

JEAN BRACONNIER

4 - Algèbres de Poisson graduées

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__1C_A4_0

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

4 - ALGÈBRES DE POISSON GRADUÉES

E désigne un facteur de commutation sur un groupe abélien Δ .

(4.1) CROCHETS DE POISSON GRADUÉS.

Dans ce paragraphe, on désigne par A une K-algèbre, $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée ε -commutative.

(4.1.1). Soit $F \in \text{Der}(A)_0^2$. Pour tout $x \in A$, on a donc $j(x)F \in \text{Der}(A) = \text{Homgr}_A(\Omega(A)^\sim, \tilde{A})$ et $j(x)F$ est de degré $|x|$ si x est homogène. Pour $\alpha \in \Omega(A)$, soit $h_F(\alpha) \in \text{Endgr}_K(A)$ défini par

$$h_F(\alpha)^\sim(x) = \langle j(x)F, \alpha \rangle \quad (x \in A).$$

On a donc

$$h_F(\alpha)(x) = \varepsilon(|\alpha|, |x|) \langle j(x)F, \alpha \rangle$$

si x et α sont homogènes. Et on vérifie que $\alpha \mapsto h_F(\alpha)(x)$ est A-linéaire.

LEMME. - On a $h_F(\alpha) \in \text{Der}(A)$.

En effet, soient $x, x', y \in A$ homogènes. On a

$$\begin{aligned} j(xx')F(y) &= F(xx' \wedge y) \\ &= \varepsilon(|x'|, |y|)F(x \wedge y)x' + xF(x' \wedge y) \\ &= \varepsilon(|x|, |x'|)x'F(x \wedge y) + xF(x' \wedge y). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} h_F(dy)(xx') &= \varepsilon(|y|, |x|+|x'|) \langle \varepsilon(|x|, |x'|)x'j(x)F + xj(x')F, dy \rangle \\ &= \varepsilon(|y|, |x|+|x'|) (\varepsilon(|x|, |x'|)x'F(x \wedge y) + xF(x' \wedge y)) \\ &= h_F(dy)(x) x' + \varepsilon(|x|, |y|)xh_F(dy)(x'); \end{aligned}$$

donc $h_F(dy) \in \text{Der}(A)$. D'où le résultat.

Ainsi F définit un élément $h_F \in \text{Homgr}_A(\Omega(A), \text{Der}(A))_0$.

Et on a

$$(1) \quad \langle h_F(dx), dx' \rangle = -F(x \wedge x')$$

($x, x' \in A$).

PROPOSITION. - $F \mapsto h_F$ est un isomorphisme de K-modules de $\text{Der}(A)_0^2$ sur le sous-module de $\text{Homgr}_A(\Omega(A), \text{Der}(A))_0 = \text{Der}(A, \text{Der}(A))_0$ formé des h tels que $(\alpha, \alpha') \mapsto \langle h(\alpha), \alpha' \rangle$ soit une application K-bilinéaire, ε -alternée (de degré 0) de $\Omega(A) \times \Omega(A)$ dans A.

La formule (1) montre que $(\alpha, \alpha') \mapsto \langle h_F(\alpha), \alpha' \rangle$ est ε -alternée et que $F \mapsto h_F$ est injectif. Soit $h \in \text{Homgr}_A(\Omega(A), \text{Der}(A))$ tel que $(\alpha, \alpha') \mapsto \langle h(\alpha), \alpha' \rangle$ soit ε -alternée. Pour $x, x' \in A$, posons $F(x \wedge x') = - \langle h(dx), dx' \rangle$. Il est clair que $j(\pi)F \in \text{Der}(A)$, donc que $F \in \text{Der}(A)_0^2$. Et on a, si $x, x' \in A$, $\langle h_F(dx), dx' \rangle = - \langle h(dx), dx' \rangle$; donc $h = h_F$.

On dit que h_F est le *hamiltonien* de F .

(4.1.2) Soit $F \in \text{Der}(A)^2$. On dit que A , muni de F est une algèbre de Poisson Δ -graduée si, pour tout $x \in A$, $j(x)F$ est une ε -dérivation de la K -algèbre Δ -graduée obtenue en munissant A du produit $(x, x') \mapsto F(x \wedge x')$, autrement dit si A est une K -algèbre de Lie Δ -graduée (rel. à ε) pour le crochet défini par

$$[x, x'] = F(x \wedge x').$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\varepsilon(|x_1|, |x_3|)F(x_1 \wedge F(x_2 \wedge x_3)) + \varepsilon(|x_2|, |x_1|)F(x_2 \wedge F(x_3 \wedge x_1)) + \varepsilon(|x_3|, |x_2|)F(x_3 \wedge F(x_1 \wedge x_2)) = 0$$

($x_1, x_2, x_3 \in A$ homogènes).

On a alors $j(x)F = \text{ad}(x)$ et $h_F(dx) = -\text{ad}(x)$ pour tout $x \in A$. On notera que, pour tout $x \in A$, on a $\text{ad}(x) \in \text{Der}(A) \cap \mathcal{D}(A)$.

(4.1.3). Soit H une K -algèbre Δ -graduée, associative, unifère et filtrée, de manière croissante et exhaustive, par $(H_p)_p \in \mathbb{Z}$, où H_p est un sous- K -module Δ -gradué de H .

Soit ε un facteur de commutation sur Δ et H^ε l'algèbre de Lie Δ -graduée rel. à ε obtenue en munissant le K -module H de $[,]_\varepsilon$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, soit gr^p l'application K -linéaire, Δ -graduée canonique $H_p \rightarrow H_p/H_{p-1}$, $\text{gr}(H)^p = H_p/H_{p-1}$ et soit $\text{gr}(H) = \bigoplus_p \text{gr}(H)^p$; $\text{gr}(H)$ est une K -algèbre \mathbb{Z} -graduée, associative et unifère. Supposons que cette algèbre soit ε -commutative, c'est-à-dire que l'on ait $[y, y']_\varepsilon \in H^{p+p'-1}$ si $y \in H^p$ et $y' \in H^{p'}$; posons alors $[\text{gr}^p(y), \text{gr}^{p'}(y')] = \text{gr}^{p+p'-1}([y, y']_\varepsilon)$.

PROPOSITION. - $\text{gr}(H)$, muni de $[,]$, est une K -algèbre de Poisson Δ -graduée (rel. à ε).

C'est immédiat, puisque $\text{ad}(y)_\varepsilon \in \text{Der}_\varepsilon(H)$ pour tout $y \in H$.

EXEMPLES. - Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie Δ -graduée (rel. à ε), $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$ est ε -commutative (3.2.3). Soit A une algèbre Δ -graduée et ε -commutative ; $\text{Symb}(A)$ est ε -commutative (2.2.3).

(4.1.4). Soient A et B des algèbres de Poisson Δ -graduées, relativement à ε ; on dit que $u : A \rightarrow B$ est un *morphisme d'algèbres de Poisson* de A dans B si u est un morphisme de K -algèbres Δ -graduées associatives et un morphisme de K -algèbre de Lie graduées.

Soit F (resp. G) l'élément de $\text{Der}(A)_0^2$ (resp. $\text{Der}(B)_0^2$) définissant la structure de A (resp. B). Pour qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de K -algèbres Δ -graduées associatives soit un morphisme d'algèbres de Poisson, il faut et il suffit que u vérifie l'une des conditions suivantes :

- (i) $u(F(x \wedge x')) = G(u(x) \wedge u(x')) \quad (x, x' \in A)$
- (ii) $u(\langle h_F(\alpha), \alpha' \rangle) = \langle h_G(\Omega(u)\alpha) \Omega(u)\alpha' \rangle \quad (\alpha, \alpha' \in \Omega(A)).$

On dit que $J \subset A$ est un *idéal de Poisson* si J est un idéal gradué de l'algèbre associative A et un idéal de l'algèbre de Lie A ; s'il en est ainsi A/J est, canoniquement, une K -algèbre de Poisson.

Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres de Poisson ; $\text{Ker}(u)$ est un idéal de Poisson de A et $\text{Im}(u)$ une sous-algèbre graduée de Poisson de B , isomorphe à $A/\text{Ker}(u)$.

(4.1.5) Soit A une algèbre de Poisson, Δ -graduée (relativement à ε). Soit E un A -module et π une représentation de l'algèbre de Lie Δ -graduée A dans E . On dit que (E, π) est un *A -module de Poisson* si, on a, pour $x, x' \in E$ homogènes et $y \in E$,

- (i) $\pi(xx')y = x\pi(x')y + \varepsilon(|x|, |x'|) x'\pi(x)y,$
- (ii) $\pi(x)(x'y) = [x, x']y + \varepsilon(|x|, |x'|) x'\pi(x)y.$

(i) signifie que $x \mapsto \widetilde{\pi}(x)y$ est une dérivation de A dans E ;

(ii) est alors équivalent à

$$\text{ad}(x')_\varepsilon(\pi(x)) = [x', x] \text{id}_E.$$

A , muni de la représentation ad (de l'algèbre de Lie A), est un A -module de Poisson.

Soient (E, π) et (E', π') des A -modules de Poisson ; un *morphisme* de E dans E' est une application $u : E \rightarrow E'$, A -linéaire, graduée de degré 0 et telle que

$$u \pi(x) = \pi'(x)u \quad (x \in A).$$

(4.2) COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON.

On désigne par A une algèbre de Poisson Δ -graduée, relativement à ε , définie par $F \in \text{Der}(A)_0^2$, et par (E, π) un A -module de Poisson. On considère A , muni de ad , comme un A -module de Poisson.

(4.2.1) Comme A est une algèbre de Lie, on a le complexe $(C(A), \partial)$ et, de même, comme π est une représentation de l'algèbre de Lie A dans E , on a le complexe $(C(A, E), \partial)$. Si $x \in A$, on a $\partial_x = -\text{ad}(x)$; si h_F est le hamiltonien de F , on a $h_F(dx) = \partial_x$ (dans $\text{Der}(A) \subset C(A)^\circ$).

PROPOSITION. - On a $\partial F = 0$.

En effet, si $x_1, x_2, x_3 \in A$ sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} (\partial F)(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) &= \phi(|x_1|, |x_3|)(\varepsilon(|x_1|, |x_3|)F(x_1 \wedge F(x_2 \wedge x_3)) + \varepsilon(|x_2|, |x_3|)F(x_2 \wedge F(x_3 \wedge x_1))) \\ &+ \varepsilon(|x_3|, |x_1|)F(x_3 \wedge F(x_1 \wedge x_2)) - \varepsilon(|x_1|, |x_3|)(\varepsilon(|x_1|, |x_3|)F(F(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3)) \\ &+ \varepsilon(|x_3|, |x_2|)F(F(x_3 \wedge x_1) \wedge x_2) + \varepsilon(|x_3|, |x_1|)F(F(x_2 \wedge x_3) \wedge x_1)) = 0. \end{aligned}$$

(4.2.2) PROPOSITION. - Pour $x, x' \in A$, on a, dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}^{\varepsilon, \mathbb{Z}}(C(A, E))$,

$$\begin{aligned} [j(x), \text{ad}(x')]_{\varepsilon} &= 0, \\ [j(x), \text{ad}(x')]_{\varepsilon} &= \text{ad}([x, x'])_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

On peut supposer x, x' et c homogènes. Soient $x_1, \dots, x_p \in A$ homogènes on a

$$\begin{aligned} (j(x) \text{ad}(x')c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p-1}) &= \varepsilon(|x|, |c| + |x'|)(x'c(x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_p) - (|x'|, |c|)c(x'x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_p)) \\ &= \varepsilon(|x|, |x'|)(\varepsilon(|c|, |x|)x'c(x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_p) - \varepsilon(|c|, |x| + |x'|)c(x \wedge x'x_1 \wedge \dots \wedge x_p)) \\ &= \varepsilon(|x|, |x'|)(\text{ad}(x)_{\varepsilon} j(x)c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p); \end{aligned}$$

d'où la première formule.

Et on a

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{V}(x) \cdot \text{ad}(x') \underset{\epsilon}{c})(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \\
&= [x, x'] (x_1 \wedge \dots \wedge x_p) + \epsilon(|x|, |x'|) x' \pi(x) c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \\
&- \epsilon(|c| + |x'|, |x|) \sum_1 \epsilon(|x_i|, |x'| + \dots + |x_{i-1}|) x' c(x_1 \wedge \dots \wedge [x, x_i] \wedge \dots \wedge x_p) \\
&- \epsilon(|c|, |x'|) \pi(x) c(x' x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \\
&+ \epsilon(|x|, |x'|) \epsilon(|c|, |x| + |x'|) \sum_i \epsilon(|x_i|, |x'| + \dots + |x_{i-1}|) c(x' x_1 \wedge \dots \wedge [x, x_i] \wedge \dots \wedge x_p) \\
&= \epsilon(|x|, |x'|) x' (\mathcal{V}(x) c)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \\
&- \epsilon(|c|, |x'|) (\mathcal{V}(x) c)(x' x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \\
&+ [x, x'] c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) - \epsilon(|c|, |x| + |x'|) c([x, x'] x_1 \wedge \dots \wedge x_p) ;
\end{aligned}$$

d'où la seconde formule.

(4.2.3) $C(A) = \text{Homgr}_K(\Lambda_K(A), A)$ est une K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée pour le produit \wedge .
Et $C(A, E) = \text{Homgr}_K(\Lambda_K(A), E)$ est un $C(A)$ -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué pour le produit \wedge .

PROPOSITION. - Pour $x \in A$, $c \in C(A)$ homogènes, $c' \in C(A, E)$, on a

$$\begin{aligned}
j(x)(c \wedge c') &= (j(x)c) \wedge c' + (-1)^{\text{deg}(c)} \epsilon(|x|, |c|) c \wedge (j(x)c'), \\
\mathcal{V}(x)(c \wedge c') &= (\mathcal{V}(x)c) \wedge c' + \epsilon(|x|, |c|) c \wedge (\mathcal{V}(x)c'), \\
\partial(c \wedge c') &= (\partial c) \wedge c' + (-1)^{\text{deg}(c)} c \wedge (\partial c'), \\
\text{ad}(x) \underset{\epsilon}{c} (c \wedge c') &= (\text{ad}(x) \underset{\epsilon}{c}) \wedge c' + \epsilon(|x|, |c|) c \wedge (\text{ad}(x) \underset{\epsilon}{c} c').
\end{aligned}$$

La première formule est conséquence de (1.9.2) ; la deuxième résulte d'un calcul de routine. Enfin, si $x, x_1 \in A$ et $y \in E$ sont homogènes, on a

$$\begin{aligned}
\partial(xy)(x_1) &= \epsilon(|x| + |y|, |x_1|) \pi(x_1) \chi(xy) \\
&= \epsilon(|x| + |y|, |x_1|) ([x_1, x]y + \epsilon(|x|, |x_1|) x \pi(x_1)y) \\
&= -\epsilon(|y|, |x_1|) \text{ad}(x)(x_1)y + \epsilon(|y|, |x_1|) x \pi(x_1)y \\
&= (\partial x) \wedge y + x(\partial y).
\end{aligned}$$

On raisonne alors par récurrence sur $\text{deg}(c)$ et $\text{deg}(c')$, en utilisant $[\partial, j(x)]_{\epsilon} = \mathcal{V}(x)$, pour démontrer la troisième formule. Et la dernière se vérifie par un calcul de routine, à partir des définitions.

En particulier, si $x \in A$ et $c \in C(A, E)$, on a

$$\partial(xc) = -\text{ad}(x) \wedge c + x \partial c.$$

∂ est donc $Z(A)$ -linéaire.

(4.2.4) Ainsi ∂ est une dérivation de degré $(1,0)$ de $C(A)$; donc λ induit sur $\mathfrak{h}(A)$ un produit, encore noté λ , et $\mathfrak{h}(A)$, muni de ce produit, est une K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative. De même, λ induit une application K -bilinéaire de degré $(0,0)$ de $\mathfrak{h}(A) \times \mathfrak{h}(A,E)$ dans $\mathfrak{h}(A,E)$, notée λ , et, muni de la loi ainsi définie, $\mathfrak{h}(A,E)$ est un $\mathfrak{h}(A)$ -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué.

(4.2.5) On note ϕ_E l'endomorphisme gradué de degré $(2,0)$ de $C(A,E)$ défini par $\phi_E(c) = F \lambda c$. On a $\partial(F \lambda c) = F \lambda \partial c$ pour tout $c \in C(A,E)$. C'est-à-dire $\partial \phi_E = \phi_E \partial$. Donc ϕ_E induit un K -endomorphisme $\mathfrak{H}(\phi_E)$ gradué de degré $(2,0)$ de $\mathfrak{h}(A,E)$.

PROPOSITION. - Pour que $\mathfrak{H}(\phi_A) = 0$, il faut et il suffit que la classe de F dans $\mathfrak{H}^2(A)$ soit 0. On a alors $\mathfrak{H}(\phi_E) = 0$.

C'est suffisant ; soit $c \in \text{Endgr}_K(A)$ tel que $F = \partial c$; pour tout $c' \in \text{Ker}(\partial)$, on a $\partial(c \lambda c') = F \lambda c' = \phi_E(c')$, donc $\mathfrak{H}(\phi_E) = 0$.

C'est nécessaire ; soit $\phi_A^\circ : Z(A) \rightarrow \mathfrak{H}^2(A)$ la restriction de ϕ_A . Comme $\phi_A^\circ(1) = F$ et que $1 \in Z(A)$, la classe de F dans $\mathfrak{H}^2(A)$ est 0.

(4.2.5) $\mathfrak{h}(A)$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée, relativement à $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, et π définit une représentation $\mathfrak{H}(\pi)$ de $\mathfrak{h}(A)$ dans le module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué $\mathfrak{h}(A,E)$ (cf. (3.3.5)). On vérifie que $\mathfrak{h}(A)$, muni de λ et de $[\ ,]$ (défini en (3.3.5)) est une algèbre de Poisson et que le $\mathfrak{h}(A)$ -module $\mathfrak{h}(A,E)$ (pour λ), muni de $\mathfrak{H}(\pi)$ est un $\mathfrak{h}(A)$ -module de Poisson.

(4.3) COHOMOLOGIE DES MULTIDERIVATIONS D'UNE ALGÈBRE DE POISSON.

Les notations sont celles de (4.2).

(4.3.1) On note $D(A,E)$ le sous- K -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué

$\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim}, \tilde{E}) = \oplus \text{Der}(A,E)^P$ de $C(A,E)$; et on pose $D(A,A) = D(A)$.

$D(A)$ est une sous-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée de $C(A)$ et $D(A,E)$ est une $D(A)$ -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué.

PROPOSITION. - Soit $c \in D(A,E)$; on a $j(x) \in D(A,E)$, $\mathcal{N}(x) \in D(A,E)$ pour $x \in A$, et $\partial c \in D(A,E)$.

Il est clair que $j(x)c \in D(A,E)$ pour tout $x \in A$.

LEMME. - Si $x \in A$ et $c \in \text{Der}(A,E)$, on a $\theta(x)c \in \text{Der}(A,E)$.

On peut supposer x homogène. Si $x' \in A$, on a

$$(\mathcal{N}(x)c)(x') = \pi(x)c(x') - \varepsilon(|c|, |x|) c([x, x']).$$

Si $x', x'' \in A$ sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}(x)c)(x'x'') &= \varepsilon(|c|+|x'|, |x''|) ([x, x'']c(x') + \varepsilon(|x|, |x''|) x''\pi(x)c(x')) \\ &\quad + \varepsilon(|c|, |x'|) ([x, x']c(x'') + \varepsilon(|x|, |x'|) x'\pi(x)c(x'')) \\ &\quad - \varepsilon(|x|, |c|) (c([x, x'])x'' + \varepsilon(|c|, |x|+|x'|) [x, x']c(x'')) \\ &\quad - \varepsilon(|x|, |c|+|x'|) (c(x') [x, x''] + \varepsilon(|c|, |x'|) x'c([x, x''])) \\ &= (\pi(x)c(x'))x'' - \varepsilon(|c|, |x|) c([x, x'])x'' + \varepsilon(|c|+|x|, |x'|) x'\pi(x)c(x'') \\ &\quad - \varepsilon(|c|+|x|, |x'|) \varepsilon(|c|, |x|) x'c([x, x'']) \\ &= (\mathcal{N}(x)c(x'))x'' + \varepsilon(|c|+|x|, |x'|) x'(\mathcal{V}(x)c(x'')). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soit $c \in \text{Der}(A,E)^P$; et soient $x_1, \dots, x_{p-1} \in A$ homogènes; si $x' \in A$, posons $c'(x') = c(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p-1} \wedge x')$

et

$$c''(x') = -\varepsilon(|c|, |x|) \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_1| + \dots + |x_{i-1}|) c([x, x_i] \wedge \dots \wedge \check{x}_i \wedge \dots \wedge x_{p-1} \wedge x');$$

on a $c', c'' \in \text{Der}(A,E)$ et

$$\mathcal{N}(x)c(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p-1} \wedge x') = (\mathcal{V}(x)c')(x') + c''(x');$$

d'après le lemme, $\mathcal{N}(x)c' + c'' \in \text{Der}(A,E)$. On a donc $j(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p-1})\mathcal{V}(x)c \in \text{Der}(A,A)$ et $\mathcal{V}(x)c \in \text{Der}(A,E)^P$.

Enfin si $x, x' \in A$ et $y \in E$ sont homogènes, on a $\partial y(x) = \pi(x)y$; donc $\partial y \in \text{Der}(A,E)$. Soit $c \in \text{Der}(A,E)^P$; comme $j(x)(\partial c) = \mathcal{V}(x)c - \partial(j(x)c)$, on voit par récurrence sur p , que $\partial(j(x)c) \in \text{Der}(A,E)^P$ et ce qui précède montre que $j(x)(\partial c) \in \text{Der}(A,E)^P$; donc $\partial c \in \text{Der}(A,E)^{P+1}$.

(4.3.2) Ainsi $(D(A), \partial)$ et $(D(A,E), \partial)$ sont des complexes de K -modules Δ -gradués dont on note, respectivement, $\mathcal{H}(A)$ et $\mathcal{H}(A,E)$ les K -modules $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradués de cohomologie. Et, comme $\partial(c \wedge c') = \partial c \wedge c' + (-1)^{\text{deg}(c)} c \wedge \partial c'$, le produit \wedge induit sur $\mathcal{H}(A)$ un produit et une application $\mathcal{H}(A) \times \mathcal{H}(A,E) \rightarrow \mathcal{H}(A,E)$, encore noté \wedge . $\mathcal{H}(A)$ est alors une K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative et $\mathcal{H}(A,E)$ un $\mathcal{H}(A)$ -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué.

(4.3.3) On a $\mathcal{H}^0(A,E) = E^A$ (module des éléments invariants par π de E).

(E) est l'ensemble des dérivations $x \mapsto \pi(\tilde{x})y$ et $\partial(A) = \text{ad}(A)$.

En particulier, $\mathcal{H}^1(A) = (\text{Der}(A) \cap \mathcal{V}\text{er}(A))/\text{ad}(A)$.

Et on a la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow Z(A) \rightarrow Z(A) \rightarrow 0 \rightarrow (\text{Der}(A) \cap \mathcal{V}\text{er}(A))/\text{ad}(A) \rightarrow \mathcal{D}\text{er}(A)/\text{ad}(A) \\ \rightarrow H^1(C(A)/D(A)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^2(A) \rightarrow \mathcal{H}^2(A) \rightarrow \dots$$

$$(\text{resp. } 0 \rightarrow E^A \rightarrow E^A \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}^1(A,E) \rightarrow \mathcal{H}_1^1(A,E) \rightarrow H^1(C(A,E)/D(A,E)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^2(A,E) \rightarrow \dots),$$

où δ est l'application K -linéaire de liaison relative à la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow D(A) \rightarrow C(A) \rightarrow C(A)/D(A) \rightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \rightarrow D(A,E) \rightarrow C(A,E) \rightarrow C(A,E)/D(A,E) \rightarrow 0).$$

De plus, $c \mapsto F \wedge c$ est un endomorphisme ϕ_E de degré $(2, 0)$ du K -module $D(A,E)$, tel que $\partial\phi_E = \phi_E\partial$. ϕ_E induit donc un endomorphisme $\mathcal{H}(\phi_E)$ de degré $(2,0)$ de $\mathcal{H}(A,E)$. Pour que $\mathcal{H}(\phi_A) = 0$, il faut et il suffit que la classe de F dans $\mathcal{H}^2(A)$ soit 0.

(4.3.4). Soit $\alpha \in \phi(A)^P$; et soit $h(\alpha)$ l'application K -linéaire graduée de $\Lambda_K^P(A)$ dans A définie par

$$h(\alpha)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \langle \text{ad}(x_1) \wedge \dots \wedge \text{ad}(x_p), \alpha \rangle \quad (x_i \in A).$$

Pour $x, x' \in A$ homogènes, on a

$$\text{ad}(xx') = x(\text{ad}(x')x'') + \varepsilon(|x|, |x'|)x'(\text{ad}(x)x'')$$

si $x'' \in A$. Il en résulte que $h(\alpha) \in \text{Der}(A)^P$. D'où une application A -linéaire

$$h \text{ de degré } (0,0), \text{ de } \phi(A) \text{ dans } D(A).$$

Si $\phi : \Omega(A) \rightarrow \phi(A)^1$ est l'application canonique $\alpha \mapsto (X \rightarrow \langle X\alpha \rangle)$, on a évidemment $h|_{\phi(A)^1} \cdot \phi = h_F$.

PROPOSITION. - On a, pour tout $\alpha \in \phi(A)$, on a $h(d\alpha) = \partial(h\alpha)$.

C'est un calcul de routine.

Ainsi h est un morphisme du complexe $(\phi(A), d)$ dans le complexe $(D(A), \partial)$; d'où une application K -linéaire \bar{h} graduée de degré $(0,0)$ de $H(\phi(A))$ dans $\mathcal{H}(A)$.

On vérifie d'autre part que h est un morphisme de K -algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées de $\phi(A)$ dans $D(A)$; donc \bar{h} est un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées de $H(\phi(A))$ dans $\mathcal{H}(A)$.

(4.4) COHOMOLOGIES DIFFERENTIELLES D'UNE ALGÈBRE DE POISSON.

Les notations sont celles de (4.2) et (4.3).

(4.4.1) Soit n un entier > 1 . On note $D_n(A, E)$ le module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué $\bigoplus_p \text{Dif}_n(A, E)^p$ et on pose $D_n(A, D) = D_n(A)$. $D_n(A)$ est une sous-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué de $C(A)$ (pour le produit λ) et $D_n(A, E)$ est un $D_n(A)$ -module (pour λ) $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué.

PROPOSITION. - Soit $c \in D_n(A, E)$. On a $j(x)c \in D_n(A, E)$, $\mathcal{V}(x)c \in D_n(A, E)$ ($x \in A$) et $\partial c \in D_n(A, E)$.

Soient $x, x_0, \dots, x_n \in A$, homogènes. D'après (4.2.2) on a $\text{ad}(x_0)_\varepsilon \dots \text{ad}(x_n)_\varepsilon j(x) = \varepsilon(|x|, |x_0| + \dots + |x_n|) j(x) \text{ad}(x_0)_\varepsilon \dots \text{ad}(x_n)_\varepsilon$ et $\text{ad}(x_0)_\varepsilon \dots \text{ad}(x_n)_\varepsilon \mathcal{V}(x) = \varepsilon(|x|, |x_0| + \dots + |x_n|) \mathcal{V}(x) \text{ad}(x_0)_\varepsilon \dots \text{ad}(x_n)_\varepsilon$
 $+ \sum_{j=1}^n \text{ad}(y_0)_\varepsilon \dots \text{ad}(y_n)_\varepsilon$, où $y_0, \dots, y_n \in A$. Ceci montre que $j(x)c \in D_n(A, E)$ et $\mathcal{V}(x)c \in D_n(A, E)$. Si $y \in E$, on a $\partial y \in \text{Der}(A, E) \subset \text{Dif}_n(A, E)$; la formule $j(x)\partial = \mathcal{V}(x) - \partial j(x)$ montre, par récurrence sur p , que, si $c \in \text{Dif}_n(A, E)^p$, on a $\partial c \in \text{Dif}_n(A, E)^{p+1}$.

(4.4.2) Ainsi, $(D_n(A), \partial)$ et $(D_n(A, E), \partial)$ sont des complexes de K -modules Δ -gradus dont on note, respectivement, $\mathcal{H}_n(A)$ et $\mathcal{H}_n(A, E)$ les K -modules $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradus de cohomologie. Le produit λ induit sur $\mathcal{H}_n(A)$ un produit et une application $\mathcal{H}_n(A) \times \mathcal{H}_n(A, E) \rightarrow \mathcal{H}_n(A, E)$, encore notés λ . $\mathcal{H}_n(A)$ est une algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative et $\mathcal{H}_n(A, E)$ un $\mathcal{H}_n(A)$ -module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué. L'injection canonique $D_n(A, E) \rightarrow D_{n+1}(A, E)$ induit une application K -linéaire de degré $(0, 0)$ de $\mathcal{H}_n(A, E)$ dans $\mathcal{H}_{n+1}(A, E)$. Et, de même, l'injection $D_n(A) \rightarrow D_{n+1}(A)$ induit un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradus de $\mathcal{H}_n(A)$ dans $\mathcal{H}_{n+1}(A)$.

(4.4.3) Notons encore ∂ la restriction de ∂ à $D(A, E)$ et, pour préciser, ∂_1 la restriction de ∂ à $D_1(A, E)$. Notons ϕ l'endomorphisme $c \mapsto F \lambda c$ degré $(0, 2)$ du K -module $D(A, E)$ et ϕ_1 l'endomorphisme $c \mapsto F \lambda c$ du K -module $D_1(A, E)$.

On a la suite scindée, définie en (2.3.3),

$$0 \rightarrow D(A, E) \xleftarrow[\rho]{1} D_1(A, E) \xleftarrow[\tau]{\pi} D(A, E) \rightarrow 0.$$

Et il est clair que

$$\begin{cases} \phi_1 \cdot \iota = \iota \cdot \phi & , \quad \phi_1 \tau = \tau \cdot \phi ; \\ \phi \cdot \rho = \rho \cdot \phi_1 & , \quad \phi \cdot \pi = \pi \cdot \phi_1 . \end{cases}$$

Comme $\partial_1 \iota = \iota \partial$, ι induit une application K -linéaire graduée $\bar{\iota}$ de degré $(0,0)$ de $\mathcal{H}(A,E)$ dans $\mathcal{H}_1(A,E)$.

D'autre part, si $c \in D_1(A,E)$, on a $\partial_1(F \wedge c) = \partial F \wedge c + F \wedge \partial_1 c = F \wedge \partial_1 c$; donc $\partial_1 \cdot \phi_1 = \phi_1 \cdot \partial_1$. Donc ϕ_1 induit un endomorphisme $\bar{\phi}_1$ de degré $(2,0)$ de $\mathcal{H}_1(A,E)$.

PROPOSITION. - On a $\iota \phi = \partial_1 \tau + \tau \partial$.

En effet, dans $D_1(A)$, on a $\partial_1(\text{id}_A) = F$ et, si $c \in D(A,E)$, on a $\tau(c) = \text{id}_A \wedge c$; d'où $\partial_1 \tau(c) = F \wedge c - \text{id}_A \wedge \partial c = \iota \phi(c) - \tau \partial(c)$.

COROLLAIRE. - On a : $\tau \partial_1 = - \partial \pi$,

$$\phi \partial_1 = \partial \phi + \phi \pi,$$

$$\partial_1 = -\tau \partial \pi + \iota(\partial \rho + \phi \pi).$$

Soit $c \in D_1(A,E)$; on a $c = \tau \pi(c) + \iota \rho(c)$; donc $\partial_1 c = \partial_1 \tau \pi(c) + \partial_1 \iota \rho(c) = \iota \phi \pi(c) - \tau \partial \pi(c) + \iota \partial \rho(c)$; d'où la troisième formule. La seconde formule est alors immédiate. Mais alors on a $\pi \partial_1(c) = -\pi \tau \partial \pi(c) = - \partial \pi(c)$; d'où la première formule .

Par suite, π induit une application K -linéaire $\bar{\pi}$ de degré $(0,0)$ de $\mathcal{H}_1(A,E)$ dans $\mathcal{H}(A,E)$.

(4.4.4) PROPOSITION. - On a le diagramme exact

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(A,E) & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{H}_1(A,E) \\ & \searrow \bar{\phi} & \swarrow \bar{\pi} \\ & & \mathcal{H}(A,E) \end{array}$$

En effet de la suite exacte

$$0 \longrightarrow D(A,E) \xrightarrow{l} D_1(A,E) \xrightarrow{\pi} D(A,E) \longrightarrow 0 ,$$

on déduit la suite exacte de cohomologie

$$\longrightarrow \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\bar{l}} \mathcal{H}_1(A,E) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}(A,E) \longrightarrow \dots$$

où δ est l'application linéaire de connexion ; la définition de δ montre que, si γ est la classe de cohomologie de $C \in D(A,E)$, $\delta(\gamma)$ est la classe de cohomologie de $\rho\delta_1\tau(c) = \rho i\phi(c) - \tau\partial c = \phi(c)$; autrement dit, on a $\delta = \bar{\phi}$.

COROLLAIRE 1. - On a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(A,E) & \xrightarrow{\bar{l}} & \mathcal{H}_1^1(A,E) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & E^A \\ & & & & & & \downarrow \bar{\phi} \\ & & \mathcal{H}^1(A,E) & \xleftarrow{\bar{\pi}} & \mathcal{H}_1^2(A,E) & \xleftarrow{\bar{l}} & \mathcal{H}^2(A,E) \\ & & \downarrow \bar{\phi} & & & & \\ & & \mathcal{H}^3(A,E) & \longrightarrow & \mathcal{H}^3(A,E) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(A,E) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathcal{H}^4(A,E) \\ & & & & \dots & \longleftarrow & \end{array}$$

COROLLAIRE 2. - Si la classe de cohomologie de F est nulle, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\bar{l}} \mathcal{H}_1(A,E) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{H}(A,E) \longrightarrow 0.$$