\mathfrak{g})$  la  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée  $T_K(\mathfrak{g})/L$  qu'on appelle *algèbre enveloppante* de  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $T_K^+(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p \geq 0} T_K(\mathfrak{g})$ ; comme  $T_K(\mathfrak{g}) = K1 \oplus T_K^+(\mathfrak{g})$  et  $L \subset T_K^+(\mathfrak{g})$ ,  
 $U(\mathfrak{g}) = K1 \oplus U^+(\mathfrak{g})$ , où  $U^+(\mathfrak{g}) = T_K^+(\mathfrak{g})/L$  est un idéal bilatère  $\Delta$ -gradué de  $U(\mathfrak{g})$ . Soit  $\sigma$  l'application canonique de  $\mathfrak{g}$  dans  $U(\mathfrak{g})$ ; comme  $\mathfrak{g} \cap L = \{0\}$  et  $\mathfrak{g} \subset T_K^+(\mathfrak{g})$   $\sigma$  est injective et  $U^+(\mathfrak{g})$  est l'idéal engendré par  $\sigma(\mathfrak{g})$ .  
 Enfin, on a  $\sigma([x, x']) = \sigma(x)\sigma(x') - \varepsilon(|x|, |x'|)\sigma(x')\sigma(x)$  pour  $x, x' \in \mathfrak{g}$  homogènes;  $\sigma$  est un morphisme d'algèbre de Lie  $\Delta$ -graduées de  $\mathfrak{g}$  dans  $U(\mathfrak{g})$ .

Si  $\mathfrak{g}$  est commutative,  $U(\mathfrak{g})$  est une algèbre  $\Delta$ -graduée,  $\varepsilon$ -commutative.  
 En particulier, si  $E$  est un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué, considéré comme algèbre de Lie (rel. à  $\varepsilon$ ) commutative, l'algèbre  $U(E)$  se note  $S_K^\varepsilon(E)$  et est appelée *l'algèbre symétrique de  $E$  (rel. à  $\varepsilon$ )*;

$$S_K^\varepsilon(E) = K1 \oplus E \oplus \bigoplus_{p \geq 2} \Pi_K^p(E) / (J \cap T_K^p(E)) \text{ est } \mathbb{Z} \times \Delta \text{-graduée.}$$

(3.2.2) PROPOSITION. - Soit  $A$  une algèbre  $\Delta$ -graduée, associative et unifère;  
 Pour tout morphisme d'algèbres de Lie  $\Delta$ -graduées  $u: \mathfrak{g} \rightarrow A_\varepsilon$ , il existe un morphisme d'algèbres  $\Delta$ -graduées unique  $u': U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  tel que  $u' \cdot \sigma = u$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{u} & A_\varepsilon \\
 \downarrow K & & \parallel \\
 U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{u'} & A
 \end{array}$$

En effet, il existe un unique morphisme d'algèbres  $\Delta$ -graduées  $v : T_K(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  qui prolonge l'application  $K$ -linéaire  $u$  ; si  $x, x' \in \mathfrak{g}$  sont homogènes, on a  $v(x \otimes x' - \varepsilon(|x|, |x'|)x' \otimes x) = [x, x'] = u(x)u(x') - \varepsilon(|x|, |x'|)u(x')u(x) - u([x, x']) = 0$  ; donc  $L \subset \text{Ker}(v)$  et

$v$  définit, par passage au quotient un morphisme d'algèbres graduées  $u' : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  tel que  $u' \cdot \sigma = u$ . L'unicité de  $u'$  est évidente.

En particulier, si  $\pi$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué  $E$ , il existe un unique morphisme d'algèbres  $\Delta$ -graduées  $\pi' : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_K(E)$  tel que  $\pi' \cdot \sigma = \pi$ . Autrement dit,  $E$ , muni de  $z \cdot y = \pi'(z) \cdot y (z \in U(\mathfrak{g}), y \in E)$ , est un  $U(\mathfrak{g})$  module  $\Delta$ -gradué. Inversement, soit  $E$  un  $U(\mathfrak{g})$ -module  $\Delta$ -gradué ;

en posant  $\pi(x)(y) = \sigma(x)y (x \in \mathfrak{g}, y \in E)$ , on définit une représentation dans  $E$ .

Soient  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ) une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$  (resp.  $E'$ ).

Si  $u \in \text{Homgr}_K(E, E')$  entrelace  $\pi$  et  $\pi'$ ,  $u$  est une application  $U(\mathfrak{g})$ -linéaire de  $E$  dans  $E'$ .

De même, si  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  est un morphisme d'algèbre de Lie  $\Delta$ -graduées (rel. à  $\varepsilon$ ), il existe un unique morphisme d'algèbres  $U' : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}')$  tel que  $\sigma' u = u' \cdot \sigma$  ( $\sigma'$  étant l'application canonique de  $\mathfrak{g}'$  dans  $U(\mathfrak{g}')$ ).

(3.2.3) Soit  $p$  un entier  $\geq 0$  et  $U_p(\mathfrak{g})$  l'image de  $\bigoplus_{q \leq p} T_K^q(\mathfrak{g})$  dans  $U(\mathfrak{g})$  ;

$U_p(\mathfrak{g})$  est un sous-module  $\Delta$ -gradué de  $U(\mathfrak{g})$  ; on a  $U_0(\mathfrak{g}) = K 1$  et l'algèbre

$U(\mathfrak{g})$  est filtrée par  $(U_p(\mathfrak{g}))_{p \geq 0}$ . Soit  $\text{gr}(U(\mathfrak{g})) = K 1 \oplus \bigoplus_{p > 0} (U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g}))$  ;

$\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$  est canoniquement une  $K$ -algèbre (associative et unifère)  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée.

Soit  $\phi_p$  l'application composée  $T_K^p(\mathfrak{g}) \rightarrow U_p(\mathfrak{g}) \rightarrow U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$ ;  $\phi_p$  est surjective et  $\phi = \bigoplus_p \phi_p$  est un  $K$ -morphisme d'algèbres  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées de  $T_K(\mathfrak{g})$  dans  $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$ .

$\phi$  est nul dans l'idéal bilatère de  $T_K(\mathfrak{g})$  engendré par les  $x \otimes x' - \varepsilon(|x|, |x'|)x' \otimes x$  ( $x, x' \in \mathfrak{g}$  homogènes).

En effet, on a  $x \otimes x' - \varepsilon(|x|, |x'|)x' \otimes x \in T_K^2(\mathfrak{g})$  et l'image de cet élément dans  $U_2(\mathfrak{g})$  est  $[x, y] \in U_1(\mathfrak{g})$ . Par suite,  $\phi$  définit un morphisme de  $K$ -algèbres  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées de  $S_K(\mathfrak{g})$  dans  $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$  qui est surjectif. D'où :

PROPOSITION. -  $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$  est une algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon$ -commutative.

(3.2.4) PROPOSITION. - Soit  $c \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ ; il existe une unique  $\varepsilon$ -dérivation  $c_\varepsilon$  de  $U(\mathfrak{g})$  telle que  $c_\varepsilon \cdot \sigma = \sigma \cdot c$ .

LEMME. - Soit  $E$  un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué. Pour tout  $u \in \text{Endgr}_K(E)$ , il existe une unique  $\varepsilon$ -dérivation  $u'$  de  $T_K(E)$  prolongeant  $u$ .

On peut supposer  $u$  homogène ;

$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_i \varepsilon(|x|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|)x_1 \otimes \dots \otimes u(x_i) \otimes \dots \otimes x_p$  définit une application  $K$ -multilinéaire de degré  $(u)$  de  $E^p$  dans  $T_K^p(E)$ , d'où un endomorphisme  $u^p$  de  $T_K^p(E)$ , de degré  $|u|$  et un endomorphisme  $u' = \bigoplus_p u^p$  de  $T_K(E)$  prolongeant  $u$  et tel que

$u'(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) = \sum_i \varepsilon(|u|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|)x_1 \otimes \dots \otimes u(x_i) \otimes \dots \otimes x_p$ , si  $x_1, \dots, x_p \in E$  sont homogènes. Si  $x_1, \dots, x_p, x'_1, \dots, x'_q \in E$  sont homogènes, on a



$$\begin{aligned}
& u'((x_1 \otimes \dots \otimes x_p) \otimes (x'_1 \otimes \dots \otimes x'_q)) = \\
& \sum_{i=1}^p \varepsilon(|u|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) x_1 \otimes \dots \otimes u_1(x_1) \otimes \dots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \dots \otimes x'_q \\
& + \varepsilon(|u|, |x_1| + \dots + |x_p|) \sum_{q=1}^q \varepsilon(|c|, |x'_1| + \dots + |x'_{j-1}|) x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \dots \otimes u(x'_j) \otimes \dots \otimes x'_q .
\end{aligned}$$

Donc

$$u'(z \otimes z') = u'(z) \otimes z' + \varepsilon(|u|, |z|) z \otimes u'(z), \text{ pour } z, z' \in T_K(E) \text{ homogènes.}$$

Soit alors  $c \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  et  $c'$  la dérivation de  $T(\mathfrak{g})$  définie au moyen du lemme. Si  $x, x' \in \mathfrak{g}$  sont homogènes, on a

$$\begin{aligned}
& c'(x \otimes x' - \varepsilon(|x|, |x'|) x' \otimes x - [x, x']) = \\
& c(x) \otimes x' + \varepsilon(|c|, |x|) x \otimes c(x') - \varepsilon(|x|, |x'|) c(x') \otimes x - \varepsilon(|c| + |x|, |x'|) x' \otimes c(x) \\
& \quad - [c(x), x'] - \varepsilon(|c|, |x|) [x, c(x')] \\
= & c(x) \otimes x' - \varepsilon(|c| + |x|, |x'|) x' \otimes c(x) - [c(x), x'] - \varepsilon(|x|, |x'|) (c(x') \otimes x) \\
& - \varepsilon(|c| + |x'|, |x|) x \otimes c(x') - [c(x'), x] \in L.
\end{aligned}$$

Par passage au quotient,  $c$  définit une  $\varepsilon$ -dérivation  $c_\varepsilon$  de  $U(\mathfrak{g})$

telle que  $c_\varepsilon \cdot \sigma = \sigma c$  et  $c_\varepsilon$  est évidemment unique.

De plus, si  $x \in \mathfrak{g}$ , on a

$$\text{ad}(x)_\varepsilon = \text{ad}(\sigma(x))_\varepsilon .$$

En effet, on a pour  $x', x'' \in \mathfrak{g}$  homogènes,

$$\begin{aligned}
\text{ad}(\sigma(x))_\varepsilon (\sigma(x')) &= \sigma(x) \sigma(x') - \varepsilon(|x|, |x'|) \sigma(x') \sigma(x) \\
&= \sigma([x, x']) = \sigma(\text{ad}(x) \cdot x')
\end{aligned}$$

### (3.3) COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES.

(3.3.1) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $\Delta$ -graduée, relativement à un facteur de commutation  $\varepsilon$  sur  $\Delta$ .  $\Lambda_K^\varepsilon(\mathfrak{g})$  (encore noté  $\Lambda_K(\mathfrak{g})$ ) est une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative

Soit  $E$  un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué (on considère  $E$  comme  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué, avec  $E_i^0 = E_i$  et  $E_i^p = \{0\}$  si  $p \neq 0$  et  $i \in \Delta$ ) ; On note  $C(\mathfrak{g}, E)$  le  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué

$\text{Homgr}_K(\Lambda_K(\mathfrak{g}), E) = \bigoplus_p C^p(\mathfrak{g}, E)$ , où  $C^p(\mathfrak{g}, E) = \text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(\mathfrak{g}), E)$  ; on a  $C^0(\mathfrak{g}, E) = E$  et

$$C^1(\mathfrak{g}, E) = \text{Homgr}_K(\mathfrak{g}, E).$$

On note simplement  $C(\mathfrak{g})$  le module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

Soit  $p$  un entier  $\geq 0$ . Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  homogène,  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto$

$\sum_{i=1}^p \varepsilon(|x|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) x_1 \wedge \dots \wedge [x, x_i] \wedge \dots \wedge x_p$  définit une application

$K$ -multil neaire et  $\varepsilon$ -alternée de  $\mathfrak{g}^p$  dans  $\Lambda_K^p(\mathfrak{g})$  qui s'identifie à un endomorphisme  $\text{ad}^p(x)$  de degré  $|x|$  de  $\Lambda_K^p(\mathfrak{g})$ . D'où, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , un élément  $\text{ad}^p(x) \in \mathfrak{gl}_\varepsilon(\Lambda_K^p(\mathfrak{g}))$  et, comme on le voit facilement,  $\text{ad}^p$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\Lambda_K^p(\mathfrak{g})$  ; ceci définit une représentation encore notée  $\text{ad}$ , de  $\mathfrak{g}$  dans  $\Lambda_K(\mathfrak{g})$ , qui prolonge la représentation  $\text{ad}$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

(3.3.2) Ceci étant, soit  $\pi$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans un  $K$ -module  $\Delta$ -gradué  $E$  ; si on pose, pour  $x \in \mathfrak{g}$  et  $c \in C^p(\mathfrak{g}, E)$  homogènes,

$$\mathcal{N}(x)c = \pi(x).c - \varepsilon(|x|, |c|) c \cdot \text{ad}^p(x),$$

on définit une représentation  $\mathcal{N}$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $C^p(\mathfrak{g}, E)$ , donc dans  $C(\mathfrak{g}, E)$

(cf. (3.1.4)) ; on a donc, si  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $c \in C^p(\mathfrak{g}, E)$  et  $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}$  sont homogènes,  $(\mathcal{N}(x)c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \pi(x)c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p)$

$$- \varepsilon(|x|, |c|) \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) c([x, x_i] \wedge \dots \wedge \check{x}_i \wedge \dots \wedge x_p).$$

Et en posant  $\theta(x) = \sim \mathcal{N}(x) \sim$ , on définit une seconde représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $C(\mathfrak{g}, E)$  ; avec les notations pr c dentes, on a

$$\begin{aligned} (\theta(x)c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) &= \varepsilon(|x|, |x_1| + \dots + |x_p|) (\pi(x)c(x_1) \wedge \dots \wedge x_p) \\ &- \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) c([x, x_i] \wedge \dots \wedge \check{x}_i \wedge \dots \wedge x_p). \end{aligned}$$

En particulier si  $\pi = \text{ad}$ , on définit ainsi des représentations  $\mathcal{N}$  et  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $C(\mathfrak{g})$ .

Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $j(x)$  et  $i(x)$  sont des applications  $K$ -linéaires graduées de  $C^p(\mathfrak{g}, E)$  dans  $C^{p-1}(\mathfrak{g}, E)$ , donc des endomorphismes gradués de  $C(\mathfrak{g}, E)$  homogènes et de degré  $(-1 |x|)$  si  $x$  est homogène.

PROPOSITION. - Pour  $x, x' \in \mathfrak{g}$ , on a dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}^{\varepsilon_Z}(C(\mathfrak{g}, E))$

$$\begin{aligned} [j(x), j(x')]_{\varepsilon_Z} &= 0, \\ [\mathcal{V}(x), j(x')]_{\varepsilon_Z} &= j([x, x']) \end{aligned}$$

(formules de E. Cartan).

Si  $x$  et  $x'$  sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} [j(x), j(x')]_{\varepsilon_Z} &= j(x)j(x') + \varepsilon(|x|, |x'|)j(x)j(x), \\ [\mathcal{V}(x), j(x')]_{\varepsilon_Z} &= \mathcal{V}(x)j(x') - \varepsilon(|x|, |x'|)j(x')\mathcal{V}(x). \end{aligned}$$

Soit  $c \in C^p(\mathfrak{g}, E)$ .

On a

$$j(x)j(x')c(z) = \varepsilon(|x|, |x'|)c(x \wedge x' \wedge z)$$

( $z \in C^{p-2}(\mathfrak{g}, E)$ ); d'où la première formule.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on a } (\mathcal{V}(x)j(x')c)(x_2 \wedge \dots \wedge x_p) &= \varepsilon(|c|, |x'|)\pi(x)c(x' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) \\ - \varepsilon(|c|, |x| + |x'|) \sum_{i=2}^p \varepsilon(|x|, |x_2| + \dots + |x_p|) &c(x' \wedge \dots \wedge [x, x_i] \wedge \dots \wedge x_p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (j(x')\mathcal{V}(x)c)(x_2 \wedge \dots \wedge x_p) &= \varepsilon(|x| + |c|, |x'|)(\pi(x)c(x' \wedge \dots \wedge x_p) \\ - \varepsilon(|x|, |x'|)c([x, x'] \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p)) & \\ - \varepsilon(|c| + |x'|, |x|) \sum_{j=2}^p \varepsilon(|x|, |x_2| + \dots + |x_p|) &c(x' \wedge \dots \wedge [x, x_i] \wedge \dots \wedge x_p). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(3.3.3) PROPOSITION. - Il existe un unique endomorphisme  $\partial$  de  $C(\mathfrak{g}, E)$  de degré  $(1, 0)$  et tel que :

$$\mathcal{V}(x) = [\partial, j(x)]_{\varepsilon_Z}$$

pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .

Cette relation s'écrit, si  $x \in \mathfrak{g}$  et  $c \in C^P(\mathfrak{g}, E)$  sont homogènes

$$(1) \quad \partial c(x \wedge z) = \varepsilon(|c|, |x|)(v(x)c)(z) - (\partial j(x)c)(z) \quad (z \in \Lambda_K^{p-1}(\mathfrak{g})).$$

Posons alors, pour  $y \in E = C^0(\mathfrak{g}, E)$ ,

$$(2) \quad \partial^\circ y(x) = \varepsilon(|x|, |y|) \pi(x)y.$$

$x \in \mathfrak{g}$  homogène. Ceci définit un élément de  $\text{Homgr}_K(E, C^1(\mathfrak{g}, E))$ . Et la formule

(1) permet de définir, par récurrence sur  $p$ , un élément

$\partial^P \in \text{Homgr}_K(C^P(\mathfrak{g}, E), C^{P+1}(\mathfrak{g}, E))$  ; d'où  $\partial$  vérifiant la proposition.

Si  $d = \nu \partial \nu$ ,  $d$  est l'unique endomorphisme de degré  $(1, 0)$  de  $C(\mathfrak{g}, E)$  tel que  $\theta(x) = [d, i(x)]_\varepsilon$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$

On a, si  $c \in C^P(\mathfrak{g}, E)$  et si  $x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathfrak{g}$  sont homogènes,

$$\begin{aligned} (\partial c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |c| + |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) \\ &\pi(x_i)c(x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_{p+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varepsilon(|x_i|, |x_j|) \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) \\ &\varepsilon(|x_j|, |x_1| + \dots + |x_{j-1}|) c([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_j \wedge \dots \wedge x_{p+1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (dc)(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) \pi(x_i)c(x_1 \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{x_i} \wedge \dots \wedge x_p) \\ &+ c'(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+1}), \end{aligned}$$

$c'$  étant le second terme du second membre de la formule précédente.

En particulier, si  $y \in E$  et  $x \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} \partial y(x) &= \varepsilon(|x|, |y|) \pi(x)y = \widetilde{\pi(x)}y, \\ dy(x) &= \Pi(x)y; \end{aligned}$$

et, si  $\pi = \text{ad}$ ,

$$\begin{aligned} \partial x &= -\text{ad}(x), \\ dx &= -\widetilde{\text{ad}(x)}. \end{aligned}$$

(3.3.4) PROPOSITION. - On a, si  $x \in A$ ,  $[\mathcal{V}(x), \partial]_{\varepsilon_Z} = 0$   
et  $\partial^2 = 0$ .

L'identité de Jacobi dans  $\mathfrak{gl}^{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}(C(\mathfrak{g}, E))$  et les formules de Cartan montrent que, si  $x, x' \in A$  sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} [j(x'), [\mathcal{V}(x), \partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} &= \varepsilon(|x|, |x'|) [\mathcal{V}(x), [\partial, j(x')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} + [\partial, [j(x'), \mathcal{V}(x)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} \\ &= -\varepsilon(|x|, |x'|) [\partial, j[x, x']]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0. \end{aligned}$$

Donc  $j(x') [\mathcal{V}(x), \partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = -\varepsilon(|x|, |x'|) [\mathcal{V}(x), \partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} j(x')$ .

Comme, pour  $y \in E$ , on a  $\mathcal{V}(x)(\partial y) = \partial(\mathcal{V}(x)y)$ , on en déduit par récurrence, que  $[\partial(x), \partial]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .

Par suite, on a, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,

$$\partial^2 j(x) = \partial v(x) - \partial j(x) \partial = j(x) \partial^2.$$

Comme pour  $y \in E$ , on a  $\partial^2 y = 0$ , on en déduit que  $\partial^2 = 0$ .

COROLLAIRE. - On a, si  $x \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} [\theta(x), d]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} &= 0 \\ \text{et } d^2 &= 0. \end{aligned}$$

(3.3.5) Ainsi  $(C(\mathfrak{g}, E), \partial)$  est un complexe de  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués : on note  $h(\mathfrak{g}, E)$  (ou  $h(\pi)$ ) le  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué de cohomologie qu'il définit, qu'on appelle la *cohomologie de la représentation*  $\pi$ . De même  $(C(\mathfrak{g}, E), d)$  est un complexe de  $K$ -modules gradués et  $\sim$  est un isomorphisme involutif de  $(C(\mathfrak{g}, E), \partial)$  sur  $(C(\mathfrak{g}, E), d)$ , qui induit un isomorphisme involutif de  $h(\mathfrak{g}, E)$  sur le module de cohomologie de  $(C(\mathfrak{g}, E), \partial)$ . On note  $h(\mathfrak{g})$  la cohomologie de la représentation  $\text{ad}$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$ , dite *cohomologie de*  $\mathfrak{g}$ .

On a  $h^0(\mathfrak{g}, E) = E^{\mathfrak{g}}$ , en particulier  $h^0(\mathfrak{g})$  est le centre  $Z(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$ .

On a  $\text{Ker}(\partial) \cap C^1(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$  et  $\text{Im}(\partial) \cap C^1(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$ ; donc  $h^1(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g}) / \text{ad}(\mathfrak{g})$ .

(3.3.6) Soit toujours  $\pi$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$ . En appliquant ce qui est dit dans (1.2.1) à  $(x, x') \mapsto [x, x']$ , on obtient une application  $K$ -bilinéaire de degré 0 de  $C(\mathfrak{g}) \times C(\mathfrak{g})$  dans  $C(\mathfrak{g})$ , notée encore  $[ , ]$  et définie par

$$[c, c'](x_I) = \sum_{\substack{H \in I \\ \text{Card}(H)=p}} \rho(H; H') \varepsilon(|x_H|) \varepsilon(|c'|) \varepsilon(|x_H|) [c(x_H), c'(x_{H'})]$$

( $I = \{1, p+q\}$ ,  $c \in C^p(\mathfrak{g})$ ,  $c' \in C^q(\mathfrak{g})$ ,  $x_1, \dots, x_{p+q} \in \mathfrak{g}$  homogènes).

Pour  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $c \in C^p(\mathfrak{g})$  et  $z \in \Lambda_K^p(\mathfrak{g})$ , on a

$$[x, c](z) = [x, c(z)] .$$

PROPOSITION. -  $C(\mathfrak{g})$ , muni de  $[ , ]$  est une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathbb{Z} \times \Delta$  graduée, relativement à  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ , dont  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre, Et  $\mathcal{V}(x)$ ,  $j(x)$  ( $x \in \mathfrak{g}$ ) et  $\partial$  sont des dérivations de  $C(\mathfrak{g})$ .

La vérification est de pure routine.

$\text{Ker}(\partial)$  est donc une sous-algèbre de Lie graduée de  $C(\mathfrak{g})$  et  $\text{Im}(\partial)$  un idéal gradué de cette sous-algèbre. Par suite,  $[ , ]$  induit une application  $K$ -bilineaire graduée sur  $\mathfrak{H}_K(\mathfrak{g})$ , encore notée  $[ , ]$ , et  $\mathfrak{H}_K(\mathfrak{g})$ , muni de cette opération, est une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée (rel. à  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ ).

Plus généralement, soit  $\pi$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $E$ . En procédant comme ci-dessus pour  $(x, y) \mapsto \pi(x)y$ , on définit une application bilinéaire  $(c, c') \mapsto \pi(c)c'$  de  $C(\mathfrak{g}) \times C(\mathfrak{g}, E)$  dans  $C(\mathfrak{g}, E)$  telle que  $\pi$  soit une représentation de  $C(\mathfrak{g})$  dans le module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $C(\mathfrak{g}, E)$ .

Et on a

$$\partial(\pi(c)c') = \pi(\partial c)c' + (-1)^{\text{deg}(c)} \pi(c) \partial c' .$$

La représentation  $\pi$  induit donc une représentation, notée encore  $\mathfrak{h}(\pi)$ , de  $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$  dans le  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}, E)$ .

(3.3.7) Soient  $A$  une  $K$ -algèbre  $\Delta$ -graduée, associative et unifère et  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué. Soit  $\gamma$  la représentation de l'algèbre de Lie  $A_{\varepsilon}$  dans  $E$  définie par définie par  $\gamma(x)y = xy$  ( $x \in A$ ,  $y \in E$ ).

Si  $x \in A_{\varepsilon}$  et  $c \in C(A_{\varepsilon}, E)$ , on a

$$j(1)c(z) = c(1 \wedge z) \quad (z \in \Lambda_K(A)) ,$$

$$\mathcal{V}(1) = 1_{C(A_{\varepsilon}, E)} ;$$

donc  $[\partial, j(1)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 1_{C(A_{\varepsilon}, E)}$ . Ainsi  $i(1_E)$  est une homotopie reliant  $1_{C(A_{\varepsilon}, E)}$  à 0.

D'où :

PROPOSITION. -  $\mathfrak{H}_K(A_{\varepsilon}, E) = 0$ .

En particulier, soit E un K-module  $\Delta$ -gradué. E est un  $\text{End}_K(E)$ -module,  $\gamma$  est le morphisme  $1_{\mathfrak{gl}_\epsilon(E)}$  et  $h(\mathfrak{gl}_\epsilon(E), E) = 0$ .

(3.3.8) Soit A une K-algèbre  $\Delta$ -graduée,  $\epsilon$ -commutative.  $\text{Der}(A)$  est une K-algèbre de Lie,  $\Delta$ -graduée, relativement à  $\epsilon$ .

On note  $\Phi(A)$  le A-module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\text{Der}(A)), A)$ . Le A-module (  droite)  $\Phi(A)$  est le dual gradué du A-module (  gauche)  $\mathbb{Z}$ -gradué  $\Lambda_A(\text{Der}(A))$ . On dit que les éléments de  $\Phi(A)$  sont les formes différentielles (extérieures) sur A ; si  $\alpha \in \Phi(A)$  et  $Z \in \Lambda_A(\text{Der}(A))$ , on note  $\langle Z, \alpha \rangle$  la valeur  $\alpha(Z) \in A$ .

Le morphisme canonique  $\Lambda_K(\text{Der}(A)) \rightarrow \Lambda_A(\text{Der}(A))$  étant surjectif, l'application canonique  $\Phi(A) \rightarrow C(\text{Der}(A), A)$  est injective, ce qui permet d'identifier  $\Phi(A)$  à un sous K-module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué de  $C(\text{Der}(A), A)$ .

On considère la représentation de  $\text{Der}(A)$  dans A définie par l'inclusion  $\text{Der}(A) \subset \mathfrak{gl}_\epsilon(A)$ .

LEMME. - Soit  $X \in \text{Der}(A)$ . Pour tout  $\alpha \in \Phi(A)$ ,  $i(X)\alpha$  et  $\theta(X)\alpha$  sont des éléments de  $\Phi(A)$ .

Il faut montrer que  $i(X)\alpha$  et  $\theta(X)\alpha$  sont  $\epsilon$ -multil niaires ; et il suffit pour cela, de voir que, si  $\alpha \in \Phi(A)^p$  et si  $X_2, \dots, X_p \in \text{Der}(A)$ ,  $X_1 \mapsto (i(X)\alpha)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$  et  $X_1 \mapsto (\theta(X)\alpha)(X_1 \wedge \dots \wedge X_p)$  sont A-l niaires. Or on a

$$i(X)\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}) = \epsilon(|X|, |X_1|) + \dots + |X_{p-1}| \alpha(X \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$$

$$i(X)\alpha(xX_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}) = \epsilon(|X|, |x| + |X_1| + \dots + |X_{p-1}|) \alpha(X \wedge xX_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$$

$$= x i(X)\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}).$$

On a, d'autre part,

$$\theta(X)\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \epsilon(|X|, \sum_i |X_i|) (X.\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) - \alpha([X, X_1] \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p))$$

$$+ \beta(X, X_1, \dots, X_p)$$

o   $X_1 \mapsto \beta(X, X_1, \dots, X_p)$  est A-l niaire.

Or on a

$$X.d(xX_1 \wedge \dots \wedge X_p) - \alpha([X, xX_1] \wedge \dots \wedge X_p) = \\ \varepsilon(|X|, |x|)x(X.\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) - \alpha([X, X_1] \wedge \dots \wedge X_p)) ;$$

d'où le résultat.

Comme  $\theta(X) = [d, i(X)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}$  pour tout  $X \in \text{Der}(A)$ , on voit, par récurrence sur  $\text{deg}(\alpha)$ , le résultat suivant.

PROPOSITION. - Si  $\alpha \in \Phi(A)$ , on a  $d\alpha \in \Phi(A)$ .

On a ainsi, pour  $\alpha \in \Phi(A)^p$  homogène, et pour  $X, X_1, \dots, X_{p+1} \in \text{Der}(A)$  homogènes,

$$\langle X_1 \dots X_{p-1}, i(X)\alpha \rangle = \varepsilon(|X|, |X_1| + \dots + |X_{p-1}|) \langle X \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}, \alpha \rangle , \\ \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_p, \theta(X)\alpha \rangle = \varepsilon(|X|, |X_1| + \dots + |X_p|) (X \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_p, \alpha \rangle \\ - \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|X_i|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \langle [X, X_i] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{X}_i \wedge \dots \wedge X_p, \alpha \rangle) , \\ \text{et } \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}, d\alpha \rangle = \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|X_i|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \langle X \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{X}_i \wedge \dots \wedge X_p, \alpha \rangle \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varepsilon(|X_i|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \varepsilon(|X_j|, |X_1| + \dots + |X_{j-1}|) \varepsilon(|X_i|, |X_j|) \\ \langle [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{X}_i \wedge \dots \wedge \overset{\vee}{X}_j \wedge \dots \wedge X_p, \alpha \rangle .$$

Ainsi  $(\Phi(A), d)$  est un complexe de  $K$ -modules  $\Delta$ -gradués, dit encore, par abus de langage, complexe de de Rham de  $A$  (cf. (2.1.6)). On note  $H(\Phi(A)) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$  le  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué de cohomologie de ce complexe.

(3.3.9) Soit  $A$  comme ci-dessus.  $\text{Homgr}_K(\wedge_K(\text{Der}(A)), A) = C(\text{Der}(A), A)$  est une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative. Il est clair que  $\Phi(A)$  est une sous-algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée de celle-ci.

PROPOSITION. -  $i(X), \theta(X)$  ( $X \in \text{Der}(A)$ ) et  $d$  sont des dérivations de  $\Phi(A)$ , homogènes de degrés respectifs  $(-1, |X|)$ ,  $(0, |X|)$  (si  $X$  est homogène) et  $(1, 0)$ .



Pour  $i(X)$ , c'est conséquence de (1.3.2). Pour montrer que, si  $X$  est homogène et si  $\alpha, \alpha' \in D(A)$  sont homogènes, on a

$\theta(X)(\alpha \wedge \alpha') = (\theta(X)\alpha) \wedge \alpha' + \varepsilon(|X|, |\alpha|)\alpha \wedge (\theta(X)\alpha')$ , il suffit de faire un calcul de routine. Enfin, à l'aide de  $[d, i(X)] = \theta(X)$ , on montre que, par récurrence sur  $\deg(c)$ , l'on a  $d(\alpha \wedge \alpha') = d\alpha \wedge \alpha' + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge (d\alpha')$ .

On dit que  $\theta(X)$  est la *dérivation de Lie associée* à  $X \in \text{Der}(A)$ .

Par suite  $\text{Ker}(d)$  est une sous-algèbre graduée de  $\Phi(A)$  et  $\text{Im}(d)$  un idéal gradué de cette sous-algèbre. Pour le produit induit par  $\wedge$ ,  $H(\Phi(A))$  est une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative.

(2.3.10). Soit  $E$  un  $A$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué ; notons  $E^{*\text{gr}}$  (resp.  $E^{\wedge * \text{gr}}$ ) le  $A$ -module à droite (resp. à gauche)  $(\text{Homgr}_A(E, A))$  (resp.  $\text{Homgr}_A(\tilde{E}, \tilde{A})$ ) ;  $\nu$  est un isomorphisme de  $A$ -module de  $E^{*\text{gr}}$  sur  $E^{\wedge * \text{gr}}$  ; on note  $\langle y, y^* \rangle$  (resp.  $\langle y^*, y \rangle$ ) la valeur en  $y \in E$  de  $y^* \in E^{*\text{gr}}$  (resp.  $E^{\wedge * \text{gr}}$ ).

(3.3.10) Soit  $\phi$  l'application  $A$ -linéaire canonique de  $\Omega(A)$  dans  $\Omega(A)^{\wedge * \text{gr}} \otimes \text{Der}(A)^{* \text{gr}} = \text{Der}(A)^{* \text{gr}}$ , définie par  $\langle X, \phi(\alpha) \rangle = \langle X, \alpha \rangle$  ( $\alpha \in \Omega(A), X \in \text{Der}(A)$ ) (i.e.  $\langle X, \phi(x) \rangle = X(x)$  ( $x \in A$ )). Comme  $\Phi(A) = A \oplus \text{Der}(A)^{* \text{gr}} \oplus \dots$  est une  $A$ -algèbre,  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée,  $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative (pour  $\wedge$ ), il existe un unique morphisme de  $A$ -algèbres de  $\Lambda_A(\Omega(A))$  dans  $\Phi(A)$  prolongeant  $\phi$  (cf. (1.1.9)) ; on le note encore  $\phi$ . On vérifie alors que  $\phi$  est un morphisme du complexe de de Rham  $(\Lambda_A(\Omega(A)), d)$  dans le complexe  $(\Phi(A), d)$  ; d'où un morphisme  $H(\phi)$  d'algèbres  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées de  $H_{dR}(A)$  dans  $H(\Phi(A))$ .

REMARQUE. - L'application identique de  $\text{Der}(A) = \Omega(A)^{\wedge * \text{gr}}$  dans  $(\Lambda_A(\Omega(A)))^{\wedge * \text{gr}}$  se prolonge (cf. (1.1.9)) en un morphisme  $\psi$  de  $A$ -algèbres de  $\Lambda_A(\text{Der}(A))$  dans  $(\Lambda_A(\Omega(A)))^{\wedge * \text{gr}}$  (muni du produit  $\wedge$ ) ; on a alors  $\langle \psi(Z), \alpha \rangle = \langle Z, \phi(\alpha) \rangle$  si  $Z \in \Lambda_A(\text{Der}(A))$  et  $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A))$ .

(3.3.11) Soit  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué. On pose  $\Phi(A, E) = \text{Homgr}_A(\Lambda_A(\text{Der}(A)), E)$  ; on dit que un élément du  $A$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $\Phi(A, E)$  est une *forme différentielle* sur  $A$  à valeurs dans  $E$ . En appliquant ce qui est dit en (1.2.3), on définit sur  $\text{Homgr}_A(\Lambda(\text{Der}(A)), E)$  une structure de  $\Phi(A)$ -module gradué, pour le produit  $\wedge$ .

Soit  $\nabla^\circ : E \rightarrow \text{Homgr}_A(\text{Der}(A), E)$  ( $= \phi(A, E)^1$ ) une application  $K$ -linéaire, de degré 0 et telle que

$$(1) \quad \nabla^\circ(xy)X = X(x)y + \varepsilon(|X|, |x|)_X \nabla^\circ(y)(X)$$

pour  $x \in A$ ,  $X \in \text{Der}(A)$  homogènes et  $y \in E$  ; il revient au même de se donner une application  $X \mapsto \nabla_X$  de  $\text{Der}(A)$  dans  $\text{Endgr}_K(E)$ ,  $A$ -linéaire, de degré 0 et telle que

$$\nabla_X(xy) = X(x)y + \varepsilon(|X|, |x|)_X \nabla_X(y).$$

pour  $x \in A$ ,  $y \in E$  et  $X \in \text{Der}(A)$  comme ci-dessus ; on dit que  $\nabla^\circ$  est une connexion sur  $E$  (cette définition est distincte de celle donnée en (2.1.7)).

Soit  $\nabla^\circ$  une connexion sur  $E$ . Pour  $X \in \text{Der}(A)$  et pour  $\omega \in \phi(A, E)^P$ , on désigne par  $\theta(X)\omega$  l'élément de  $\phi(A, E)^P$  défini par

$$(2) \quad (\theta(X)\omega)(W_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \varepsilon(|X|, |X_1| + \dots + |X_p|) (\nabla_X(\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_p))) \\ - \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|X|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \omega([X, X_i] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{i-1} \wedge \dots \wedge X_p) \\ (X_i \in \text{Der}(A) \text{ homogènes}).$$

En particulier, pour  $p = 1$  et  $\omega \in \text{Homgr}_A(\text{Der}(A), E)$ , on a  $(\theta(X)\omega)(Y) = \varepsilon(|X|, |Y|) (\nabla_X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]))$ . Pour  $X \in \text{Der}(A)$ , on définit ainsi un endomorphisme du  $K$ -module  $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué  $\phi(A, E)$ , de degré  $(0, |X|)$  si  $X$  est homogène, et on vérifie, comme en (3.3.2), que

$$(3) \quad [\theta(X), i(X')]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = i([X, X'])$$

si  $X, X' \in \text{Der}(A)$ .

PROPOSITION. - Il existe un unique endomorphisme  $\nabla$  de degré  $(1, 0)$  de  $\phi(A, E)$  tel que

$$(4) \quad \theta(X) = [\nabla, i(X)]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}$$

pour  $X \in \text{Der}(A)$ .

La démonstration est analogue à celle de (3.3.3).

$\nabla$  prolonge  $\nabla^\circ$  et, plus généralement, on a, pour  $\omega \in \phi(A, E)^P$  et  $X_1, \dots, X_{p+1} \in \text{Der}(A)$  homogènes,

$$\begin{aligned}
(5) \quad (\nabla\omega)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|X_i|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \nabla_{X_i} \omega(X_1 \wedge \dots \wedge \check{X}_i \wedge \dots \wedge X_p) \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varepsilon(|X_i|, |X_1| + \dots + |X_{i-1}|) \varepsilon(|X_j|, |X_1| + \dots + |X_{j-1}|) \varepsilon(|X_i|, |X_j|) \\
&\quad \omega([X_i, X_j] \wedge X_i \wedge \dots \wedge \check{X}_i \wedge \dots \wedge \check{X}_j \wedge \dots \wedge X_{p+1}).
\end{aligned}$$

En particulier, on a, si  $\omega \in \text{Homgr}_A(\text{Der}(A), E)$ .

$$(\nabla\omega)(X_1, X_2) = \nabla_{X_1}(\omega(X_2)) - \varepsilon(|X_1|, |X_2|) \nabla_{X_2}(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]);$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où, pour } y \in E, \nabla\nabla^\circ(y)(X_1, X_2) &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2}(y) - \varepsilon(|X_1|, |X_2|) \nabla_{X_2} \nabla_{X_1}(y) - \nabla_{[X_1, X_2]}(y) \\
&= ([\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}]_{\varepsilon} - \nabla_{[X_1, X_2]_{\varepsilon}})(y).
\end{aligned}$$

Il en résulte aisément que l'application  $R = \nabla\nabla^\circ: E \rightarrow \phi(A, E)^2$  est  $A$ -linéaire. On dit que  $R$  est la courbure de la connexion  $\nabla^\circ$ .

(3.3.12) On utilise les notations précédentes. Soient  $\nabla^\circ$  une connexion sur  $E$  et  $\Theta$  et  $\nabla$  définis comme en (3.3.11).

PROPOSITION. - On a (avec les notations de (3.3.8)),

$$\Theta(X)(\alpha \wedge \omega) = (\Theta(X)\alpha) \omega + \varepsilon(|X|, |\alpha|) \alpha \wedge (\Theta(X)\omega)$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \nabla(\alpha \wedge \omega)(Z) &= (d\alpha)(Z) + (-1)^{\text{deg}(\alpha)} \varepsilon(|\alpha|, |Z|) (\alpha \wedge (\nabla\omega))(Z) \quad \text{pour} \\
X \in \text{Der}(A), Z \in \Lambda_A(\text{Der}(A)), \alpha \in \Phi(A) \text{ homogènes et } \omega \in \Phi(A, E).
\end{aligned}$$

La première formule est conséquence d'un calcul de routine. La seconde se prouve alors comme en (3.3.9).

En appliquant deux fois cette dernière formule, on obtient :

COROLLAIRE. -  $\nabla^2$  est une application  $\Phi(A)$ -linéaire de  $\Phi(A, E)$  dans lui-même.

En particulier, on a

$$\nabla^2(\alpha y) = \alpha \wedge R(y)$$

pour  $\alpha \in \Phi(A)$  et  $y \in E$ .

D'autre part, on démontre, comme en (3.3.4), que

$$[\Theta(X), \nabla]_{\varepsilon_Z} = 0 \quad (X \in \text{Der}(A)).$$

Il en résulte, d'après la formule (4) de (3.3.11), que

$$\nabla^2 i(X) = \nabla \theta(X) - \nabla i(X) \nabla = i(X) \nabla^2 .$$

Par récurrence, ceci montre que si  $R = 0$ , c'est-à-dire si  $X \mapsto \nabla_X$  est un morphisme d'algèbres de Lie  $\Delta$ -graduées (relativement à  $\varepsilon$ ), de  $\text{Der}(E)$  dans  $\mathfrak{gl}^\varepsilon(E)$  on a  $\nabla^2 = 0$ ; autrement dit,  $(\Phi(A,E), \nabla)$  est alors un complexe de  $K$ -modules  $\mathbb{Z}x\Delta$ -gradués, d'où le  $K$ -module de cohomologie  $H(\Phi(A,E))$  ; la proposition précédente montre que le produit  $\wedge$  induit une application  $H(\Phi(A)) \times H(\Phi(A,E)) \rightarrow H(\Phi(A,E))$  qui définit sur  $H(\Phi(A,E))$  une structure de  $H(\Phi(A))$ -module  $\mathbb{Z}x\Delta$ -gradué.

(3.3.13). Soit  $E$  un  $A$ -module  $\Delta$ -gradué  $\text{Homgr}_A(\text{Der}(A), E)$  est un  $A$ -module à gauche pour la loi définie par  $(x.\omega)(X) = \varepsilon(|x|, |X|)x\omega(X)$  ; soit  $\phi_E$  l'application  $A$ -linéaire de  $\Omega(A) \otimes_A E$  dans  $\text{Homgr}_A(\text{Der}(A), E)$  définie par

$$\phi_E(\alpha \otimes y)(x) = \langle \alpha, x \rangle y \quad (\alpha \in \Omega(A), x \in \text{Der}(A), y \in E).$$

Soit  $\nabla^\circ$  une connexion sur  $E$ , au sens de (2.1.7) ; en posant  $\nabla'^\circ = \phi \cdot \nabla^\circ$ , on vérifie immédiatement que  $\nabla'^\circ$  est une connexion sur  $E$  au sens de (3.3.11). On prolonge  $\phi_E$  en une application  $A$ -linéaire  $\phi_E : \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E$  dans  $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\text{Der}(A)), E)$  en posant  $\phi_E(\alpha \otimes y)(z) = \phi_A(\alpha)(z)(y)$ . On a alors  $\nabla' \phi_E = \phi_E \nabla$ , où  $\nabla$  et  $\nabla'$  sont, respectivement, les prolongements de  $\nabla^\circ$  et  $\nabla'^\circ$  définis en (2.1.7) et (3.3.11). Etc.