PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GILBERT ARSAC

Le groupe de Poincaré et ses représentations

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 3C
« Le groupe de Poincaré et ses représentations », , p. 1-171
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___3C_A1_0>

CHAPITRE I - GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DE LORENTZ ET DE POINCARÉ.

1 - Espace de Minkowski. Groupes de Lorentz.

1.1) L'espace de Minkowski est, par définition, l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la forme bilinéaire B définie par :

$$B(x,y) = x^\circ y^\circ - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$$

où $x = (x^\circ,x^1,x^2,x^3)$, et $y = (y^\circ,y^1,y^2,y^3)$, appartiennent à $\mathbb{R}^4$.

La forme B est évidemment symétrique $(B(x,y) = B(y,x))$ et non dégénérée (c.à.d. que si x est tel que $B(x,y) = o$ pour tout $y \in \mathbb{R}^4$, alors $x = o$). La forme quadratique associée :

$$x \mapsto B(x,x) = (x^\circ)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

n'est évidemment pas définie positive et ne définit donc pas une norme. En revanche, on appellera "produit scalaire" de Minkowski, (et souvent produit scalaire) la forma B, tandis que la forme quadratique associée définira le carré scalaire" (de Minkowski). On rencontre souvent dans la littérature les notations :

$x.y$ ou xy au lieu de $B(x,y)$.
donc $x.x$ ou x^2 au lieu de $B(x,x)$.

Si $B(x|x) < o$, on dit que x est du genre espace.

Si $B(x|x) > o$, on dit que x est du genre temps.

Si $B(x|x) = o$, on dit que x est du genre lumière.

L'ensemble de ces derniers vecteurs constitue le "cône de lumière". L'espace de Minkowski est aussi appelé espace-temps, et l'écriture de B signifie que l'on a choisi un système d'unités ou la vitesse de la lumière est égale à un.

1.2) Coordonnées covariantes et contravariantes.

Considérons, de manière générale, un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et une forme bilinéaire B non dégénérée sur E. Pour tout $y \in E$, soit $\ell(y)$ la forme linéaire sur E :

$$x \mapsto B(x,y).$$

Il est immédiat que ℓ est une application linéaire de E dans son dual E^* ; comme B est non dégénérée, $\mathrm{Ker}\ell = \{o\}$, donc ℓ est un isomorphisme, puisque $\dim E^* = \dim E$. Par définition de ℓ, vu la symétrie de B, on a donc :

$$B(x,y) = \langle x,\ell(y)\rangle = \langle y, \ell(x)\rangle.$$

Soit $(e_1,\dots e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle composantes contravariantes de x dans cette base et on note $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ses composantes ordinaires ; on appelle composantes covariantes et on note $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes ordinaires de $\ell(x)$ sur la base duale $e^i = e_i^*$. On a donc, par définition :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad \text{et} \quad \ell(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^*,$$

d'où $$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i \quad \text{et} \quad B(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x^i x_i.$$

Dans le cas qui nous intéresse, soit $(e_\circ, e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on trouve :

$$\ell(e_\circ) = e_\circ^*, \quad \ell(e_1) = -e_1^*, \quad \ell(e_2) = -e_2^*, \quad \ell(e_3) = -e_3^*$$

donc, si $x = x^\circ e_\circ + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$, on obtient par linéarité de ℓ :

$$\ell(x) = x^{\circ}e_{\circ}^{*} - x^{1}e_{1}^{*} - x^{2}e_{2}^{*} - x^{3}e_{3}^{*}$$

ce qui donne : $\boxed{x_{\circ} = x^{\circ} \quad x_{1} = -x^{1} \quad x_{2} = -x^{2} \quad x_{3} = -x^{3}}$

ou $\boxed{x_{i} = \varepsilon_{i}x^{i} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\circ} = 1 \qquad \varepsilon_{1} = \varepsilon_{2} = \varepsilon_{3} = -1}$

Revenons au cas général : l'isomorphisme ℓ permet, par transport de structure, de définir une forme bilinéaire non dégénérée, encore notée B, sur E^{*}, par la formule :

$$\begin{aligned} B(\xi,\eta) &= B(\ell^{-1}(\xi),\ell^{-1}(\eta)) \\ &= \langle\ell^{-1}(\xi),\eta\rangle = \langle\ell^{-1}(\eta),\xi\rangle. \qquad (\xi \in E^{*},\ \eta \in E^{*}). \end{aligned}$$

Ainsi, le couple (E^{*},B) se comporte comme (E,B) en remplaçant E par E^{*} et ℓ par ℓ^{-1}.

1.3) Groupes de Lorentz.

Soit (E,B) comme en (1.2) ; soit $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E. Soit $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, c'est évidemment un groupe pour la composition des applications.

On note $O(E,B)$, et on appelle groupe orthogonal de la forme B, l'ensemble des $u \in GL(E)$ vérifiant, pour tout $(x,y) \in E \times E$:

$$B(ux,uy) = B(x,y).$$

Comme $B(x,y) = \frac{1}{2}\ B(x+y,\ x+y) - B(x,x) - B(y,y)$, il suffit que ceci soit vérifié quand $x = y$.

On note $SO(E,B)$ (groupe spécial orthogonal de la forme B) l'ensemble des $u \in SO(E,B)$ tels que, de plus, $\det u = 1$. La vérification du fait que $SO(E,B)$ et $O(E,B)$ sont des sous-groupes de $GL(E)$ est évidente.

Lorsque $E = \mathbb{R}^{n}$ et lorsque B est définie par :

$$B(x,y) = x^1y^1 + \dots + x^py^p - x^{p+1}\ y^{p+1} \dots x^ny^n$$

ou par $\quad B(x,y) = -x^1y^1 \dots - x^py^p + x^{p+1}y^{p+1} + \dots + x^ny^n,$

soit $q = n-p$, on pose $O(p,q) = O(\mathbb{R}^n,B)$ et $SO(p,q) = SO(\mathbb{R}^n,B)$. De manière évidente $O(p,q)$ est isomorphe à $O(q,p)$ et $SO(p,q)$ à $SO(q,p)$.

Lorsque B est définie par $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^iy^i$ on pose $O(n) = O(\mathbb{R}^n,B)$ et $SO(n) = SO(\mathbb{R}^n,B)$.

Tous ces groupes sont en général identifiés aux groupes de matrices correspondants, via (1.5) ci-après, au moyen de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si A_{pq} désigne la matrice diagonale dont les p premiers éléments de la diagonale sont égaux à -1, les autres étant égaux à 1, le groupe $O(p,q)$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre $n = p+q$ telles que ${}^tX\,A_{pq}X = A_{pq}$, alors que $O(n)$ est l'ensemble des X telles que ${}^tXX = I$.

Remarquons que, en notant ${}^tu$ la transposée de u, on a :

$$B(ux,y) = \langle ux, \ell(y)\rangle = \langle x, {}^tu\ell(y)\rangle = B(x,\ell^{-1}\,{}^tu\ell(y)).$$

En définissant, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, l'endomorphisme u' par :

$u' = \ell^{-1}\,{}^tu\ell$, on obtient :

$$B(ux,y) = B(x,u'y)$$

d'où $\quad B(ux,uy) = B(x,u'uy)$.

Ainsi, si $u \in GL(E)$, on voit que $u \in O(E,B)$ ssi $u^{-1} = u'$, c.à.d. ssi :

(1.4) $\quad {}^tu\,\ell u = \ell$. Dans ce cas, ${}^tu \in O(E^*,B)$.

Soit A la matrice de B dans une base $(e_1,\dots,e_n)$, de terme générique $a_{ij} = B(e_i,e_j)$, l'égalité :

$$B(e_i,e_j) = \langle e_i, \ell(e_j)\rangle.$$

montre que A est aussi la matrice de ℓ dans les bases $(e_1 \ldots, e_n)$ $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Ainsi, si $M(u)$ désigne la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ la condition (1.4) s'écrit :

(1.5) $\quad {}^tM(u)\ A\ M(u) = A.$

De (1.4), on déduit : $(\det u)^2 \det \ell = \det \ell$ et, comme $\det \ell = \det A \neq 0$, nécessairement $\det u = \pm 1$ pour tout $u \in O(E,B)$.

Dans le cas où (E,B) est l'espace de Minkowski, le groupe $O(\mathbb{R}^4, B)$ est donc noté $O(1,3)$, et on pose de même $SO(1,3) = SO(\mathbb{R}^4, B)$. Ces deux groupes sont appelés groupes de Lorentz (nom parfois réservé toutefois à $O(1,3)$). Les $u \in O(1,3)$ sont appelés transformations de Lorentz. Le groupe $O(1,3)$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 4 telles que

$$ {}^tX\ A\ X = A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . $$

En écrivant $X = (x^i{}_j)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant 3 \\ 0 \leqslant j \leqslant 3}}$, on en déduit en particulier que :

$$ 1 = (x^\circ{}_\circ)^2 - (x^1{}_\circ)^2 - (x^2{}_\circ)^2 - (x^3{}_\circ)^2, \quad \text{car} \quad B(X(e_\circ), X(e_\circ)) = 1 $$

d'où $|x^\circ{}_\circ| \geqslant 1$, ce qui est utile pour distinguer les composantes connexes des groupes de Lorentz.

2 - Matrices de Pauli ; lien avec $SL(2,\mathbb{C})$.

2.1) Fixons quelques notations supplémentaires : par définition,

$GL(n, \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $GL(n, \mathbb{C}) = GL(\mathbb{C}^n)$ $\qquad$ ($\mathbb{C}^n$ est ici considéré comme espace vectoriel complexe).

$SL(n, \mathbb{R})$ (resp. $SL(n, \mathbb{C})$) est le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$) formé des éléments dont le déterminant est égal à 1. Tous ces groupes sont considérés en général comme des groupes de matrices.

2.2) Matrices de Pauli. Action de $SL(2,\mathbb{C})$.

On appelle "matrices de Pauli" les 4 matrices complexes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ définies par :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices constituent une base de l'espace vectoriel réel H des matrices complexes 2×2 hermitiennes. Soit h l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbb{R}^4 \to H$ défini par :

$$h\left(\sum_0^3 x^j e_j\right) = \sum_0^3 x_j \sigma_j = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

On a : $\det(h(x)) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = B(x,x)$ et comme

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\left[B(x+y,\ x+y) - B(x,x) - B(y,y)\right]$$

on a : $$B(x,y) = \frac{1}{2}\left[\det\left[h(x) + h(y)\right] - \det h(x) - \det h(y)\right] .$$

Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ et $X^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ sa conjuguée, on a $\det X^* = \overline{\det X} = 1$ donc $X^* \in SL(2, \mathbb{C})$. Supposons $Y \in H$ c.à.d. $Y^* = Y$, alors $Z = X\,Y\,X^* \in H$. En effet :

$$Z^* = X\,Y^*\,X^* = X\,Y\,X^* = Z$$

de plus : $$\det Z = (\det X)\,(\det Y)\,(\det X^*) = \det Y.$$

On en déduit que l'application linéaire $Y \to X Y X^*$ de H dans H définit, par transport de structure au moyen de h, une transformation de Lorentz $u \in O(1,3)$. Explicitement :

$$u(x) = h^{-1} [X\, h(x)\, X^*] \quad \text{c.à.d.} \quad h[u(x)] = X\, h(x)\, X^*.$$

On définit ainsi une application de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $O(1,3)$, celle qui associe à tout $X \in SL(2,\mathbb{C})$ la transformation de Lorentz u, que nous noterons plus précisément u_X, définie ci-dessus. On vérifie immédiatement que $X \mapsto u_X$ est un homomorphisme de groupes :

$$\begin{cases} u_I = I & \text{(où } I \text{ désigne les éléments neutres de} \\ & \quad SL(2,\mathbb{C}) \text{ et } O(1,3)\text{),} \\ u_{XX'} = u_X \circ u_{X'}. \end{cases}$$

En pratique, on emploiera la notation suivante :

si $X \in SL(2,\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}^4$, on posera :

$$X.x = u_X(x) = h^{-1} [X h(x) X^*],$$

ainsi : $\quad I.x = x \quad$ et $\quad (XX').x = X.(X',x).$

L'étude des propriétés topologiques de $SL(2,\mathbb{C})$ et $O(1,3)$ nous permettra par la suite de déterminer l'image de l'application $X \mapsto u_X$. Contentons-nous, pour le moment, du calcul du noyau :

l'équation $u_X = \mathrm{id}$ équivaut à $X Y X^* = Y$ pour toute $Y \in H$.

En faisant $Y = I$, on trouve en particulier : $X X^* = I$ donc $X^* = X^{-1}$, l'équation équivaut donc à

$$X^* = X^{-1} \quad \text{et} \quad X Y X^{-1} = Y \quad \text{c.à.d.} \quad XY = YX$$

pour toute $Y \in H$. Comme H engendre l'espace vectoriel complexe des matrices 2×2 ceci implique $X = \lambda I$. Comme $\det X = 1$, il reste $X = \pm I$: le noyau est réduit à deux éléments.

2.3) <u>Etude des orbites et des stabilisateurs.</u>

2.4) Définition. - *On dit qu'un groupe* G *opère à gauche sur un ensemble* E *s'il existe une application* $G \times E \to E$, $(s,x) \mapsto sx$ *telle que, en désignant par* e *l'élément neutre de* G, *on ait :*

$$s(tx) = (st)x \quad et \quad ex = x \quad (pour\ tous\ (s,t) \in G \times G,\ x \in E).$$

On dit que G *opère à droite si l'on a :*

$$s(tx) = (ts)x \quad et \quad ex = x.$$

Dans ce deuxième cas, on écrit plutôt $(s,x) \mapsto xs$, de façon à obtenir la formule :

$$(xt)s = x(ts).$$

2.5) Limitons-nous maintenant au cas où G opère à gauche sur E, ce qui est le cas, on vient de le voir, de $SL(2,\mathbb{C})$ agissant sur $\mathbb{R}^4$ par $(X,x) \mapsto X.x$. Pour tout $x \in E$, l'ensemble, noté G_x, des $s.x$ (pour $s \in G$) est appelé <u>orbite</u> de x. La relation d'équivalence R définie dans E par :

$$x \mathrel{R} y \quad \text{ssi il existe } s \in G \text{ tel que } y = sx$$

admet pour classes les orbites. L'espace-quotient, appelé <u>espace des orbites</u> de G, est noté E/G.

2.6) <u>Exemples fondamentaux</u> : Soit H un sous-groupe d'un groupe G.

a) Le groupe H opère à droite dans G par :

$$(h,x) \mapsto xh : H \times G \to G.$$

L'espace des orbites, noté G/H est un "espace homogène" de G. Les classes xH sont les "classes à gauche" de G suivant H.

b) (mêmes hypothèses). La relation d'équivalence R associée aux orbites xH est évidemment compatible à gauche avec la loi de groupe de G :

$$x \, R \, y \quad \text{implique} \quad sx \, R \, sy \qquad (x \in G,\ y \in G,\ s \in G)$$

car $x \in yH$ implique $sx \in sy\,H$.

On peut donc faire agir G à gauche sur l'espace homogène G/H par :

$$(s,xH) \to sxH \ : \ G \times G/H \to G/H.$$

Cette action est "transitive" c.à.d. que, pour tout $\xi \in G/H$, on a $G\xi = G/H$: il y a une seule orbite suivant G.

2.7) Revenons au cas général : G agit à gauche sur E.
Pour tout $x \in E$, on appelle, par définition, <u>stabilisateur</u> de x dans G, l'ensemble H_x des $s \in G$ tels que $sx = x$.

<u>Proposition</u>. - *a) Pour tout* $x \in E$, *le stabilisateur* H_x *de* x *est un sous-groupe de* G.

b) L'application $u : G/H_x \to Gx$ *définie par :* $u(yH_x) = yx$ *est une bijection de l'espace homogène* G/H_x *sur l'orbite* Gx, *qui commute à l'action de* G :

$$u(s.\xi) = su(\xi).$$

c) Si x *et* y *appartiennent à la même orbite, leurs stabilisateurs sont deux sous-groupes conjugués de* G.

Démonstration simple, laissée au lecteur.

2.8) Cas de l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur l'espace de Minkowski.

Afin de calculer les orbites dans ce cas particulier, faisons tout d'abord un certain nombre de remarques. Nous noterons systématiquement Ω_a l'orbite de $a \in \mathbb{R}^4$ sous l'action de $SL(2,\mathbb{C})$.

2.9) Tout d'abord, puisque $SL(2,\mathbb{C})$ agit par isométries pour B, l'orbite Ω_a est contenue dans l'ensemble Ω' des points $x \in \mathbb{R}^4$ tels que $B(x,x) = B(a,a)$. Cette inclusion peut être stricte car, si $x = o$, on trouve $\Omega_x = \{o\}$, alors que Ω' est le cône de lumière. Nous étudierons cependant la famille des surfaces sur lesquelles B est constante.

2.10) L'application $x \to X.x$, que nous avons noté u_X, étant linéaire, on a : $\Omega_{\lambda x} = \lambda\Omega_x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit aussi que le stabilisateur H_x de x est le même que celui, $H_{\lambda x}$, de λx. Du fait que B est bilinéaire, on déduit d'autre part que, si Ω_x est contenue dans l'hypersurface d'équation $B(y,y) = k = B(x,x)$, alors $\Omega_{\lambda x}$ sera contenue dans celle d'équation $B(y,y) = \lambda^2 k$; remarquons que k et $\lambda^2 k$ sont de même signe.

2.11) L'hypersurface Ω'_k d'équation $B(x,x) = k$, explicitement :

$$(x^\circ)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = k$$

est "de révolution autour de $\mathbb{R}e_\circ$". Précisons ce que signifie cette affirmation : on dira qu'une partie de $\mathbb{R}^4$ est de révolution autour de $\mathbb{R}e_\circ$ si elle est invariante par toute "rotation d'axe $\mathbb{R}e_\circ$". Pour définir rigoureusement ce dernier terme, écrivons :

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}e_o \oplus \mathbb{R}^3, \ x = x^o e_o + \sum_{i=1}^{3} x^i e_i = (x^o, \vec{x})$$

en identifiant $\mathbb{R}^3$ à l'ensemble des $(0,\vec{x}) = (0,x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^4$. Une "rotation autour de $\mathbb{R}e_o$" est alors une transformation du type

$$x = x^o e_o + x' \mapsto x^o e_o + u(x') \text{ c-à-d } (x^o,\vec{x}) \mapsto (x^o, u(\vec{x})) \text{ où } u \in SO(3).$$

Il est évident, puisque $B(x,x) = (x^o)^2 - \vec{x}^2$, que toute rotation autour de $\mathbb{R}e_o$ laisse B invariante, autrement dit, que l'ensemble de ces transformations constitue un sous-groupe K de $SO(1,3)$, évidemment isomorphe à $SO(3)$.

Il résulte de ce qui précède que les hypersurfaces Ω'_k sont de révolution autour de $\mathbb{R}e_o$. Comme les orbites Ω_x sont invariantes par toutes les transformations u_X, où $X \in SL(2,\mathbb{C})$, elles seront de révolution autour de $\mathbb{R}e_o$ si tout $w \in K$ est de la forme u_X pour un $X \in SL(2,\mathbb{C})$. Comme K est le stabilisateur de e_o dans $SO(1,3)$, si $X \in SL(2,\mathbb{C})$ est tel que $u_X \in K$, on a : $X.e_o = u_X(e_o) = e_o$, donc X appartient au stabilisateur de e_o dans $SL(2,\mathbb{C})$. Comme $h(e_o) = \sigma_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce stabilisateur est celui de σ_o dans l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur les matrices hermitiennes, c.à.d. l'ensemble des matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ complexes telles que :

$$ad-bc = 1 \quad \text{et} \quad XX^* = I, \quad \text{c.à.d.} \quad X^* = X^{-1}.$$

Compte tenu de $ad-bc = 1$, on trouve $X^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ce stabilisateur est donc le sous-groupe, noté $SU(2)$, de $SL(2,\mathbb{C})$, constitué des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ où a et b complexes vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Pour montrer que les orbites Ω'_x sont de révolution, il nous suffit donc de vérifier que tout rotation autour de $\mathbb{R}e_o$ est de la forme u_X, avec $X \in SU(2)$. Or $SO(3)$ est engendré par les rotations autour des 3 axes de $\mathbb{R}^3$, et les matrices de K correspondantes s'obtiennent comme images des matrices de $SU(2)$ de l'un des 3 types suivants :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -i\sin\theta/2 \\ -i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & o \\ o & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} .$$

Ainsi, les orbites Ω_x sont bien de révolution. Ceci nous permet d'aborder maintenant le résultat définitif :

2.12) PROPOSITION. - *Les orbites dans l'action de* $SL(2,\mathbb{C})$ *sur* $\mathbb{R}^4$ *se répartissent en 6 types :*

1) O_m^+ *d'équations :* $B(x,x) \equiv (x^\circ)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = m^2$ *et* $x^\circ > o$ $(m \in \mathbb{R}^{+*})$.

2) O_m^- *d'équations :* $B(x,x) = m^2$ *et* $x^\circ < o$ $(m \in \mathbb{R}^{+*})$.

3) O_{im} *d'équations:* $B(x,x) = - m^2$ $(m \in \mathbb{R}^{+*})$.

4) $O_\circ^+$ *d'équations :* $B(x,x) = o$ *et* $x^\circ > o$.

5) $O_\circ^-$ *d'équations :* $B(x,x) = o$ *et* $x^\circ < o$.

6) $O_\circ^\circ = \{o\}$.

Remarque : 1) Les notations sont celles de la physique, les orbites sont paramétrées à l'aide de $+ - o$ et d'un paramètre réel positif m qui sera interprété comme une masse $(m = o$ dans les cas 4, 5, 6).

2) O_m^+ et O_m^- sont des nappes d'hyperboloïdes à deux nappes, O_{im} est un hyperboloïde à une nappe, $O_\circ^+$ et $O_\circ^-$ sont les deux nappes du cône de lumière épointé (c.à.d. privé de son sommet).

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}^4$. Supposons par exemple $B(x,x) > o$ et $x^\circ > o$; soit $m^2 = B(x,x)$, on sait que $\Omega_x \subset \Omega'_{m^2}$. L'inclusion est stricte, en effet, de l'égalité $B(x,x) = m^2$ on déduit :

$$(x^\circ)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + m^2 \geqslant m^2 \quad \text{d'où} \quad |x^\circ| \geqslant m.$$

Il en résulte que Ω'_{m^2} est réunion de deux nappes symétriques par rapport à l'hyperplan engendré par (e_1, e_2, e_3) : l'une O_m^+ sur laquelle $x^\circ \geqslant m$, l'autre O_m^- sur laquelle $x^\circ \leqslant -m$. Or, il résulte des formules donnant explicitement l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^4$ que si x' appartient à l'orbite de x, le signe de x'° est le même que celui de x° (pour vérifier ceci, il est bon, au moyen d'une rotation autour de $\mathbb{R}e_\circ$, de se ramener au cas $x = (x^\circ,o,o,x^3)$). On a donc, nécessairement, $\Omega_x \subset O_m^+$. Pour vérifier l'égalité, il suffit de vérifier que $O_m^+ \cap (\mathbb{R}e_\circ + \mathbb{R}e_3) \subset \Omega_x \cap (\mathbb{R}e_\circ + \mathbb{R}e_3)$, ce qui est immédiat, car $O_m^+ \cap (\mathbb{R}e_\circ + \mathbb{R}e_3)$ est une branche d'hyperbole, d'équation $(x^\circ)^2 - (x^3)^2 = m^2$ (précisée par $x^\circ > o$) et cette branche est l'orbite de son sommet sous l'action du sous-groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} e^{t/2} & o \\ o & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$. c.q.f.d.

2.13) Remarques : 1) Démonstration analogue dans les autres cas.

2) Ces démonstrations se simplifient beaucoup en utilisant la connexité de $SL(2,\mathbb{C})$, (cf. ch. II).

2.14) PROPOSITION. - *1) Le stabilisateur de tout point de* O_m^+ *ou* O_m^- *est conjugué de* $SU(2)$.

2) Le stabilisateur de tout point de O_{im} *est conjugué du sous-groupe* $SU(1,1)$ *des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ *avec* $|a|^2 - |b|^2 = 1$ *et aussi du sous-groupe* $SL(2,\mathbb{R})$.

3) Le stabilisateur de tout point de $O_\circ^+$ *ou* $O_\circ^-$ *est conjugué du sous-groupe* $ST(2)$ *des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ *avec* $(u,z) \in \mathbb{C}^2$ *et* $|u|^2 = 1$.

4) Le stabilisateur de $\{0\}$ *est* $SL(2,\mathbb{C})$.

Remarque : Les stabilisateurs sont aussi appelés traditionnellement "petits groupes" associés aux points correspondants de $\mathbb{R}^4$.

<u>Démonstration</u>. - Le stabilisateur de λx étant le même que celui de x, on voit que les stabilisateurs seront les mêmes sur O_m^+ et O_m^-, ainsi que sur $O_\circ^+$ et $O_\circ^-$. On peut donc se limiter à O_m^+, O_{im}, $O_\circ^+$ et $O_\circ^\circ$, et même à O_1^+, O_i, $O_\circ^+$ et $O_\circ^\circ$.

1) Cas de O_1^+ : l'élément $e_\circ \in O_1^+$ a pour stabilisateur $SU(2)$, (cf. 2.11), ce qui règle ce cas.

2) Cas de O_i : Cherchons le stabilisateur de $e_3 = (0,0,0,1) \in O_i$, c.à.d. l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ telles que :

$$X \sigma_3 X^* = \sigma_3.$$

Ce qui donne les équations :

(1) $|a|^2 - |b|^2 = 1$ (2) $|c|^2 - |d|^2 = -1$ (3) $a\bar{c} - b\bar{d} = o$ (4) $ad - bc = 1$.

On déduit de (1) et (2) $a \neq o$ et $d \neq o$, d'après (3), il existe donc $k \in \mathbb{C}$ tel que $b = ka$ et $c = \bar{k}d$. En reportant dans (4) et (1), on obtient :

$$ad(1 - |k|^2) = 1 \quad \text{et} \quad |a|^2(1 - |k|^2) = 1$$

d'où $d = \bar{a}$ puis, grâce à (3), $c = \bar{b}$, ainsi $X \in SU(1,1)$; réciproque évidente.

Si l'on cherche le stabilisateur de $e_2 = (0,0,1,0)$, on trouve $SL(2,\mathbb{R})$, ce qui achève la démonstration de 2). On peut préciser que si $C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ on a :

$C.\, e_3 = e_2$, ainsi $SL(2,\mathbb{R})$ est l'image de $SU(1,1)$ par l'automorphisme intérieur $X \mapsto C X C^{-1}$ de $SL(2,\mathbb{C})$.

3) Cas de $O_\circ^+$: l'élément $e_\circ + e_3 = (1,0,0,1)$ appartient à $O_\circ^+$. Son stabilisateur est l'ensemble des $X \in SL(2,\mathbb{C})$ tels que

$$X(\sigma_\circ + \sigma_3)X^* = \sigma_\circ + \sigma_3.$$

Ce qui donne les équations :

$$|a|^2 = 1, \quad a\bar{c} = o, \quad \bar{a}c = o, \quad |c|^2 = o, \quad ad - bc = 1,$$

qui conduisent immédiatement au résultat.

4) Cas de $O_o{}^\circ$: le stabilisateur de 0 est évidemment $SL(2,\mathbb{C})$.

c.q.f.d.

3 - Produits semi-directs. Groupes de Poincaré.

L'espace-temps au sens physique n'a évidemment pas de point particulier pouvant servir canoniquement d'origine. L'identification avec $\mathbb{R}^4$ suppose le choix d'un repère, effectuer une transformation de Lorentz revient à effectuer un changement de repère sans changer l'origine. Si l'on change l'origine, cela signifie que l'on affectue de plus une translation. Autrement dit, on doit considérer l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$ comme un espace affine. Afin d'éviter la définition générale d'un espace affine, nous nous contenterons de ce qui suit.

3.1) Soit E un espace vectoriel sur $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On appelle translation de E toute application $\tau_a : E \to E$ du type $x \mapsto x+a$ où a est fixé dans E. Soit $\mathscr{T}(E)$ l'ensemble des translations de E, comme $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b$ et $\tau_o = id_E$, on voit que $\mathscr{T}(E)$ est un sous-groupe du groupe $Bij(E)$ des bijections de E, et que $\mathscr{T}(E)$ est isomorphe, par l'application $a \mapsto \tau_a$, au groupe additif de E.

3.2) PROPOSITION. - *Pour tout* $u \in GL(E)$ *et tout* $\tau \in \mathscr{T}(E)$, *on a* $u^{-1}\tau u \in \mathscr{T}(E)$. *Il en résulte que l'ensemble, noté* $GLA(E)$, *des bijections de* E *de la forme* $u\tau$ *est un sous-groupe de* $Bij(E)$, *appelé groupe affine de* E.

Preuve. - Soit $u \in GL(E)$ et $\tau = \tau_a \in \mathscr{T}(E)$. On a :

$$u^{-1}\tau_a\, u(x) = u^{-1}\,[u(x) + a] = x + u^{-1}(a) = \tau_{u^{-1}(a)}(x),$$

d'où : $u^{-1}\tau_a\, u = \tau_{u^{-1}(a)} \in \mathscr{T}(E)$. Soit alors $u\tau$ et $u'\tau'$ dans GLA(E). On a :

$$(u\tau)(u'\tau')^{-1} = u\tau\tau'^{-1}\, u'^{-1} = uu'^{-1}(u'\tau\tau'\, u'^{-1}) \in \mathrm{GLA}(E).$$

c.q.f.d.

<u>Remarque</u> : Les éléments de GLA(E) sont appelés "bijections affines" de E.

3.3) <u>Définition</u>. - *On dit qu'un groupe* G *est produit semi-direct de deux sous-groupes* H *et* N *si :*

1) N *est distingué.*

2) Tout $s \in G$ *s'écrit de manière unique* $s = nh$ *avec* $n \in N$, $h \in H$.

<u>Remarques</u> : 1) La propriété 2 équivaut à la conjonction des deux propriétés : $G = NH$ et $N \cap H = \{e\}$. La notation NH désigne évidemment l'ensemble des nh, $n \in N$, $h \in H$.

2) Comme s^{-1} s'écrit aussi sous la forme n_1h_1, on voit que tout $s \in G$ s'écrit aussi, de manière unique, sous la forme $h'n'$. D'ailleurs : $nh = h(h^{-1}nh) = hn'$. Ainsi, on a aussi $G = HN$.

3) Les "projections" de G sur N et H sont définies comme les applications de G dans N (resp. H) associant à $s = nh$ l'élément $n \in N$ (resp. $h \in H$). La projection sur H est toujours un homomorphisme de groupes car :

$$(nh)(n'h') = n(h\, n'h^{-1})h\, h'.$$

Lorsqu'on considère la décomposition $s = hn$ on définit une autre projection sur N mais la même sur H (cf. calcul de la remarque 2).

4) L'application canonique $\Phi : G \to G/N$, restreinte à H, est un isomorphisme de groupes de H sur G/N. Soit p la projection sur H, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ H \arrow[rr, "\varphi", "\simeq"'] & & G/N. \end{tikzcd}$$

5) Si H est également distingué, on dit que le produit est direct. Dans ce cas $nh = hn$, pour tout $h \in H$ et tout $n \in N$, et l'application $(h,n) \to hn$ est un isomorphisme du groupe produit $H \times N$ sur G.

3.4) PROPOSITION (Exemples).

1) Le groupe $GLA(E)$ *est produit semi-direct du sous-groupe distingué* $\mathcal{T}(E)$ *et de* $GL(E)$.

2) Le groupe $ST(2)$ *est produit semi-direct du sous-groupe distingué* N *des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(isomorphe à* $\mathbb{C}$*) et du sous-groupe* H *des matrices* $\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ *où* $u \in \mathbb{U}$*, groupe des nombres complexes de module 1 (*H *est isomorphe à* $\mathbb{U}$*).*

Preuve. Vérifications évidentes.

3.5) Soit H_1 et N_1 deux groupes, et σ un homomorphisme de groupe de H_1 dans le groupe des automorphismes de N_1. Pratiquement, ceci signifie que, pour tout $h \in H_1$, on se donne un isomorphisme σ_h de N_1 sur lui-même et que l'on suppose de plus que : $\sigma_{hh'} = \sigma_h \circ \sigma_{h'}$. En particulier, H_1 opère à gauche sur N_1 par $(h,n) \mapsto \sigma_h(n)$.

3.6) <u>DEFINITION</u>. - (notations de 3.5).

On appelle produit semi-direct de H_1 *et* N_1, *le groupe* G *obtenu en munissant l'ensemble* $N_1 \times H_1$ *de la loi de composition interne :*

$$(n,h)(n',h') = (n\ \sigma_h(n'),hh').$$

3.7) <u>PROPOSITION</u>. - (mêmes notations).

Le groupe G *ci-dessus est produit semi-direct au sens de 3.3 du sous-groupe distingué* N *des* (n,e) *(isomorphe à* N_1*) et du sous-groupe* H *des* (e,h) *(isomorphe à* H_1*). De plus, on a la formule :*

$$(\sigma_h(n),e) = (e,h)(n,e)(e,h)^{-1},$$

autrement dit, si l'on identifie N_1 *à* N, *et* H_1 *à* H, *on a l'égalité :*

$$\sigma_h(n) = h\ n\ h^{-1}.$$

(Dans cette identification (n,h) = nh).

<u>Preuve</u>. - Vérifications immédiates.

3.8) <u>Remarques</u> : 1) On notera $N_1 \circledS H_1$ le produit semi-direct défini en 3.7. Il dépend en fait de σ.

2) Le produit semi-direct de 3.7 est appelé souvent semi-direct externe par opposition au produit semi-direct "interne" défini en 3.3.

3) Dans la pratique, N_1 sera en général un groupe abélien. Dans ce cas, la donnée de σ_2 se réduit à la donnée d'une action à gauche de H sur N : $(h,n) \mapsto h.n$ telle que :

$$h.(n+n') = hn + hn' \quad \text{pour tous } (n,n') \in N \times N.$$

Si N est de plus un espace vectoriel réel de dimension finie, et si $n \mapsto h.n$ est continue (cf. ch. II), cette condition entraîne que $n \mapsto h.n$ est linéaire : on dit que H opère linéairement dans N.

4) Si $\sigma_h = id$ pour tout $h \in H$, on obtient le produit direct de N_1 et H_1.

3.9) <u>Exemples</u> : 1) Soit E un espace vectoriel, en faisant opérer $GL(E)$ dans E canoniquement, c.à.d. par $(u,a) \mapsto u(a)$, on obtient un produit semi-direct $E \circledS GL(E)$, isomorphe à $GLA(E)$.

2) Soit $N_1 = \mathbb{C}$ et $H_1 = \mathbb{U}$. En faisant opérer $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ par $(u,z) \mapsto uz$, on obtient un produit semi-direct $\mathbb{C} \circledS \mathbb{U}$, isomorphe au groupe des déplacements du plan. En considérant l'action $(u,z) \mapsto u^2 z$, on obtient un <u>autre</u> produit semi-direct, isomorphe à $ST(2)$.

3.10) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique B non dégénérée. Soit δ la pseudo-distance définie sur $E \times E$ par :

$$\delta(x,y)^2 = B(x-y,\ x-y).$$

(En fait, seul δ^2 est défini ; la définition est recopiée sur la définition usuelle de la distance de deux points dans $\mathbb{R}^n$ comme carré scalaire de leur différence).

Il est évident que $\delta(x+a,\ y+a)^2 = \delta(x,y)^2$, autremant dit, δ est invariante par translation. D'où :

3.11) <u>PROPOSITION</u>. - *L'ensemble* G *des bijections affines de* E *conservant* δ, *c.à.d. telles que :*

$$\delta(ux,uy)^2 = \delta(x,y)^2 \textit{ pour tout } (x,y) \in E \times E,$$

est un sous-groupe de GLA(E) *qui n'est autre que l'ensemble des* $u\tau$ *où* $u \in O(E,B)$ *et* $\tau \in \mathscr{T}(E)$. *Autrement dit, c'est le produit semi-direct de* E *et de* O(E,B), *où* O(E,B) *agit canoniquement sur* $\mathbb{R}^4$.

Preuve. - Il est immédiat que G est un sous-groupe de GLA(E) qui contient les translations. Il contient également O(E,B) car, si $u \in O(E,B)$:

$$\begin{aligned}\delta(ux,uy)^2 &= B(ux - uy,\ ux - uy) = B(u(x-y),\ u(x-y)) = B(x-y,x-y) \\ &= \delta(x,y)^2.\end{aligned}$$

Il contient donc tous les $u\tau$, où $u \in O(E,B)$ et $\tau \in \mathscr{T}(E)$.

Réciproquement, si $w \in G$, on a $w = u\tau$ avec $u \in GL(E)$ et $\tau \in \mathscr{T}(E)$, donc $\tau \in G$. On en déduit que $u = w\tau^{-1} \in G$, ce qui entraîne $u \in O(E,B)$ car :

$$B(ux,ux) = \delta(ux,o)^2 = \delta(x,o)^2 = B(x,x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Ainsi, en posant $H = O(E,B)$ et $N = \mathscr{T}(E)$, on a $G = NH$ et $H \cap N = \{e\}$, ce qui prouve que l'on a un produit semi-direct.

D'une manière générale, si $G = NH$ est un produit semi-direct interne, isomorphe au produit semi-direct externe $G_1 = N_1 \circledS H_1$, où H_1 est isomorphe à H, N_1 isomorphe à N, et où l'action de H_1 sur N_1 : $(h_1, n_1) \mapsto \sigma_{h_1}(n_1)$ devient par isomorphisme l'action $(h,n) \mapsto h\,n\,h^{-1}$ de H sur N, on peut associer à tout sous-groupe H' de H isomorphe à un sous-groupe H'_1 de H_1, le sous-groupe $NH' = G'$ de G. Le groupe G' est évidemment encore produit semi-direct de N et H', isomorphe au produit semi-direct externe $N_1 \circledS H'_1$ obtenu en faisant agir H'_1 sur N_1 par restriction de l'action de H_1. C'est ce qui explique la dernière assertion de la proposition.

3.12) Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ est, par définition, le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}^n$ laissant invariante la distance euclidienne. Il s'agit donc du produit semi-direct de $\mathbb{R}^n$ et de $O(n)$.

La loi de groupe est donnée par :

3.13) $(x,A)(x',A') = (x + A(x'), AA')$.

Le sous-groupe obtenu en remplaçant $O(n)$ par $SO(n)$ est appelé groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$.

On peut vérifier que toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ (i.e. application conservant la distance) est en fait une bijection affine, ce qui explique la terminologie.

Exercice : Vérifier l'assertion de 3.9, Ex 2 concernant les déplacements du plan.

3.14) Groupes de Poincaré.

On choisit maintenant pour E l'espace de Minkowski. On peut démontrer également dans ce cas que toute application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ laissant invariante la pseudo-distance est une bijection affine. L'ensemble des "isométries" de $\mathbb{R}^4$ pour cette pseudo-distance est donc, d'après 3.11, le produit semi-direct $\mathbb{R}^4 \circledS O(1,3)$, il comporte comme sous-groupe particulier, $\mathbb{R}^4 \circledS SO(1,3)$.

Rappelons que les éléments de $\mathbb{R}^4 \circledS O(1,3)$ sont les couples (x,A) où $x \in \mathbb{R}^4$, $A \in O(1,3)$, la loi de groupe étant définie par la formule (3.13). Le couple (x,A) représente l'isométrie τu obtenue en composant la transformation de Lorentz u associée à A, suivie de la translation τ associée à x.

On appelle groupe de Poincaré, aussi bien, $\mathbb{R}^4 \circledS O(1,3)$ que $\mathbb{R}^4 \circledS SO(1,3)$, ou encore $\mathbb{R}^4 \circledS SO_o(1,3)$ où $SO_o(1,3)$ désigne le sous-groupe de $SO(1,3)$ formé des matrices $X = (x^i{}_j)$ telles que $x^\circ{}_\circ > 1$ (on montrera qu'il s'agit effectivement d'un sous-groupe).

Il se trouve que, pour des raisons à la fois mathématiques et physiques, le groupe qui joue un rôle fondamental est en fait le produit semi-direct $\mathbb{R}^4 \wedge SL(2,\mathbb{C})$ où l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^4$ est celle définie en 2.2. C'est ce groupe que nous appellerons dans la suite groupe de Poincaré. Les éléments en sont les couples (x,X) où $x \in \mathbb{R}^4$, $X \in SL(2,\mathbb{C})$, la loi de groupe est :

$$(x,X)(x',X') = (x + X.x', XX').$$

Pour tout $X \in SL(2,\mathbb{C})$, l'application $x \mapsto X.x$ est une isométrie de l'espace de Minkowski, et on a : $X.x = (-X).x$. Le sous-groupe distingué des (x,I) est isomorphe à $\mathbb{R}^4$, le sous-groupe non distingué des $(0,X)$ est isomorphe à $SL(2,\mathbb{C})$. On identifiera souvent $\mathbb{R}^4$ ou $SL(2,\mathbb{C})$ à ces deux sous-groupes.

CHAPITRE II - GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES TOPOLOGIQUES PROPRIÉTÉS DE CONNEXITÉ.

1 - Rappels.

1.1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de E est attaché l'isomorphisme de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ sur l'algèbre $\mathscr{L}(n,K)$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K, qui associe à tout $u \in \mathscr{L}(E)$ sa matrice $M(u)$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. Si $x \in E$, on notera $M(x)$ la matrice colonne des composantes x^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de x dans la même base. On sait que l'on a alors :

$$M[u(x)] = M(u)\ M(x).$$

L'isomorphisme M transforme le groupe $GL(E)$ des automorphismes de E en $GL(n,K)$, groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans K.

1.2) On peut munir E d'une topologie en transportant sur E la topologie de K^n au moyen de la bijection φ qui à $(x^1,\dots,x^n) \in K^n$, associe $\sum_{i=1}^{n} x^i e_i \in E$. Les formules de changement de base montrent que la topologie ainsi définie ne dépend pas de la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Ainsi, par définition, $\lim x(t) = a$ dans E ssi dans une base de E (donc, dans toute base de E), les composantes de $x(t)$ ont pour limites celles de a.

La famille des bijections φ ci-dessus munit également E, de manière évidente, d'une structure naturelle de variété C^∞ pour laquelle ces bijections sont des cartes.

Toute application linéaire de E dans un autre espace vectoriel F de dimension finie, est évidemment continue, et C^{∞}, pour les structures ainsi définies.

On démontre, d'autre part, que la topologie que nous venons de définir sur E est la seule topologie séparée qui rende continues les applications:

$$(x,y) \mapsto x + y, \quad \text{de } E \times E \text{ dans } E,$$

$$\text{et} \quad (\lambda,x) \mapsto \lambda x, \quad \text{de } K \times E \text{ dans } E.$$

Il en résulte, par exemple, que toute norme sur E définit cette topologie. Ainsi, toutes les normes sur E sont équivalentes, ce qui peut aussi se démontrer directement. Toutes les propriétés d'espaces normé ou d'espace topologique de K^n sont évidemment vraies pour E. Par exemple, les compacts de E sont les fermés bornés (pour une norme quelconque sur E).

1.3) Si E est un espace vectoriel complexe, on peut a fortiori le considérer comme espace vectoriel réel ; les deux topologies que l'on peut ainsi définir coïncident, comme on le voit par un calcul direct, ou en utilisant la propriété caractéristique énoncée ci-dessus.

1.4) Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E)$ aussi, et les considérations précédente s'appliquent à $\mathscr{L}(E)$ et à $\mathscr{L}(n,K)$. Autrement dit, l'application M de (1.1) est un homéomorphisme et même un difféomorphisme. Par exemple, les matrices $X(t) = (x_{ij}(t))$ auront pour limite $A = (a_{ij})$ ssi, pour tout (i,j), $\lim x_{ij}(t) = a_{ij}$. On peut faire de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(n,K)$ des espaces normés en posant par exemple :

$$\|u\| = \|M(u)\| = \operatorname{Max}(|a_{ij}|), \quad \text{si } M(u) = (a_{ij}).$$

On vérifie que l'application $(u,v) \mapsto uv$ de $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ est continue et même C^{ω} (i.e analytique). Cette dernière assertion résulte simplement du fait que les coefficients d'un produit de deux matrices sont des polynômes des coefficients des facteurs.

1.5) L'application déterminant : $u \mapsto \det u$, de $\mathscr{L}(E)$ dans K, est de même continue et analytique car, si $X \in \mathscr{L}(n,K)$, le déterminant de X est un polynôme des coefficients de X. Il en résulte que $GL(E) = \det^{-1}(K - \{o\})$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ (donc une sous-variété de dimension n^2). L'application $u \mapsto u^{-1}$ est un difféomorphisme de $GL(E)$ sur lui-même : ceci résulte du calcul de la matrice inverse d'une matrice.

Ainsi, $GL(E)$ et, plus généralement tout sous-groupe de $GL(E)$, est un "groupe topologique" car :

1.6) Définition. - *On appelle groupe topologique tout ensemble* G *muni d'une structure de groupe, notée* $(x,y) \mapsto xy$, *et d'une topologie telles que les applications :*

$$(x,y) \mapsto xy \quad \textit{et} \quad x \mapsto x^{-1}$$

(de $G \times G$ *dans* G *et de* G *dans* G *respectivement) soient continues.*

Notons de plus que $\mathscr{L}(E)$, étant homéomorphe à K^n, est localement compact ; il en est de même pour $GL(E)$ qui est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ et pour les sous-groupes fermés ou ouverts de $GL(E)$. Mais remarquons que dans un groupe topologique G, tout sous-groupe ouvert H est également fermé : en effet, les translations $y \mapsto ay$, où a est fixé dans G, sont, par définition, des homéomorphismes, donc toutes les classes xH sont ouvertes. Comme l'ensemble de ces classes constitue une partition de G, elles sont également fermées.

1.7) Soit E un espace vectoriel <u>réel</u> de dimension finie; alors $\mathbb{R}^+ - \{o\}$ est un sous-groupe multiplicatif, ouvert, propre, de $\mathbb{R} - \{o\}$, donc $\det^{-1}(\mathbb{R}^+ - \{o\})$, que l'on note $GL^+(E)$, est un sous-groupe ouvert, donc ouvert et fermé, de $GL(E)$. En particulier, $GL(E)$ n'est pas connexe. On montrera plus loin (§ 6.7) que $GL(E)$ admet deux composantes connexes : $GL^+(E)$ et $GL^-(E) = \det^{-1}(\mathbb{R}^- - \{o\})$ qui n'est pas un sous-groupe de $GL(E)$. Au contraire, si E est un espace vectoriel complexe, $GL(E)$ est connexe, donc sans sous-groupe ouvert propre.

2 - <u>Groupes unitaires.</u>

La groupe $GL(E)$ n'est pas compact si $E \neq \{o\}$ car il n'est pas borné dans $\mathscr{L}(E)$: si $u \in GL(E)$, on a $\lambda u \in GL(E)$ pour tout $\lambda \in K - \{o\}$. La considération des formes quadratiques définies positives introduit elle, des groupes compacts :

2.1) Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. <u>On dit qu'une application</u> $\phi : E \times E \to K$ <u>est sesquilinéaire si</u> :

1) $\phi(x_1 + x_2, y) = \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$

2) $\phi(x, y_1 + y_2) = \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$

3) $\phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x,y)$ et $\phi(x, \alpha y) = \bar{\alpha}\phi(x,y)$

<u>pour</u> $\alpha \in K$, $x \in E$, $y \in E$.

<u>On dit qu'une forme sesquilinéaire est non dégénérée si</u> :

$\phi(x,y) = o$ pour tout $y \in E$ implique $x = o$

et $\phi(x,y) = o$ pour tout $x \in E$ implique $y = o$.

Une <ins>forme hermitienne</ins> est une forme sesquilinéaire vérifiant $\phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}$ pour tout $(x,y) \in E \times E$. Elle est dite <ins>positive</ins>,(resp. <ins>définie positive</ins>), si $\phi(x,x) \geqslant o$ pour tout $x \in E$ (resp. $\phi(x,x) > o$ pour tout $x \in E - \{o\}$).

On vérifie qu'une forme hermitienne est définie positive ssi elle est positive et non dégénérée, et que toute forme hermitienne positive vérifie <ins>l'inégalité de Schwarz</ins> :

$$\phi(x,y) \quad \overline{\phi(x,y)} \leqslant \phi(x,x) \quad \phi(y,y).$$

Lorsque E est réel, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire et une forme hermitienne est une forme symétrique. Une forme hermitienne définie positive est donc simplement dans ce cas une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B, comme au chap. I, et qui est, de plus, positive.

2.2) Soit ϕ une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on définit évidemment les isométries de E comme les $u \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifient, pour tout $(x,y) \in E \times E$:

$$\phi\,[ux,\ uy] = \phi(x,y)$$

ou la condition équivalente : $\phi\,[ux,\ ux] = \phi(x,x)$.

Comme ϕ est non dégénérée, ces isométries sont des bijections, donc appartiennent à $GL(E)$, dont elles forment un sous-groupe, noté $U(E,\phi)$. On note, d'autre part, $SU(E,\phi)$ le sous-groupe des $u \in U(E,\phi)$ dont le déterminant vaut 1.

Comme ϕ est définie positive, elle munit E d'une structure d'espace hilbertien de dimension finie. On sait donc associer à tout $u \in \mathcal{L}(E)$ son adjoint $u^* \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie, pour tout $(x,y) \in E \times E$:

$$\phi\,[ux,\ y] = \phi\,[x,\ u^*y].$$

D'autre part, il existe des bases orthonormées pour ϕ, et, dans une telle base, on a la relation :

$$M(u^*) = M(u)^*$$

où, pour toute $A \in \mathscr{L}(n,K)$, on pose $A^* = {}^t\overline{A}$ (A^* est la matrice "adjointe" de A). On a alors la proposition :

2.3) <u>PROPOSITION</u>. - *Le groupe* $U(E,\phi)$ *est l'ensemble des* $u \in \mathscr{L}(E)$ *qui vérifient les conditions équivalentes suivantes :*

1) $u^* = u^{-1}$ *c.à.d.* $u^*u = \mathrm{id}$,

2) Si $M(u)$ *est la matrice de* u *dans une base orthonormée pour* ϕ *:*

$$M(u)^* = M(u)^{-1} \quad \textit{c.à.d.} \quad M(u)^*M(u) = I.$$

<u>PREUVE</u>. - Il suffit de remarquer que $\phi(ux,uy) = \phi(x,u^*uy)$, de sorte que $u \in U(E,\phi)$ équivaut à :

$$\phi(x,\ u^*uy) = (x,y)$$

d'où $u^*u = \mathrm{id}$, puisque ϕ est non dégénérée.

c.q.f.d.

<u>DEFINITION</u>. - *On appelle groupe unitaire (resp. orthogonal) d'ordre* n*, et on note* $U(n)$ *(resp.* $O(n)$*), le groupe des matrices* A *carrées d'ordre* n *à coefficients complexes (resp. réels) vérifiant :*

$$A^* = A^{-1} \text{ (resp. } {}^tA = A^{-1}).$$

On note évidemment $SU(n)$ le sous-groupe de $U(n)$ formé des matrices de $U(n)$ dont le déterminant est égal à 1. La relation de définition de $U(n)$ (ou de $U(E,\phi)$) montre, par ailleurs, que les $A \in U(n)$ (ou les $u \in U(E,\phi)$) ont toutes un déterminant de module 1.

Le groupe $U(n)$ n'est autre que le groupe $U(\mathbb{C}^n,\phi)$ où ϕ est la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$ définie par :

$$\phi(z,z') = \sum_{i=1}^{n} z^i \, \overline{z'^i}$$

et où l'on identifie tout opérateur de $\mathbb{C}^n$ à sa matrice dans la base canonique, qui est par ailleurs orthonormée pour ϕ.

2.5) <u>PROPOSITION</u>. - *Le groupe unitaire* $U(n)$, *et le groupe orthogonal* $O(n)$, *sont compacts.*

<u>PREUVE</u>. - La relation $A^*A = I$ définit un fermé de $\mathscr{L}(n,\mathbb{C})$, car l'application $A \mapsto A^*$ étant continue, ainsi que l'application $(A,B) \mapsto AB$, il en résulte que $A \mapsto A^*A$ est continue. Elle entraîne d'autre part, les n relations :

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1 \qquad (\text{où } A = (a_{ij}))$$

qui montrent que $U(n)$ est en outre borné dans $\mathscr{L}(n,\mathbb{C})$. De même, pour $O(n)$.

c.q.f.d.

2.6) <u>COROLLAIRE</u>. - *Tous les groupes* $U(E,\phi)$ *sont compacts, ainsi que les groupes* $SU(E,\phi)$. *En particulier,* $SU(n)$ *et* $SO(n)$ *sont compacts.*

<u>PREUVE</u>. - Par définition de la topologie de $\mathscr{L}(E)$, pour toute base de E, l'application $u \mapsto M(u)$ est un homéomorphisme. Or, si l'on choisit une base orthonormée, l'image de $U(E,\phi)$ par cette application est précisément $U(n)$ ou $O(n)$ suivant que E est complexe ou réel.

Quant à $SU(E,\phi)$, c'est l'instersection du compact $U(E,\phi)$ avec le fermé constitué dans $\mathscr{L}(E)$ par l'ensemble des u tels que $\det u = 1$.

c.q.f.d.

<u>Remarque</u> : On a vu au passage que $SL(n, \mathbb{C})$, et $SL(n, \mathbb{R})$ sont fermés dans $\mathscr{L}(n,\mathbb{C})$ et $\mathscr{L}(n, \mathbb{R})$ respectivement.

2.7) <u>Exemples</u>. - On a déjà eu l'occasion de caractériser $SU(2)$ comme l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, où a et b sont deux nombres complexes vérifiant $|a|^2 + |b|^2 = 1$. En appliquant les définitions précédentes, on trouve que :

a) Le groupe $U(2)$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$, et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

b) Le groupe $O(2)$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & -b \\ \varepsilon b & \varepsilon a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \pm 1$, et $a^2 + b^2 = 1$. C'est donc aussi l'ensemble des $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \varepsilon\sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$.

c) Le groupe $SO(2)$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec les mêmes conditions, c.à.d. l'ensemble des $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

d) Remarquons que $O(1) = \{-1, +1\}$, $SO(1) = \{1\}$, et que $U(1)$, noté $\mathbb{U}$, est l'ensemble des nombres complexes de module 1, alors que $SU(1) = \{1\}$.

3 - <u>Décomposition d'Iwasawa de GL(n,K).</u>

3.1) <u>PROPOSITION</u>. - (Orthogonalisation de Schmidt).

Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ *une base d'un espace vectoriel* E *sur* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *soit* ϕ *une forme hermitienne définie positive sur* E. *Il existe une unique base orthonormée* $(e_1,\ldots,e_n)$ *de* E *telle que :*

$$(1) \quad \begin{array}{ll} f_1 = \alpha_{11}\, e_1 & \text{avec } \alpha_{11} > o \\ f_2 = \alpha_{12}\, e_1 + \alpha_{22}\, e_2 & \alpha_{22} > o \\ \vdots & \vdots \\ f_i = \alpha_{1i}\, e_1 + \ldots + \alpha_{ii}\, e_i & \alpha_{ii} > o \\ \vdots & \vdots \\ f_n = \alpha_{1n}\, e_n + \ldots \quad \ldots + \alpha_{nn}\, e_n & \alpha_{nn} > o. \end{array}$$

De plus, pour ϕ *fixée, les* e_i *et les* α_{ij} *dépendent continûment de* $(f_1,\ldots,f_n) \in E^n$;

PREUVE. - L'existence et l'unicité sont élémentaires, démontrons la continuité.

Pour cela, remarquons tout d'abord que toute forme sesquilinéaire ϕ est une application continue $E \times E \to K$. En effet, $\phi(x,y)$ s'exprime comme un polynôme du second degré en fonction des composantes de x, et des conjugués de celles de y, dans une base quelconque.

Ainsi, $\alpha_{11} = [\,\phi(f_1,f_1)\,]^{1/2}$, et $e_1 = \alpha_{11}^{-1}\, f_1$, sont des fonctions continues de f_1.

Supposons que les α_{jk} et les e_j figurant dans les $i-1$ premières lignes de (1) soient des fonctions continues de $(f_1,\ldots,f_{i-1})$.

On a : $$\alpha_{ji} = \phi(f_i,e_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant i-1)$$

donc α_{ji} dépend continûment de $(f_1,\ldots,f_i)$. Il en est de même de α_{ii} car :

$$\alpha_{ii} = \Big(\phi(f_i,f_i) - \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ji}|^2\Big)^{1/2} ,$$

et de même de e_i car :

$$e_i = \alpha_{ii}^{-1}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji}\, e_j).$$

c.q.f.d.

Remarquons que les égalités (1) expriment que la matrice de passage de la base (e_i) à la base (f_i) est triangulaire supérieure, avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale principale. L'ensemble des matrices de ce type constitue évidemment un sous-groupe de $GL(n,K)$.

On notera D_+ le sous-groupe de $GL(n,K)$ formé des matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

On notera $T_1(n,K)$ le sous-groupe de $GL(n,K)$ formé des matrices triangulaires supérieures (i.e. dont les coefficients situés en dessous de la diagonale principale sont nuls), dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

3.2) <u>THEOREME</u>. - (décomposition d'Iwasawa de $GL(n,K)$).

On a l'égalité $GL(n,K) = U(n,K)\, D_+\, T_1(n,K)$, *et l'application* $(U,D,T) \mapsto UDT$, *de* $U(n,K)\times D_+\times T_1(n,K)$ *sur* $GL(n,K)$, *est un homéomorphisme, c.à.d. que toute matrice inversible* X *s'écrit d'une manière unique* $X = UDT$, *avec* $U \in U(n,K)$, $D \in D_+$, $T \in T_1(n,K)$, *et que* U, D *et* T *sont des fonctions continues de* X.

(dans cet énoncé, lorsque $K = \mathbb{R}$, la notation $U(n,K)$ désigne $O(n)$).

<u>PREUVE</u>. - 1) Soit $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ la base canonique de K^n, et ϕ le forme hermitienne définie positive canonique, pour laquelle cette base est orthonormée.

Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ la base de K^n telle que la matrice de passage de (ε_i) à $(f_i$ soit X. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base orthonormée déduite de $(f_1,\ldots,f_n)$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, et soit C la matrice de passage de (e_i) à (f_i). Soit enfin U la matrice de passage de (ε_i) à (f_i). Comme ces deux dernières bases sont orthonormées, on a $U \in U(n,K)$. On a le schéma :

$$
\begin{tikzcd}
(\varepsilon_i) \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, "U"'] & & (f_i) \\
& (e_i) \arrow[ur, "C"'] &
\end{tikzcd}
$$

donc $X = UC$. De plus, on sait que $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ avec $\alpha_{ii} > o$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, et $T = D^{-1}C$, on a $D \in D_+$, $T \in T_1(n,K)$ et $C = DT$ donc $X = UDT$.

2) Unicité : Si $X = U'D'T'$, soit $C' = D'T'$. Soit (e'_i) la base telle que la matrice de passage de (ε_i) à (e'_i) soit U', de sorte que (e'_i) est orthonormée. Soit (f'_i) la base telle que la matrice de passage de (e'_i) à (f'_i) soit C'. Alors $U'C' = X$ est la matrice de passage de (ε_i) à (f'_i), donc $(f'_i) = (f_i)$, et la forme de C' montre que (e'_i) se déduit de $(f'_i) = (f_i)$ par le procédé de Schmidt, ce qui implique $(e'_i) = (e_i)$, d'où $U' = U$ et $C' = C$.

3) Continuité : Montrons que $X \mapsto C$ est continue. Comme l'application $(f_i) \mapsto C$ de E^n dans $GL(n,K)$ est continue (3.1), il suffit de vérifier que l'application $X \mapsto (f_i)$, de $GL(n,K)$ dans E^n, est continue, c.à.d. que les n applications $X \mapsto f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, sont continues ; ceci résulte de la définition des topologies de $\mathscr{L}(n,K)$ et de E.

Ainsi, l'application $X \mapsto U = XC^{-1}$ est continue. D'autre part, les applications $C \mapsto D$ et $C \mapsto T$ sont évidemment continues.

c.q.f.d.

<u>Remarques</u> 3.3) Si $X = UDT$, on a $\det X = \det U \ \det D$, avec $|\det U| = 1$, car $U \in U(n,K)$, et $\det D > o$, d'où $\det D = |\det X|$, et $\det U = \exp(i\ \theta)$, où θ est l'argument de $\det X$.

3.4) Les deux groupes D_+ et $T_1(n,K)$ sont homéomorphes à des $\mathbb{R}^p$, donc $GL(n,K)$ est homéomorphe au produit du groupe compact $U(n,K)$ par un $\mathbb{R}^p$.

<u>Notation</u> : on désigne par SD^+ le groupe $D^+ \cap SL(n,K)$, et, dans l'énoncé suivant, la notation $SU(n,K)$ désigne $SO(n)$ si $K = \mathbb{R}$.

3.5) <u>COROLLAIRE</u>. - (décomposition d'Iwasawa de $SL(n,K)$).

On a $SL(n,K) = SU(n,K)\ SD_+\ T_1(n,K)$, *et l'application* $(U,D,T) \to UDT$, *de* $SU(n,K) \times SD_+ \times T_1(n,K)$ *dans* $SL(n,K)$, *est un homéomorphisme.*

<u>PREUVE</u>. - il suffit de vérifier que l'image de $SL(n,K)$ dans $U(n,K) \times D^+ \times T_1(n,K)$ par l'homéomorphisme défini par la décomposition d'Iwasawa de $GL(n,K)$, est précisément $SU(n,K) \times SD^+ \times T_1(n,K)$. Or, si $X \in SL(n,K)$, on a $X = UDT$ avec, d'après la remarque (3.3), $\det D = 1$ c.à.d. $D \in SD^+$, et $\det U = 1$, c.à.d. $U \in SU(n,K)$. Réciproquement, si $U \in SU(n,K)$, $D \in SD^+$, $T \in T_1(n,K)$, et si $X = UDT$, on a $\det X = 1$, donc $X \in SL(n,K)$.

c.q.f.d.

3.6) <u>Remarque</u> (exercice). Désignons par $D(n,\mathbb{C})$ le groupe des matrices scalaires de la forme λI avec $|\lambda| = 1$. Alors on a $U(n,\mathbb{C}) = D(n,\mathbb{C})\ SU(n,\mathbb{C})$, et $SU(n,\mathbb{C})$ est distingué dans $U(n,\mathbb{C})$, mais on n'a pas $SU(n,\mathbb{C}) \cap D(n,\mathbb{C}) = \{I\}$.

3.7) <u>Exemples</u> : $SL(2,\mathbb{C})$ et $SL(2,\mathbb{R})$.

a) Toute matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & o \\ o & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ o & 1 \end{pmatrix}$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ vérifie $|a|^2 + |b|^2 = 1$, et où $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z \in \mathbb{C}$.

b) toute matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & o \\ o & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ o & 1 \end{pmatrix}$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $a^2 + b^2 = 1$, $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Naturellement, on peut poser $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, et θ est défini modulo 2π.

4 - Espaces homogènes et groupes-quotients dans le cas topologique.

4.1) Définition. - *Soit* G *un groupe topologique, et* E *un espace topologique. On dit que* G *opère continûment dans* E *à gauche (resp. à droite) si :*

a) G *opère dans* E *à gauche (resp. à droite) par* $(s,x) \mapsto sx$ *(resp.* $(s,x) \mapsto xs$*), où* $s \in G$, $x \in E$.

b) L'application : $(s,x) \mapsto sx$ *est continue de* $G \times E$ *dans* E.

Il en résulte immédiatement que les applications $x \mapsto sx$, de E dans E, sont continues pour tout $s \in G$; ce sont donc des homéomorphismes car les applications inverses sont du même type.

4.2) Exemple.

Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. La topologie induite fait de H un groupe topologique, et la continuité de $(h,x) \mapsto xh$, de $H \times G$ dans G, montre que H opère continûment à droite dans G par $(h,x) \mapsto xh$. (cf. ch. I,2.6).

Soit $\varphi : G \to G/H$ l'application canonique. On considèrera toujours G/H comme un espace topologique en le munissant de la topologie-quotient définie ainsi : une partie $O \subset G/H$ est ouverte ssi $\varphi^{-1}(o)$ est ouverte dans G. Le même procédé permet d'ailleurs plus généralement, de définir une topologie sur l'espace des orbites ${}_G\backslash E$ dans le cas général.

Rappelons que toute topologie-quotient est une "structure finale" ce qui signifie que, si ψ est une application ${}_G\backslash E \to F$, où F est un espace topologique, ψ est continue ssi $\psi \circ \varphi : G \to F$ est continue.

4.3) PROPOSITION. - *L'application canonique* $\varphi : E \to {}_G\backslash E$ *est ouverte.*

PREUVE. - Soit A un ouvert de E. On a

$$\varphi^{-1}[\varphi(A)] = GA = \bigcup_{s \in G} sA.$$

Or, puisque $x \mapsto sx$ est un homéomorphisme, sA est ouvert pour tout s, donc $\varphi^{-1}[\varphi(A)]$ est ouvert.

c.q.f.d.

4.4) PROPOSITION. -

a) L'espace topologique G/H *est séparé ssi* H *est fermé.*

b) L'espace topologique G/H *est discret ssi* H *est ouvert.*

PREUVE. -

-) Si G/H est séparé, $\{\varphi(e)\}$ est fermé dans G/H, donc $H = \varphi^{-1}[\varphi(e)]$ est fermé,

-) Si G/H est discret, $\{\varphi(e)\}$ est ouvert, donc $H = \varphi^{-1}[\varphi(e)]$ est ouvert.

-) Si H est ouvert, pour tout $s \in G$, sH est ouvert, donc $\varphi(sH)$ est ouvert dans G/H, et G/H est discret.

-) Il reste à prouver que, si H est fermé, G/H est séparé.

LEMME. - *Soit G un groupe topologique et $y \in G$, l'ensemble des $V^{-1}y\,V$, où V décrit un système fondamental de voisinages de e, est un système fondamental de voisinages de y.*

En effet, l'application $f : G \times G \to G$, définie par $f(x,z) = x^{-1}yz$, est continue. Soit W un voisinage quelconque de $y = f(e,e)$, il existe donc V_1 et V_2 voisinages de e, tels que $f(V_1 \times V_2) \subset W$. Posons $V = V_1 \cap V_2$; on a :

$$f(V \times V) \subset W \quad \text{c.à.d.} \quad V^{-1}y\,V \subset W,$$

mais, puisque $e \in V^{-1}$, on a $y\,V \subset V^{-1}y\,V$. Or, $y\,V$ est voisinage de y, puisque V est voisinage de e, donc $V^{-1}y\,V$ est un voisinage de y, ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons à G/H : soit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, c.à.d. $y \notin xH$.

Comme H est fermé, xH aussi est fermé, son complémentaire est voisinage de y, il existe donc un voisinage V de e tel que :

$$V^{-1}y\,V \cap xH = \emptyset, \quad \text{c.à.d.} \quad y\,V \cap V\,x\,H = \emptyset$$

D'où : $$y\,VH \cap Vx\,H = \emptyset, \quad \text{c.à.d.} \quad \varphi^{-1}[\varphi(y\,V)] \cap \varphi^{-1}[\varphi(Vx)] = \emptyset,$$

et finalement : $$\varphi(yV) \cap \varphi(Vx) = \emptyset.$$

On en déduit le résultat, puisque yV est voisinage de y et Vx voisinage de x, moyennant le fait que φ est ouverte.

c.q.f.d.

4.5) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* G *un groupe topologique,* H *un sous-groupe de* G.
Le groupe G *opère continûment à gauche sur* G/H.

<u>PREUVE</u>. - Il suffit d'exploiter la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (s,x) & \longrightarrow & sx \\ {\scriptstyle id_G \times \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ (s,\varphi(x)) & \xrightarrow{V} & s\varphi(x) \end{array}$$

et le fait que φ, et $(s,x) \mapsto sx$, sont continues, alors que $id_G \times \varphi$ est de plus surjective et ouverte, pour montrer que l'application V qui définit l'action de G sur G/H est continue.

4.6) <u>COROLLAIRE</u>. - *Avec les mêmes hypothèses, si l'on suppose de plus que* H *est distingué,* G/H *est un groupe topologique* (preuve analogue).

4.7) <u>PROPOSITION</u>. - (Orbites et espaces homogènes).

Soit G *un groupe topologique opérant continûment à gauche dans un espace topologique* E. *Soit* $x \in E$, *soit* $G.x$ *l'orbite de* x, *et* H_x *le stabilisateur de* x *dans* G. *La bijection* $u : G/H_x \to G.x$ *qui associe à toute classe* sH_x *dans* G/H_x, *l'élément* $sx \in G.x$, *est continue. Si* E *est séparé, le sous-groupe* H_x *est fermé dans* G.

<u>PREUVE</u>. - Soit φ l'application canonique $G \to G/H_x$. D'après la définition de la topologie-quotient, u est continue ssi $u \circ \varphi$ est continue, et ceci résulte de la continuité de l'action de G car : $u \circ \varphi(s) = s.x$. Le fait que H_x soit fermé si E est séparé, est conséquence immédiate de la continuité de $(s,x) \mapsto sx$.

c.q.f.d.

4.8) Remarque : Comme la bijection u vérifie $u(s.\xi) = su(\xi)$, on voit que l'action de G sur une orbite se ramène toujours, par la bijection u, à celle de G sur un espace du type G/H. L'importance des G/H justifie qu'on leur réserve un nom particulier : ce sont les "espaces homogènes" de G. On appellera plus généralement espace homogène de G, tout ensemble E dans lequel G opère transitivement, c.à.d. possédant une seule orbite.

Si G est un groupe topologique, la bijection u est continue, mais n'est pas toujours un homéomorphisme. Lorsque G opère continûment et transitivement dans E, si u est un homéomorphisme pour un $x \in E$, elle l'est pour tout x, on dit dans ce cas que E est un espace homogène topologique de G. Ce sera toujours le cas lorsque G est compact (cf. 4.9) ; c'est plus généralement le cas si G est localement compact, dénombrable à l'infini, et si E est un espace de Baire (par exemple si E est localement compact, ou si E est un espace métrique complet) cf. BOURBAKI ch. VII, appendice 1, lemme 2.

4.9) Cas où G est localement compact.

On se limitera en général dans ce cas à des sous-groupes H fermés, donc localement compacts, de G. D'après 4.3 et 4.4 a, l'espace homogène G/H est alors localement compact ; si H est distingué, G/H est un groupe localement compact.

Si G est compact, et si H est un sous-groupe fermé de G, alors H et G/H sont compacts. Il en résulte que la bijection u de la proposition 4.7 est toujours un homéomorphisme. En particulier, toutes les orbites sont compactes.

4.10) Applications et exemples.

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit G un sous-groupe fermé de $GL(E)$. Alors G est localement compact, dénombrable à l'infini, et opère continûment à gauche dans E par l'action canonique $(u,x) \mapsto u(x)$.

Par exemple, $O(1,3)$ et $SO(1,3)$ opèrent continûment dans $\mathbb{R}^4$.

b) Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ opère continûment dans l'espace vectoriel H des matrices hermitiennes, car l'application $(X,Y) \mapsto XYX^*$ de $G \times H$ dans H est continue. Comme l'application $h : R^4 \to H$ est une bijection linéaire, c'est un homéomorphisme, donc, par transport de structure, $SL(2, \mathbb{C})$ agit continûment sur R^4 par $(X,x) \mapsto X.x = h^{-1}[Xh(x)X^*]$. Comme les orbites sont toutes localement compactes, et comme $SL(2, \mathbb{C})$ est localement compact dénombrable à l'infini, chacune des orbites est un espace homogène de G. Par exemple, O^+_m est homéomorphe à $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, par l'application qui à $Xe_\circ \in O^+_m$, associe la classe de X dans $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, etc... .

c) Rappelons que, pour tout $X \in SL(2, \mathbb{C})$, on a noté u_X l'application $x \mapsto X.x$. On définit ainsi un homomorphisme de groupe $SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)$ (cf. Ch. I). Cet homomorphisme est continu : on peut le voir en calculant les coefficients de la matrice de u_X en fonction de ceux de la matrice X ou, plus élégamment, en vérifiant d'abord le lemme suivant :

<u>LEMME</u>. - *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* Z *un espace topologique. Soit* $u : Z \to \mathscr{L}(E)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) u *est continue.*

ii) Pour tout $x \in E$, $z \mapsto u(z)(x)$ *est continue de* Z *dans* E.

iii) Pour tout $x \in E$ *et tout* $x' \in E'$, *l'application* $z \mapsto \langle u(z)x,x'\rangle$ *est continue, de* Z *dans le corps de base.*

Soit alors G un groupe topologique opérant linéairement et continûment à gauche dans E par : $(s,x) \mapsto s.x$. Posons, pour tout $s \in G$, $u_s(x) = s.x$. Alors $u : s \mapsto u_s$ est un homomorphisme de groupes de G dans $GL(E)$, continu puisque $s \mapsto u_s(x) = s.x$ est continu pour tout $x \in E$. C'est le cas de $G = SL(2, \mathbb{C})$ et

$E = R^4$.

d) Remarquons que l'on en déduit, par restriction, que l'homomorphisme $X \mapsto u_X$ est surjectif et continu de SU(2) sur SO(3). Son noyau se réduit à $\pm$ I. Par passage au quotient, on en déduit une bijection :

$$SU(2)/_{\{\pm\ I\}} \xrightarrow{\tilde{u}} SO(3).$$

Cette bijection est continue d'après les propriétés de la topologie-quotient, donc bicontinue puisque $SU(2)\ /_{\{\pm\ I\}}$ est compact. Ainsi $\tilde{u}$ définit un isomorphisme de groupes topologiques de SO(3) sur un quotient de SU(2).

4.11) Produit semi-direct topologique.

4.12) PROPOSITION et DEFINITION.

Soit G *un groupe topologique, produit semi-direct de deux sous-groupes* N *et* H, N *étant distingué. On dit que* G *est produit semi-direct topologique de* N *et* H *si les deux conditons équivalentes suivantes sont réalisées:*

i) L'application $(n,h) \mapsto nh$, *de* $N \times H$ *sur* G, *est un homéomorphisme.*

ii) Chacune des deux projections qui, à $s = nh \in G$ *associent* $n \in N$ *et* $h \in H$, *est continue,(il suffit, d'ailleurs, qu'une le soit).*

PREUVE. - Comme G est un groupe topologique, l'application $(n,h) \mapsto nh$ est continue ; elle sera un homéomorphisme ssi l'application inverse $s = nh \mapsto (n,h)$ est continue, c.à.d. si l'on a (ii).

c.q.f.d.

Si maintenant H_1 et N_1 sont deux groupes topologiques, et G leur produit semi-direct externe associé à un certain homomorphisme σ (cf. ch. I, 3.5), en munissant G de la topologie produit, on fait de G un espace topologique. Les formules :

$$(n,h)(n',h') = (n\sigma_h(n'),hh'), \quad \text{et} \quad (n,h)^{-1} = (\sigma_{h^{-1}}(n),h^{-1}),$$

montrent que G est un groupe topologique ssi l'application

$$(h,n) \mapsto \sigma_h(n)$$

est continue, autrement dit, ssi H_1 opère continûment à gauche dans N_1 par cette application. Dans ce cas, la condition (i) étant vérifiée par définition même de la topologie de G, on obtient un produit semi-direct topologique.

<u>Remarque</u>. La condition (4.12,i) montre que, si G est séparé et produit semi-direct topologique des sous-groupes N et H, ceux-ci sont nécessairement fermés dans G.

<u>Exemples</u> : Tous les produits semi-directs introduits précédemment sont des produits semi-directs topologiques.

4.13) Si $G = NH$ est produit semi-direct topologique de N et H avec N distingué, l'isomorphisme de groupes de G/N et de H devient un isomorphisme de groupes topologiques, c.à.d. qu'il est de plus un homéomorphisme. Plus généralement :

Soit G un groupe topologique, N et H deux sous-groupes fermés tels que $G = NH$, $N \cap H = \{e\}$ et tels de plus que l'application $(n,h) \mapsto nh$ de $N \times H$ sur G soit un homéomorphisme. Alors, l'application canonique ϕ de G sur l'espace homogène G/N, restreinte à H, est un homéomorphisme φ de H sur G/N. Soit p la "projection" sur H définie par la décomposition $G = HN$, c.à.d. associant à tout $s \in G$ l'unique $p(s) \in H$ tel que $s = p(s)n$ avec $n \in N$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ H \arrow[rr, "\varphi", "\simeq"'] & & G/H \end{tikzcd}$$

On peut ainsi, par transport de structure, considérer H comme un espace homogène topologique de G. Naturellement, on peut échanger les rôles de H et N ou utiliser les classes à droite Hx, ce qui donne au total 4 homéomorphismes (vérifications laissées au lecteur).

Ces considérations s'appliquent aux produits semi-directs, mais aussi aux décompositions d'Iwasawa (ici, aucun facteur n'est distingué).

5 - Connexité dans les groupes topologiques.

5.1) On a déjà vu que, dans un groupe topologique, tout sous-groupe ouvert est fermé, donc qu'un groupe topologique connexe n'admet pas d'autre sous-groupe ouvert que lui-même.

Soit G un groupe topologique quelconque, soit V un voisinage de e dans G. Le sous-groupe H engendré algébriquement par V est ouvert car, si $y \in H$, on a $yV \in H$, donc H est voisinage de y. On en déduit :

5.2) PROPOSITION. - *Tout groupe topologique connexe est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre.*

Si G est quelconque, on a la situation suivante :

5.3) PROPOSITION. - *Dans un groupe topologique* G, *la composante connexe, notée* $G_\circ$, *de l'élément neutre* e, *est un sous-groupe distingué fermé ; la composante connexe de tout* $y \in G$ *est* $yG_\circ$.

PREUVE. - On sait que $G_\circ$ est fermée. Soit $(x,y) \in G_\circ \times G_\circ$. On a $e \in x^{-1}G_\circ$, et $x^{-1}G_\circ$ est connexe, donc $x^{-1}G_\circ \subset G_\circ$, d'où $x^{-1}y \in G_\circ$, ce qui montre que $G_\circ$ est un sous-groupe de G. Soit $a \in G$, l'automorphisme intérieur défini par a est continu, donc $aG_\circ a^{-1}$ est connexe ; comme $e \in aG_\circ a^{-1}$, il en résulte $aG_\circ a^{-1} \subset G_\circ$ donc $G_\circ$ est distingué. Enfin, si $y \in G$, comme $x \mapsto yx$ est un homéomorphisme, $yG_\circ$ est la composante connexe de y.

c.q.f.d.

Le sous-groupe $G_\circ$ est encore appelé composante neutre de G. Il existe des groupes topologiques non connexes qui sont engendrés par chacun des voisinages de l'origine, c.à.d. qui ne contiennent aucun sous-groupe ouvert non trivial. Toutefois, cette circonstance ne peut pas se produire s'il existe un voisinage connexe de e, par exemple pour un groupe de Lie, c.à.d. qu'un tel groupe est connexe ssi il est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre. En effet, si V est un voisinage connexe de e, il en est de même de $V_1 = V \cup V^{-1}$ et de V_1^n $(n \in \mathbb{N} - \{o\})$. Or, le sous-groupe engendré par V est égal à $\bigcup_{n \geq 1} V_1^n$ et, d'autre part, $e \in \bigcap_{n \geq 1} V_1^n$, donc ce sous-groupe est connexe.

Si G est connexe, il en est de même de G/H pour tout sous-groupe H. Réciproquement :

5.4) PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe topologique, et* H *un sous-groupe de* G. *Si l'espace homogène* G/H *et* H *sont tous deux connexes,* G *est connexe.*

PREUVE. - Soit U et V deux ouverts non vides de G tels que $G = U \cup V$. Soit $\psi : G \to G/H$ canonique. On a

$$G/H = \psi(G) = \psi(U) \cup \psi(V),$$

et $\psi(U)$ et $\psi(V)$ sont ouverts, donc $\psi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, puisque G/H est connexe. Soit $\psi(x) \in \psi(U) \cap \psi(V)$. On a donc :

$$xH \cap U \neq \emptyset, \quad xH \cap V \neq \emptyset \quad \text{et} \quad xH = (xH \cap U) \cup (xH \cap V) \ ;$$

comme xH est connexe, on a $(xH \cap U) \cap (xH \cap V) \neq \emptyset$ d'où $U \cap V \neq \emptyset$.

c.q.f.d.

6 - Exemples : $GL(n,K)$, $SL(n,K)$, $O(n)$, $U(n)$, groupes de Poincaré et de Lorentz.

6.1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et ϕ une forme hermitienne définie positive sur E. Soit $a \in E$ tel que $\phi(a,a) = 1$, et soit H le stabilisateur de a dans $U(E,\phi)$. Soit E' l'orthogonal de a pour ϕ, et ϕ' la restriction de ϕ à E' : c'est une forme hermitienne positive sur un espace de dimension $n-1$.

Pour tout $v \in U(E',\phi')$, soit $\tilde{v} \in \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$\tilde{v}(x + \lambda a) = v(x) + \lambda a, \quad \text{où} \quad x \in E' \quad \text{et} \quad \lambda \in K.$$

Un calcul de routine montre que $\tilde{v} \in H$, et que $v \mapsto \tilde{v}$ est un homomorphisme de groupe, continu et injectif, de $U(E',\phi')$ dans H. Réciproquement, soit $u \in H$. Comme a est stable par u, il en est de même de son orthogonal E', puisque u est une isométrie. On peut ainsi définir $u_1 \in \mathscr{L}(E')$ par $u_1(x) = u(x)$ pour tout $x \in E'$, et l'application $u \mapsto u_1$ est un inverse continu de $v \mapsto \tilde{v}$. Ainsi, H est isomorphe, en tant que groupe topologique, à $U(E',\phi')$.

6.2) On sait que $U(E,\phi)/H$ est homéomorphe à l'orbite de a dans E, puisque $U(E,\phi)$ est compact. Comme $\phi(a,a) = 1$, cette orbite est contenue dans la "sphère unité" d'équation $\phi(x,x) = 1$. Réciproquement, si $\phi(x,x) = 1$ et $x \neq a$, on peut passer de a à x, dans le plan P déterminé par x et a, par une rotation (c-à-d. un élément de $SU(P, \phi(P))$: ceci résulte de l'écriture des matrices de

SO(2) et SU(2). On prolonge cette rotation par l'identité sur l'orthogonal de P et l'on montre ainsi que la sphère unité est l'orbite de a par $SU(E,\phi)$, donc a fortiori par $U(E,\phi)$.

En résumé :

6.3) PROPOSITION - (notations de 6.1).

Le groupe $U(E',\phi')$ *s'identifie, en tant que groupe topologique, à un sous-groupe fermé* H *de* $U(E,\phi)$ *tel que* $U(E,\phi)/_H$ *soit homéomorphe à la sphère-unité définie par* ϕ *dans* E.

6.4) Soit S^m la sphère unité de $\mathbb{R}^{m+1}$, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{m+1}$. En utilisant les projections stéréographiques depuis deux pôles opposés de S^m, on voit que S^m est réunion de deux parties non disjointes, toutes deux homéomorphes à $\mathbb{R}^m$, donc connexes. Ainsi, S^m est connexe pour tout $m \geqslant 1$. Il en est de même de la sphère unité de $\mathbb{C}^m$, car elle est évidemment homéomorphe à S^{2m-1}.

Comme $U(1) = S^1$ est connexe, la proposition 6.3 montre, par récurrence, que $U(n)$ (et, plus généralement, tout $U(E,\phi)$, pour E espace vectoriel complexe) est connexe.

Le même raisonnement ne s'applique pas à $O(n)$ puisque $O(1)$ n'est pas connexe. Mais il s'applique à $SU(n)$ et $SO(n)$, en effet $SU(1)$ et $SO(1)$ sont connexes et, dans la démonstration de 6.3, on peut remplacer $U(E,\phi)$ et $U(E',\phi')$ par $SU(E,\phi)$ et $SU(E',\phi')$.

Donc :

6.5) PROPOSITION.

Pour tout $n \geqslant 1$, *les groupes* $SO(n)$, $U(n)$ *et* $SU(n)$ *sont connexes.*

6.6) COROLLAIRE 1. - *Pour tout* $n \geqslant 1$, *le groupe* $O(n)$ *a deux composantes connexes. Sa composante neutre est* $SO(n)$.

PREUVE. - Soit $O(n)^-$ l'ensemble des $u \in O(n)$ tels que $\det u = -1$. Comme l'application déterminant est continue, la partition :

$$O(n) = SO(n) \cup O(n)^-,$$

est une partition en deux ouverts et fermés disjoints donc $O(n)$ n'est pas connexe. Mais $SO(n)$ est connexe, et si $u_o \in O(n)^-$, on a $O(n)^- = u_o SO(n)$, d'où le résultat.

En utilisant la décomposition d'Iwasawa, on obtient :

6.7) COROLLAIRE 2. - *Les groupes* $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$ *sont connexes, le groupe* $GL(n,\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes.*

(On suppose toujours $n \geqslant 1$).

6.8) Produits semi-directs ; groupe de Poincaré.

Pour qu'un produit semi-direct $G = HN$ soit connexe, il faut et il suffit que H et N soient connexes. Ainsi, le groupe de Poincaré, produit semi-direct de $SL(2,\mathbb{C})$ et de $\mathbb{R}^4$ est connexe.

6.9) Retour sur les groupes de Lorentz.

Nous allons, grâce à des considérations de connexité, préciser divers sous-groupes de $O(1,3)$, ainsi que leur nomenclature.

Tout d'abord, on appellera plus précisément transformation générale de Lorentz toute $u \in O(1,3)$, lui-même appelé groupe de Lorentz général.

A toute matrice $X = (x^i{}_j) \in O(1,3)$ associons le coefficient $x^o{}_o$. La fonction ainsi obtenue est continue sur $O(1,3)$, et on sait (ch. I, fin du § 1.3) qu'elle ne s'annule pas. Elle garde donc un signe constant sur chaque composante connexe de $O(1,3)$; en particulier, sur la composante neutre $O(1,3)_o$, elle a le même signe qu'en I, donc elle est positive.

PROPOSITION. - *L'ensemble des* $X \in O(1,3)$ *telles que* $x_o^o > o$ *forme un sous-groupe de* $O(1,3)$ *appelé groupe de Lorentz complet et dont les éléments sont appelés transformations de Lorentz orthochrones.*

PREUVE. - L'"intérieur" C_o du cône de lumière, défini par l'inéquation : $B(x,x) = (x^o)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 > o$, est stable par toute $X \in O(1,3)$: on a $X(C_o) \subset C_o$, et aussi $X^{-1}(C_o) \subset C_o$, d'où $X(C_o) = C_o$.

D'autre part, on voit facilement que les composante connexes de C_o sont C_o^+ et C_o^-, où C_o^+ est défini par $B(x,x) > o$ et $x^o > o$, et C_o^- par $B(x,x) > o$ et $x^o < o$. Comme toute $X \in O(1,3)$ définit un homéomorphisme, ou bien X respecte les deux composantes connexes, ou bien elle les échange. L'ensemble G^1 des X telles que $X(C_o^+) = C_o^+$ est évidemment un sous-groupe de $O(1,3)$ et, pour que $X \in G^1$, il faut et il suffit que $X(e_o) \in C_o^+$, ce qui est équivalent à $x_o^o > o$.

c.q.f.d.

Remarque : Le nom de transformation "orthochrone" provient de la conservation de C_o^+.

Le groupe de Lorentz complet est, par définition, ouvert donc fermé dans $O(1,3)$. Il en est de même, d'après la continuité du déterminant, de $SO(1,3)$, donc de leur intersection, appelée groupe de Lorentz propre. Ses éléments sont appelés transformations de Lorentz propres, il s'agit donc des $X \in O(1,3)$ telles que $x_o^o > o$ et $\det X = 1$. Notons provisoirement G' ce groupe ; puisqu'il est ouvert et fermé, on a : $O(1,3)_o \subset G'$. Comme $SL(2, \mathbb{C})$ est connexe, son image, notée G'', par l'application $X \mapsto u_X$ est connexe. On a donc :

$$G'' \subset O(1,3)_\circ \subset G'.$$

Nous allons montrer que $G' = G''$. Pour cela, remarquons que le groupe $O(1,1)$ des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$ pour la forme $B(x,y) = x^\circ y^\circ - x^1 y^1$ est l'ensemble des matrices du type $\begin{pmatrix} \varepsilon \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \varepsilon'\varepsilon \mathrm{sh}t & \varepsilon' \mathrm{ch}t \end{pmatrix}$. Ce groupe possède les proriétés suivantes, dont la vérification est laissée au lecteur :

a) sa composante neutre est le groupe $SO_\circ(1,1)$, des $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}$.

b) les orbites dans $\mathbb{R}^2$, pour l'action canonique de $SO_\circ(1,1)$, sont les branches d'hyperboles équilatères d'équations $B(x,x) = k$, où $k \in \mathbb{R} - \{o\}$, le point $\{o\}$, et les 4 demi-droites d'origine o portées par les deux bissectrices.

c) si x et y appartiennent à une même branche de ces hyperboles, il existe une unique $X \in SO_\circ(1,1)$ telle que $X(x) = y$.

On peut identifier $SO_\circ(1,1)$ à un sous-groupe, que nous noterons A', de G', en associant, à toute matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}$, la transformation de Lorentz obtenue en faisant opérer cette matrice dans le plan $(e_\circ, e_3)$ et en laissant fixe le supplémentaire engendré par (e_1, e_2), transformation qui est donc définie par la matrice :

$$Y = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & o & o & \mathrm{sh}t \\ o & 1 & o & o \\ o & o & 1 & o \\ \mathrm{sh}t & o & o & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}.$$

Le groupe A' est un sous-groupe de G'' car on vérifie que la matrice Y ci-dessus est l'image de $\begin{pmatrix} e^{t/2} & o \\ o & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. On sait aussi que le groupe, identifié à $SO(3)$, des rotations autour de $e_\circ$ est inclus dans G'' (cf, Ch. 1).

Soit $Y \in G'$. Soit $Y(e_o) = a = (a^o, \vec{a}) \in O_1^+$, on a $a^o > o$ puisque $Y \in G'$. Il existe $w \in SO(3)$ telle que $w[Y(e_o)] = (a^o, o, o, a'^3) = a'$.

On a $B(a', a') = B(a,a) = 1$ et $a^o > o$ donc e_o et a' appartiennent à une même branche d'hyperbole dans le plan (e_o, e_3). Il existe donc $X \in A'$, unique, telle que $X(e_o) = a'$. Ainsi :

$$w[Y(e_o)] = X(e_o) \quad \text{c.à.d.} \quad X^{-1} w\, Y(e_o) = e_o$$

d'où l'on déduit que $w' = X^{-1} w\, Y$ est une rotation autour de $\mathbb{R}e_o$. On a $Y = w^{-1} X\, w' \in G''$ puisque w, w', X appartiennent à G''. Ainsi, $G' = G''$ c.à.d. :

<u>PROPOSITION</u>. - *La composante neutre du groupe de Lorentz général est le groupe de Lorentz propre. C'est aussi l'ensemble des transformations de Lorentz du type* $x \mapsto X.x$ *où* $X \in SL(2,\mathbb{C})$.

<u>Notation</u> : Conformément aux notations générales, ce groupe est noté $O(1,3)_o = SO(1,3)_o$.

<u>Remarques sur la démonstration</u> : 1) En fait, on a démontré que $G' = SO(3)\, A'SO(3)$ ("décomposition de CARTAN" de G'). Le même raisonnement géométrique donne la "décomposition de CARTAN" de $SL(2,\mathbb{C})$: $SL(2,\mathbb{C}) = KAK$ où $K = SU(2)$ et où A est, comme dans la décomposition d'Iwasawa, l'ensemble des $\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

2) On aurait pu aussi utiliser la décomposition d'Iwasawa pour démontrer que $G' \subset G''$ en vérifiant que si $X = \begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix}$, alors $u_X \in G'$.

3) Soit $a = (a^o, \vec{a}) \in O_1^+$, si $a \neq e_o$, les deux vecteurs a et e_o déterminent un plan ; dans ce plan, les vecteurs e_o et

$e'_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ constituent une base dans laquelle la restriction de B a la forme $x^\circ y^\circ - x^1 y^1$, car $B(e'_1, e'_1) = -1$. Dans ce plan, il existe donc une unique transformation $X' \in SO_\circ(1,1)$ telle que $X'(e_\circ) = a$. En prolongeant X' par l'identité sur l'orthogonal pour B de ce plan, qui est d'ailleurs le plan orthogonal à $\vec{a}$ dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on obtient une transformation de Lorentz propre que nous noterons encore X'. Si l'on définit X et w à partir de a, comme dans la démonstration précédente, on a $w^{-1}Xw = X'$ car $w^{-1}X\,w$ possède les propriétés caractéristiques de X'. L'application $\sigma : O_1^+ \to SO(1,3)_\circ$ qui, à $a \in O_1^+$, associe $\sigma(a) = X' \in SO(1,3)_\circ$ est une section, c-à-d. un inverse à droite, de la surjection $\varphi : s \mapsto s.e_\circ$, de $SO(1,3)_\circ$ sur O_1^+, car $\varphi\circ\sigma(a) = a$. De plus, cette section est continue, ce que l'on peut voir en calculant les coefficients de $\sigma(a) = X'$ ou, plus simplement, en remarquant que <u>localement</u>, on peut choisir w d'une manière unique et continue en fonction de a, tandis que X, lui, est évidemment fonction continue de a'.

On déduit de ceci que l'application de $O_1^+ \times SO(3)$ sur G' définie par $(a,X) \mapsto \sigma(a)X$ est continue (ce qui aurait aussi permis de démontrer la connexité de G'), mais aussi, en notant ψ l'application canonique $SO(1,3)_\circ \to SO(1,3)_\circ/_{SO(3)}$, que $\psi\circ\sigma$ est un inverse continu de la bijection canonique de cet espace homogène sur O_1^+, donc que cette bijection est un homéomorphisme.

Le lecteur pourra vérifier que l'on peut aussi définir une section continue $\sigma' : O_1^+ \to SL(2,\mathbb{C})$, donc remplacer $SO(1,3)_\circ$ par $SL(2,\mathbb{C})$ et $SO(3)$ par $SU(2)$ dans ce qui précède.

<u>Composantes connexes du groupe de Lorentz général.</u>

Considérons les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & o & o & o \\ o & -1 & o & o \\ o & o & -1 & o \\ o & o & o & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & o & o & o \\ o & 1 & o & o \\ o & o & 1 & o \\ o & o & o & 1 \end{pmatrix} .$$

Elles appartiennent toutes deux à $O(1,3)$. La matrice S définit une transformation de Lorentz orthochrone appelée réflexion ou symétrie spatiale, alors que T définit une transformation de Lorentz générale appelée réflexion ou symétrie du temps. Remarquons que $\det S = \det T = -1$. Si l'on considère ST on trouve qu'il s'agit d'une transformation de Lorentz générale, mais avec $\det(ST) = 1$.

Les 4 ensembles ouverts et fermés, sur lesquels $\det X$ et $X^{\circ}{}_{\circ}$ ont tous deux un signe constant, contiennent chacun une et une seule des matrices I, S, T et ST. Ils contiennent donc chacun la composante connexe associée, c-à-d. $SO(1,3)_{\circ}$, $S\,SO(1,3)_{\circ}$, $T SO(1,3)_{\circ}$, $ST\,SO(1,3)_{\circ}$, et il y a en fait égalité, puisque l'on a deux partitions. Ainsi, on a obtenu les 4 composantes connexes de $O(1,3)$.

<u>Isomorphisme entre</u> $SO(1,3)_{\circ}$ et $SL(2,\mathbb{C})/_{(\pm I)}$.

L'application $X \mapsto u_X$, de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $O(1,3)$, a pour image $SO(1,3)_{\circ}$, et pour noyau $(\pm I)$. Il existe donc un isomorphisme de groupes, $\tilde{u}$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} SL(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi"'] & SO(1,3)_{\circ} \\ SL(2,\mathbb{C})/_{(\pm I)} \arrow[ur, "\tilde{u}"'] & \end{tikzcd}$$

où φ désigne l'application canonique. Comme u est continue, $\tilde{u}$ est continue. Comme φ est ouverte, pour que u soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que $\tilde{u}$ soit ouverte, ce qui résulte de la remarque (4.8) car $SL(2,\mathbb{C})$ est dénombrable à l'infini, $SO(1,3)_{\circ}$ localement compact, et on peut faire agir $SL(2,\mathbb{C})$ sur $SO(1,3)_{\circ}$ par $(X,s) \mapsto u_X s$. Alors l'orbite $SO(1,3)_{\circ}$ de e est homéomorphe à $SL(2,\mathbb{C})/_{\mathrm{Ker}u}$ puisque $\mathrm{Ker}u$ est le stabilisateur de e.

-:-:-:-

CHAPITRE III - GÉNÉRALITÉS SUR LES REPRÉSENTATIONS. CARACTÈRES ET DUAL D'UN GROUPE ABÉLIEN.

1 - Représentations de groupes.

1.1) DEFINITION. - *Soit* G *un groupe,* V *un espace vectoriel sur un corps* K *; on appelle représentation de* G *dans* V *tout homomorphisme* π *de* G *dans* GL(V).

En fait, on n'en restera guère à ce degré de généralité. Tout d'abord, dans ce qui suit, on supposera toujours que $K = \mathbb{C}$. Souvent, on supposera de plus que G est un groupe localement compact, et que V est un espace de Banach, ce qui amènera à définir la notion de représentation continue.

Pour toute représentation π, on notera V_π l'espace vectoriel où opèrent les $\pi(s)$.

1.2) DEFINITION. - *Soit* π *une représentation d'un groupe localement compact* G *dans un espace de Banach complexe* V *; on dit que* π *est continue si, pour tout* $x \in G$, $\pi(x)$ *est continu, et si, pour tout* $v \in V$, *l'application* $x \mapsto \pi(x)v$, *de* G *dans* V, *est continue.*

Remarques : 1) Du fait que π est un homomorphisme de groupe, il suffit de vérifier la continuité en e.

2) On peut envisager la continuité de π pour d'autres topologies

que celle considérée ici, (appelée topologie forte). On peut aussi supposer simplement que V est un espace localement convexe (cf. Bourbaki, intégration, ch. VIII, § 2). Si G est un groupe de Lie, on peut imposer à π des conditions de différentiabilité (cf. WARNER : Harmonic analysis ou semi-simple Lie groups I ; séminaire BOURBAKI, Nov. 74, exposé 454).

3) Lorsque V est de dimension finie, il n'existe qu'une seule topologie sur $\mathscr{L}(V)$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel, elle coïncide donc avec la topologie forte. Une représentation continue de G dans V est alors simplement un homomorphisme de groupes continu : $G \to GL(V)$ où $GL(V)$ est muni de sa topologie habituelle. Dans ce cas, on sait que la continuité de π équivaut à la propriété suivante :

Pour tout $v \in V$ et tout $v' \in V^*$, où V^* désigne le dual de V, la fonction $G \to \mathbb{C} : s \mapsto \langle \pi(s)v, v' \rangle$ est continue.

1.3) On dit que π est <u>unitaire</u> si V est un espace de Hilbert complexe et si, pour tout $x \in G$, $\pi(x)$ est unitaire. Dans ce cas, la continuité équivaut à :

Pour tout $(v,v') \in V \times V$, la fonction complexe $s \mapsto \langle \pi(s)v | v' \rangle$ est continue.

1.4) <u>DEFINITION</u>. - (notations et hypothèses de 1.1). *Supposons* V *de dimension finie ; on appelle coefficient de la représentation* π *("matrix element" en anglais), toute fonction complexe sur* G *du type* $s \mapsto \langle \pi(s)v, v' \rangle$ *où* $v \in V$ *et* $v' \in V^*$.

Quand V est de dimension finie et G localement compact, la continuité de π équivaut donc à celle de ses coefficients.

1.5) DEFINITION. - *Soit* π *une représentation d'un groupe localement compact* G *dans un espace de Banach* V. *On appelle coefficients de* π *les fonctions du type* $s \mapsto \langle \pi(s)v, v' \rangle$, *où* $v \in V$, *et où* v' *appartient au dual topologique* V' *de* V.

Ainsi, si π est continue, ses coefficients sont continus. La réciproque est exacte quand V est un espace de Hilbert et π est unitaire.

1.6) La dimension de π est, par définition, celle de V. Pour les groupes compacts, en particulier pour les groupes finis, les représentations de dimension finie jouent un rôle fondamental. Dans le cas des groupes abéliens localement compacts, ce sont même les représentations de dimension 1 qui jouent un rôle fondamental.

1.7) La donnée d'une représentation de G dans V définit sur V une structure de G-module c.à.d. que l'application :

$$G \times V \to V : (s,v) \mapsto s.v = \pi(s)v,$$

vérifie : $$\begin{cases} 1.v = v, & s(s'.v) = (ss').v \quad (s \in G,\ s' \in G,\ v \in V) ; \\ s.(v+v') = s.v + s.v', & s.(\lambda v) = \lambda(s.v) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

Ainsi, les données suivantes sont équivalentes :

-) une représentation de G dans V,

-) une structure de G-module sur V,

-) une action à gauche linéaire de G dans V.

1.8) Exemples : 1) L'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^4$, étant linéaire, définit sur $\mathbb{R}^4$

une structure de $SL(2,\mathbb{C})$-module, donc une représentation. La notation $(X,x) \mapsto X.x$ correspond à la notion de $SL(2,\mathbb{C})$-module, alors que la représentation associée est $X \mapsto u_X$. Plus généralement, la donnée d'une représentation de G dans V permet toujours la définition d'un produit semi-direct, $V \circledS G$, par la formule :

$$(v,s)(v',s') = (v + \pi(s)v', ss') = (v + s.v', ss').$$

2) D'une manière générale, supposons que G opère à gauche sur un ensemble X, par $(s,x) \mapsto s.x$. Alors, si $V = \mathbb{C}^X$, on obtient une représentation γ, de G dans V, "par translations", en posant :

$$[\gamma(s)f](x) = f(s^{-1}.x).$$

Cette représentation est de dimension finie si X est fini. Si X est infini, et G localement compact, on remplacera souvent V par un sous-espace stable par translations, tel qu'on puisse le munir d'une structure de Banach pour laquelle γ devienne continue.

3) En particulier, on peut prendre pour X le groupe G lui-même, qui opère à gauche par $(s,x) \mapsto s\,x$ (translations à gauche), et par $(s,x) \mapsto xs^{-1}$ (translations à droite). On obtient ainsi des représentations continues, notées π_p, de G dans les espaces de Banach $L^p(G)$ relatifs à la mesure de Haar du groupe (cf. ch. 5), à condition que ce dernier soit localement compact. On peut également choisir $X = G/_H$, où H est un sous-groupe fermé de G, lorsque G est localement compact.

4) Lorsque G est un sous-groupe de $GL(n,K)$ (où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), il opère à gauche de manière évidente sur K^n ; on obtient ainsi, outre cette repré-

sentation identique, qui n'est complexe que lorsque $K = \mathbb{C}$, des représentations de G dans des espaces de fonctions de n variables, qui jouent un rôle important (en particulier si G est compact). On trouvera un exemple de ces méthodes dans GELFAND, GRAEV, VILENKIN, "generalized functions", tome 5, où l'on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$.

5) Reprenons les hypothèses et notations de l'exemple 2. Il arrive souvent que G opère par translations sur un espace de Banach $V \subset \mathbb{C}^X$, mais que la représentation ainsi définie ne soit pas continue, ou même que les $\gamma(s)$ ne soient pas des opérateurs bornés. On peut souvent améliorer la situation en introduisant un "multiplicateur", c.à.d. une application $m : G \times X \to X$, telle que la formule

$$[\pi(s)f](x) = m(s,x)\ f(s^{-1}x)$$

définisse une représentation de G dans V, possédant les propriétés désirées. Remarquons que, pour que la formule ci-dessus définisse une représentation, il suffit que m satisfasse à l'identité:

1.9) $\quad m(s's,x) = m(s',x)m(s,s'^{-1}.x)$.

Une solution de cette équation s'obtient en posant $m(s,x) = \dfrac{\rho(s^{-1}x)}{\rho(x)}$, où ρ est une application quelconque : $X \to \mathbb{C} - \{o\}$.

On peut aussi prendre $m(s,x) = \alpha(s)$, où α est un homomorphisme de groupes : $G \to \mathbb{C} - \{o\}$.

La théorie des "représentations induites" permettra de systématiser ce procédé.

2 - Entrelacements et représentations irréductibles.

2.1) DEFINITION. - *Soit* V *et* V' *deux* G-*modules. Un morphisme* u *(plus précisément un* G-*morphisme) de* V *dans* V' *, est une application linéaire de* V *dans* V' *telle que l'on ait, pour tout* $s \in G$ *et tout* $v \in V$ *:*

$$u(s.v) = s.u(v).$$

En terme des représentations π et π' associées, ceci signifie que l'on a, pour tout $s \in G$:

2.2) $\quad u \circ \pi(s) = \pi'(s) \circ u$

c.à.d. que le diagramme si-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{u} & V' \\ {\scriptstyle \pi(s)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'(s)} \\ V & \xrightarrow{u} & V' \end{array}$$

On dit aussi que u est un entrelacement de π et π' ou que u entrelace π et π'. L'ensemble de ces morphismes est noté $\mathrm{Hom}_G(V,V')$. Un isomorphisme de G-modules est un isomorphisme d'espaces vectoriels tel que u et u^{-1} soient des G-morphismes. Il suffit pour cela que u soit une bijection linéaire de V sur V', vérifiant 2.2).

Lorsque deux G-modules V et V' sont isomorphes, les représentations correspondantes sont dites équivalentes. Les véritables objets de la théorie sont en fait les classes de G-modules isomorphes (ou de représentations équivalentes).

Sous G-modules ; sous-représentations.

2.3) DEFINITION. - *Soit* V *et* M *deux* G-*modules,* π *et* ρ *les représentations associées. On dit que* M *est un sous* G-*module de* V *si :*

a) M *est un sous-espace vectoriel de* V.

b) M *est stable par tous les* $\pi(s)$ *et, pour tout* $v \in M$ *on a*

$$\rho(s)v = \pi(s)v.$$

Autrement dit, M est un sous-espace vectoriel G-stable de V, et la structure de G-module de M est induite par celle de V. On dit que ρ est une sous-représentation de π.

Exemple : si $u \in \mathrm{Hom}_G(V,V')$, les sous-espaces $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ définissent des sous G-modules, respectivement de V et de V'.

Lorsque M est un sous G-module de V, l'espace vectoriel quotient $V/_M$ est canoniquement muni d'une structure de G-module : il suffit de poser $s.(x+M) = sx + M$.

On dit qu'une représentation π' est contenue dans une représentation π, si π' est équivalente à une sous-représentation de π.

G-modules simples - représentations irréductibles.

2.4) DEFINITION. - *On dit qu'un* G-*module* V *est simple si* $V \neq \{o\}$, *et si les seuls sous* G-*modules de* V *sont* $\{o\}$ *et* V. *La représentation correspondante est également dite simple (ou irréductible).*

<u>Exemples</u> : 1) Soit V un G-module trivial, i.e. tel que pour tout $(s,x) \in G \times V$, $s.x = x$. Alors, V est simple ssi il est de dimension 1.

2) Tout G-module de dimension 1 est simple.

3) La représentation identique de $GL(n,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$ est irréductible car, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, l'orbite de v est $\mathbb{C}^n$.
Il en est de même de la restriction de cette représentation à $U(n)$ ou à $SU(n)$.
Par contre, la restriction de la représentation identique de $GL(3,\mathbb{C})$ au sous groupe de $U(3)$ stabilisateur d'un vecteur fixe, n'est évidemment pas irréductible.

<u>Opérations sur les représentations et les G-modules</u>.

Soit V et M deux G-modules, π et ρ les représentations associées.

2.5) <u>DEFINITION</u>. - 1) *On appelle somme directe de* V *et* M *et on note* $V \oplus M$ *le G-module défini sur l'espace vectoriel somme directe* $V \oplus M$ *par la formule :* $s.(v+m) = s.v + s.m$.

2) *On appelle produit tensoriel de* V *et* M *et on note* $V \otimes M$, *le G-module défini sur le produit tensoriel* $V \otimes M$ *par la formule :* $s.(v \otimes m) = sv \otimes sm$.

Les représentations correspondantes sont appelées <u>somme directe et produit tensoriel</u> de π et ρ et notées $\pi \oplus \rho$ et $\pi \otimes \rho$.

Bien entendu, la première définition s'étend à une famille quelconque $V_i (i \in I)$ de G-modules.

G-modules semi-simples.

2.6) DEFINITION. - *On dit qu'un G-module est semi-simple ou complètement réductible s'il est somme directe de sous G-modules simples.*

Lemme de Schur (dimension finie) et conséquences.

2.7) PROPOSITION. - *Soit V et M deux G-modules simples de dimension finie sur le corps* $\mathbb{C}$ *; alors, tout G-morphisme* $u : V \to M$ *, non nul, est un isomorphisme. Lorsque* $V = M$*, c'est une homothétie.*

Démonstration : Puisque u n'est pas nul, Ker u est un sous G-module de V différent de V, donc Ker u = {o}. De même, Im u est un sous G-module de M différent de {o}, donc Im u = M et u est un isomorphisme.

Lorsque V = M, remarquons que, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, u admet au moins une valeur propre λ. Or $u - \lambda I$ est encore un G-morphisme $V \to V$ tel que $\mathrm{Ker}\,\{u - \lambda I\} \neq \{o\}$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(u - \lambda I) = V$, donc $u = \lambda I$.

c.q.f.d.

Conséquences du lemme de Schur.

a) Si V et M sont deux G-modules de dimension finie, appelons nombre d'entrelacements de V et M, la dimension de $\mathrm{Hom}_G(V,M)$. (Attention, cette notion n'est pas symétrique en V et M). Alors, si V et M sont simples, on voit que si le nombre d'entrelacements de V et M n'est pas nul, ils sont isomorphes.

b) Soit V un G-module, et π la représentation associée. $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ est le commutant de $\pi(G)$ dans $\mathcal{L}(V)$. Si U est simple, ce commutant est donc réduit aux scalaires ; ainsi, $\dim \mathrm{Hom}_G(V,V) = 1$.

c) Si M et V sont simples, $\dim \mathrm{Hom}_G(V,M) = 0$ ou 1. En effet, si $\dim \mathrm{Hom}_G(V,M) > o$, d'après a), il existe un isomorphisme $u : V \to M$. L'application $f \mapsto u^{-1}f$ définit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels : $\mathrm{Hom}_G(V,M) \to \mathrm{Hom}_G(V,V)$, d'où le résultat.

3 - Cas des représentations unitaires continues.

Les définitions relatives aux représentations unitaires continues d'un groupe localement compact, s'obtiennent à partir des définitions générales, en "tenant compte" des structures topologiques sur G et V. Le but de ces définitions est de ne jamais sortir du cadre des représentations unitaires continues (en abrégé r.u.c.). C'est ainsi que :

3.1) Un morphisme u d'une r.u.c. π, dans une autre π' appelé aussi entrelacement, est un entrelacement au sens déjà défini, mais qui est de plus continu.

3.2) On dit que deux r.u.c. π et π' sont unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire (c.à.d. une isométrie) de l'espace V de π sur l'espace V' de π' qui est un entrelacement.

3.3) Notons que la définition 3.1), et la théorie des catégories, nous amènent à dire que π est isomorphe à π' s'il existe une bijection linéaire $u : V \to V'$, continue ainsi que u^{-1}, qui est un entrelacement de π et π'.

En fait, cette notion coïncide avec celle d'équivalence unitaire. On le démontre en utilisant la décomposition polaire d'un opérateur continu entre deux espaces de Hilbert : lorsqu'un tel opérateur est, comme ici, injectif et à image dense, cette décomposition s'écrit $u = u_1 v$, où u_1 est une isométrie de V sur V', et v un opérateur hermitien positif : $V \to V$, qui n'est autre que la racine carrée de $u^* u$. On montre alors que, si u entrelace π et π', il en est de même de u_1. Ainsi, il suffit même qu'il existe un entrelacement de π avec π' à image dense, pour que π et π' soient unitairement équivalentes.

Dans la suite, lorsqu'il s'agit de r.u.c., on dira simplement "équivalentes" au lieu de "unitairement équivalentes". Ici encore, les véritables objets de la théorie sont les classes de représentations équivalentes.

3.4) On définit une <u>sous-représentation</u> ρ d'une r.u.c. π comme en 2.3, mais en se limitant aux sous-espaces fermés. Ainsi, ρ est aussi une r.u.c..

Notons que, si M est un sous-espace invariant de l'espace V d'une r.u.c. π, non nécessairement fermé, il en est de même de son adhérence $\overline{M}$, et de son orthogonal $M^{\perp}$.

Par exemple, si u est un entrelacement de deux r.u.c., $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u$, $\overline{\operatorname{Im} u}$, $\operatorname{Im} u^{\perp}$, sont des sous-espaces invariants ; $\operatorname{Ker} u$, $\overline{\operatorname{Im} u}$ et $\operatorname{Im} u^{\perp}$ sont de plus fermés.

Si π est équivalente à une sous-représentation de π', on dira, là encore, que <u>π est contenue dans π'</u>.

3.5) On dit qu'une r.u.c. π est <u>irréductible</u>, si $V_\pi \neq \{o\}$ et si les seuls sous-espaces fermés invariants de V_π sont $\{o\}$ et V_π. Ainsi, π n'admet pas d'autre sous-représentation qu'elle-même et la représentation d'espace nul.

Le lemme de Schur se généralise sous la forme suivante : soit u un entrelacement non nul de deux r.u.c. irréductibles π et π'. On voit, comme dans le cas de dimension finie que $\mathrm{Ker}\, u = \{o\}$ et que $\mathrm{Im}\, u$ est dense dans l'espace de π', ce qui entraîne que π et π' sont équivalentes. Lorsque $\pi = \pi'$, on démontre que u est nécessairement une homothétie, c.à.d. que le commutant de $\pi(G)$, dans l'espace des opérateurs bornés de l'espace de π, est réduit aux scalaires. Réciproquement, si cette condition est réalisée, π est irréductible ; en effet, si π n'est pas irréductible, elle admet un sous-espace fermé invariant V, différent de $\{o\}$ et de V_π. Comme π est unitaire, $V^\perp$ a les mêmes propriétés que V ; il en résulte que le projecteur orthogonal sur V commute à $\pi(G)$, et n'est pas une homothétie.

Remarquons que la réciproque utilise le fait que π est unitaire ; elle est donc fausse dans un cadre autre que celui des r.u.c..

Lorsqu'on considère V_π comme un G-module, la notion définie ci-dessus est appelée irréductibilité topologique ; c'est une propriété plus faible que l'irréductibilité définie en 2.4).

En résumé :

3.6) <u>PROPOSITION</u>. - *1) Pour qu'une représentation unitaire continue d'une groupe localement compact* G *soit irréductible, il faut et il suffit que le commutant de* $\pi(G)$*, dans l'espace des opérateurs bornés de* V_π*, soit réduit aux scalaires.*

2) Si π *et* π' *sont deux représentations unitaires continues irréductibles non équivalentes, il n'existe aucun entrelacement non nul de* π *et* π'*. Sinon, l'espace des entrelacements est de dimension 1.*

3.6) Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une famille de r.u.c., d'un groupe localement compact G, dans des espaces de Hilbert V_i. On appelle somme hilbertienne des π_i, et on note $\underset{i \in I}{\oplus} \pi_i$, la représentation π, dont l'espace est la somme hilbertienne $\underset{i \in I}{\oplus} V_i$, et qui est définie par :

$$\pi(s)\,[(\xi_i)] = (\pi_i(s)\xi_i), \quad (\text{où} \quad \xi_i \in V_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} |\xi_i|^2 < +\infty).$$

Cette définition est justifiée, car on a :

$$|\pi_i(s)\xi_i| = |\xi_i|, \quad \text{donc} \quad \sum_{i \in I} |\xi_i(s)\xi_i|^2 = \Sigma\, |\xi_i|^2 < +\infty,$$

ce qui montre à la fois, que $(\pi_i(s)\xi_i) \in \underset{i \in I}{\oplus} V_i$, et que $|(\pi_i(s)\xi_i)| = |(\xi_i)|$, donc que $\pi(s)$ est unitaire.

Lorsque toutes les π_i sont égales à une même représentation π, et si card $I = c$, la représentation $\underset{i \in I}{\oplus} \pi$, se note $c\pi$.

Exemple : Si ρ est une sous-représentation de π, et ρ' la sous-représentation définie par $V_\rho^\perp$, π est équivalente à $\rho \oplus \rho'$.

4 - Application aux groupes abéliens : caractères, groupe dual.

4.1) D'après la proposition 3.6, si G est un groupe topologique abélien, toute r.u.c. π est de dimension 1. En effet, dans ce cas, on a, pour tout $(s,t) \in G \times G$:

$$\pi(s)\pi(t) = \pi(st) = \pi(ts) = \pi(t)\,\pi(s) ;$$

donc tous les $\pi(s)$ sont des homothéties. Tous les sous-espaces vectoriels fermés de V_π sont donc stables par π. Ainsi, π ne peut être irréductible que si V est de dimension 1. Dans ce cas, soit $\chi(s)$ le rapport de l'homothétie $\pi(s)$. Du fait que π est une représentation, on déduit que χ est un homomorphisme de groupes $G \to \mathbb{C} - \{o\}$; du fait que π est unitaire, on déduit que $|\chi(s)| = 1$; du fait que π est continue, on déduit que χ est continue.

Ainsi, χ est un homomorphisme continu $G \to \mathbb{U}$ (où $\mathbb{U}$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1), ce que l'on appelle, par définition, un caractère de G. Réciproquement, tout caractère de G définit une r.u.c. irréductible de G, et deux telles représentations sont équivalentes ssi elles sont définies par le même caractère.

L'ensemble des caractères de G, que l'on note $\overset{\times}{G}$, est donc en bijection avec l'ensemble des classes de r.u.c. irréductibles de G. Il est muni d'une structure de groupe abélien, déduite de celle de $\mathbb{U}$, définie par la loi :

$$(\chi,\chi') \mapsto \chi\chi' \quad \text{où} \quad \chi\chi'(s) = \chi(s)\chi'(s).$$

Lorsque G est localement compact, le groupe ainsi défini est appelé dual de G, et noté $\hat{G}$. Il devient un groupe localement compact lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence compacte sur G, et l'on a alors $\hat{\hat{G}} = G$, c.à.d. que tout caractère de $\hat{G}$ est de la forme :

$$\chi \mapsto \chi(x) \quad \text{où} \quad x \in G,$$

et que la topologie de G est celle de la convergence compacte sur $\hat{G}$. L'étude de ce cas constitue l'analyse harmonique abélienne.

Notation : Soit $s \in G$ et $\hat{x} \in \hat{G}$, on notera $<s,\hat{x}>$ la valeur prise en s par le caractère $\hat{x}$; c'est donc aussi la valeur prise en $\hat{x}$ par le caractère de $\hat{G}$ défini par s.

4.2) Exemples :

1) Soit $G = \mathbb{R}$. Alors, tout homomorphisme continu $\chi : R \to \mathbb{C} - \{o\}$, est dérivable. Ceci provient du fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C} - \{o\}$ sont des groupes de Lie, et se démontre directement de la façon suivante :

Soit $h(x) = \int_o^x \chi(t)\, dt$. On a $h' = \chi$, donc $h \neq o$.

Soit x_o tel que $h(x_o) \neq 0$, on a :

$$\int_x^{x+x_o} \chi(t)\, dt = \int_o^{x_o} \chi(x+t)dt = \chi(x) \int_o^{x_o} \chi(t)dt = h(x_o)\, \chi(x)$$

donc, $\chi(x) = h(x_o)^{-1} \int_x^{x_o+x} \chi(t)dt$ est dérivable. En dérivant, par rapport à t, l'égalité :

$$\chi(x+t) = \chi(x)\chi(t),$$

On obtient : $\chi'(x+t) = \chi(x)\chi'(t)$;

d'où : $\chi'(x) = \chi(x)\chi'(o)$.

Soit $\chi'(o) = a \in \mathbb{C}$, la solution générale de cette équation est $\chi(x) = Ae^{ax}$, qui est un homomorphisme de groupes ssi $A = 1$. Cet homomorphisme est unitaire ssi $a \in i\,\mathbb{R}$. Le groupe $\hat{\mathbb{R}}$ est donc l'ensemble des $\chi_\lambda : x \mapsto e^{i\lambda x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. La bijection $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ est en fait un isomorphisme de groupes ; on démontre de plus qu'il s'agit d'un homéomorphisme, qui permet donc d'identifier $\mathbb{R}$ à $\hat{\mathbb{R}}$.

2) Soit $G = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$. Tout caractère χ de G définit, par composition avec l'application canonique $x \mapsto \dot{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, un caractère de $\mathbb{R}$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\chi(\dot{x}) = e^{i\lambda x} = \chi_\lambda(x)$$

et la condition $\mathrm{Ker}\chi_\lambda \supset \mathbb{Z}$ équivaut à $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$, ainsi :

$$\chi(\dot{x}) = e^{2i\pi kx} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la formule précédente définit un caractère de G. La bijection ainsi définie est, ici encore, un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbb{Z}$ sur $\hat{G}$ (c.à.d. que $\hat{G}$ est discret). On obtient donc, par identification $\widehat{R/_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$.

Remarque : On montre plus généralement que $\hat{G}$ est toujours discret lorsque G est compact, et de même, que $\hat{G}$ est compact si G est discret.

3) Soit $G = \mathbb{Z}$. Soit χ un caractère de $\mathbb{Z}$. Soit $\chi(1) = a \in \mathbb{U}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\chi(n) = a^n.$$

On en déduit, ici encore, que l'application $\chi \mapsto \chi(1)$ est un isomorphisme de groupes $\hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{U}$, dont on peut démontrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme. En remarquant que tout $a \in \mathbb{U}$ s'écrit $e^{2i\pi x}$, où la classe de x dans $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ est bien déterminée, on voit que, comme prévu, $\hat{\mathbb{Z}} = \hat{\hat{\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}}}$ s'identifie à $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$.

4.3) Cas d'un produit, d'un quotient.

THEOREME. - *Le groupe dual du produit direct de deux groupes abélien localement compacts G_1 et G_2, est isomorphe et homéomorphe au produit des duals* *des facteurs.*

Preuve. - Pour tout $(\gamma_1, \gamma_2) \in \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$, on définit le caractère, noté $\gamma_1 \times \gamma_2$, de $G_1 \times G_2$ par $(\gamma_1 \times \gamma_2)(s_1,s_2) = \gamma_1(s_1)\ \gamma_2(s_2)$. On définit ainsi un homomorphisme de $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ dans $\widehat{G_1 \times G_2}$.

Réciproquement, si $\gamma \in \widehat{G_1 \times G_2}$, on peut lui associer le couple (γ_1,γ_2) de ses restrictions à G_1 et G_2, on définit ainsi un homomorphisme inverse du précédent. On déduit immédiatement de la définition de la topologie sur $\hat{G}_1$ et $\hat{G}_2$, que l'isomorphisme ainsi défini est un homéomorphisme.

c.q.f.d.

Exemples : a) Soit $G = \mathbb{R}^n$; notons $<x|y>$ le produit scalaire canonique. Alors, d'après 4.2, exemple 1, et le théorème ci-dessus, $\widehat{\mathbb{R}^n}$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$<x,y> = e^{i<x|y>} \qquad (x \in R^n, \quad y \in R^n).$$

b) Soit G le groupe additif d'un espace vectoriel de dimension finie E sur $\mathbb{R}$. En utilisant a), après choix d'une base, on voit que $\hat{G}$ s'identifie au dual E^* par :

$$<x,y> = e^{i(x,y)} \qquad (x \in E, \quad y \in E^*) ;$$

où (x,y) désigne le crochet de dualité (E,E^*).

En particulier, si E est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée, on peut identifier $\hat{G}$ à E par :

$$<x,y> = e^{i(x,\ell(y))} = e^{iB(x,y)} \qquad (x \in E, \quad y \in E).$$

En appliquant ceci à l'espace de Minkowski, on obtient une identification de $\widehat{\mathbb{R}^4}$ à $\mathbb{R}^4$, différente de celle définie en a), et plus utile.

c) Soit $G = \mathbb{C}$ (additif). D'après a), $\hat{G}$ s'identifie à $\mathbb{C}$ par

$$<z,z'> = e^{iRe(z\bar{z}')} \quad (z \in \mathbb{C},\ z' \in \mathbb{C}).$$

En généralisant l'étude faite dans le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, on peut démontrer :

<u>THEOREME</u>. *Soient* G *un groupe abélien localement compact, et* H *un sous-groupe fermé de* G. *Le groupe dual de* $G/_H$ *est isomorphe et homéomorphe au sous-groupe de* $\hat{G}$ *formé des caractères de* G *dont le noyau contient* H.

<u>Preuve</u>. - Laissée au lecteur. Pour la bicontinuité, il est nécessaire de prouver d'abord le lemme suivant :

<u>LEMME</u>. - *Soit* G *un groupe localement compact,* H *un sous-groupe fermé de* G, *et* φ *l'application canonique* $G \to G/_H$. *Tout compact de* $G/_H$ *est de la forme* $\varphi(K)$, *où* K *est un compact de* G.

-:-:-:-:-

Chapitre IV - Représentations irréductibles de SU(2) et SO(3).

1 - Introduction.

On peut démontrer que toute représentation unitaire continue (r.u.c.) d'un groupe compact est somme hilbertienne de r.u.c. irréductibles, ce qui est faux pour un groupe localement compact. On montre également que toute r.u.c. irréductible d'un groupe compact est de dimension finie, ce qui est également faux en général pour un groupe localement compact non abélien. On prouvera enfin, au chapitre 5, que si π est une représentation de dimension finie, continue, d'une groupe compact G, il existe un produit scalaire sur V_π faisant de π une r.u.c..

Remarquons alors que, si π est une r.u.c. de dimension finie, comme tous les sous-espaces V' de V_π, étant de dimension finie, sont fermés (car, par choix d'une base convenable, V_π est isomorphe à R^n, et V' à $R^m \times \{o\}$, avec $m \leqslant n$), la notion d'irréductibilité topologique coïncide avec la notion algébrique d'irréductibilité ; il en est d'ailleurs de même pour la notion de sous-représentation.

Ainsi, dans le cas d'un groupe compact, l'étude des r.u.c. se ramène, en gros, à celle des représentations continues irréductibles de dimension finie. Ce chapitre est consacré à la construction d'une famille de représentations de dimension finie de SU(2), dont on peut montrer, au moyen de l'étude des représentations infinitésimales associées, qu'elles sont toutes irréductibles, et qu'elles constituent, à équivalence près, la liste complète des représentations continues irréductibles de SU(2).

L'idée de la construction est la suivante : on connait déjà, outre la représentation triviale ω_o, de dimension 1, une représentation irréductible ω_1, de SU(2) : la représentation identique dans $\mathbb{C}^2$. Celle-ci est irréductible car, si $v \in \mathbb{C}^2 - \{o\}$, l'orbite de v, à savoir la sphère de centre 0 et de rayon $|v|$, engendre $\mathbb{C}^2$; ainsi, tout sous-espace invariant contenant v est égal à $\mathbb{C}^2$. Notons π_r la représentation $\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_1$ (r facteurs). Cette représentation n'est pas irréductible, mais sa restriction au sous-espace stable des tenseurs symétriques le sera.

2 - Rappel sur les tenseurs symétriques.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, sur un corps commutatif K de caractéristique o, et soit $T^r(E) = E \otimes \ldots \otimes E$ (r facteurs). Nous allons faire de $T^r(E)$ sur S_r-module, où S_r désigne le groupe symétrique d'ordre r, de la manière suivante : pour tout $\sigma \in S_r$, l'application :

$$(x_1,\ldots,x_r) \to x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes x_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)},$$

de E^r dans $T^r(E)$, étant multilinéaire, se factorise donc en une application linéaire de $T^r(E)$ dans lui-même : $z \mapsto \sigma.z$, telle que, quand z est décomposable : $z = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, on ait $\sigma.z = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)}$. Cette dernière formule permet de vérifier que, si $\sigma' \in S_r$, on a $\sigma'.(\sigma z) = (\sigma'\sigma)z$, donc que $T^r(E)$ est effectivement un S_r-module à gauche.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, nous noterons $T^r(u) \in \mathscr{L}(T^r(E))$, l'application $u \otimes \ldots \otimes u$ (r facteurs) définie par :

$$T^r(u)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = u(x_1) \otimes \ldots \otimes u(x_r).$$

2.1) PROPOSITION. - *Pour toute* $u \in \mathscr{L}(E)$, *l'application* $T^r(u)$ *est un* S_r*-morphisme : pour tout* $\sigma \in S_r$, *et tout* $z \in T^r(E)$, *on a :*

$$T^r(u)[\sigma.z] = \sigma.T^r(u)[z].$$

Preuve. - Si $z = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, on a en effet :

$$T^r(u)\,[\sigma.z] = T^r(u)[x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)}] = u[x_{\sigma^{-1}(1)}] \otimes \ldots \otimes u[x_{\sigma^{-1}(r)}]$$

$$= \sigma.[u(x_1) \otimes \ldots \otimes u(x_r)] = \sigma.T^r(u)[z].$$

c.q.f.d.

2.2) DEFINITION. - *On dit que* $z \in T^r(E)$ *est symétrique si, pour tout* $\sigma \in S_r$, *on a* $\sigma.z = z$.

Nous noterons $s_r(E)$ l'ensemble des éléments symétriques de $T^r(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de $T^r(E)$. Pour tout $z \in T^r(E)$, soit :

$$s(z) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma.z.$$

Alors $s \circ s = s$, c-à-d que s est un projecteur de $T^r(E)$, dont l'image est $s_r(E)$ car $\operatorname{Im} s \subset s_r(E)$ et $s(z) = z$ si $z \in s_r(E)$.

Remarquons que s commute aux $T^r(u)$, en effet, les $T^r(u)$ étant des S_r-morphismes appartiennent au commutant des $z \mapsto \sigma.z$, donc au commutant de l'espace vectoriel engendré, espace vectoriel qui contient s. On en déduit les relations :

2.3) $s \circ T^r(u) = T^r(u) \circ s$ et $(id - s) \circ T^r(u) = T^r(u) \circ (id - s)$ qui montrent que $s_r(E) = \operatorname{Im} s$ et $\operatorname{Ker} s$ sont stables par les $T_r(u)$ (c-à-d. que ce sont, par définition, des espaces tensoriels).

Nous allons montrer maintenant que $s_r(E)$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à l'espace $K_r[X_1,\ldots, X_n]$ des polynômes homogènes de degré r, à n indéterminées, où n désigne la dimension de E.

Pour cela, soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit $(x_1,\ldots,x_r) \in E^r$, avec $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. L'application :

$$(x_1,\ldots,x_r) \mapsto \prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, X_i \right),$$

de E^r dans $K_r[X_1,\ldots,X_n]$, est multilinéaire, donc se factorise en une application linéaire $\varphi : T^r(E) \to K_r[X_1,\ldots, X_n]$. Cette application est "symétrique", c.à.d. que, pour tout $\sigma \in S_r$, et tout $z \in T^r(E)$, on a :

$$\varphi(\sigma.z) = \varphi(z) \;;$$

(ceci résulte de la commutativité de $K_r[X_1,\ldots, X_n]$, et de la définition de φ). On en déduit que :

$$\varphi(s.z) = \varphi(z).$$

Autrement dit, si $\tilde{\varphi}$ désigne la restriction de φ à $s_r(E)$, on a $\varphi = \tilde{\varphi} \circ s$.

On sait que la famille des $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}$, où $(i_1,\ldots,i_r)$ est une suite de r nombres pris parmi $\{1,2,\ldots. n\}$, est une base de $T^r(E)$. Or, $\varphi(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}) = X_{i_1} \ldots X_{i_r}$, ce qui prouve que φ, donc $\tilde{\varphi}$, est surjective.

L'<u>ensemble</u> des $s(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes i_r)$ est un système de générateurs de $s(T^r(E)) = s_r(E)$. Or, du fait que les $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}$ sont indépendants, on a

$$s(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) = s(e_{i'_1} \otimes \dots \otimes e_{i'_r}),$$

ssi il existe $\sigma \in S_r$ tel que $\sigma(i_1) = i'_1 \dots \sigma(i_r) = i'_r$, c-à-d. ssi $\varphi(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) = \varphi(e_{i'_1} \otimes \dots \otimes e_{i'_r})$, ou encore, $X_{i_1} \dots X_{i_r} = X_{i'_1} \dots X_{i'_r}$.

Ainsi, l'<u>ensemble</u> des $s(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$ est appliqué, par $\tilde{\varphi}$, sur l'<u>ensemble</u> des $X_{i_1} \dots X_{i_r}$, qui est libre. Ceci montre que l'ensemble des $s(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$ constitue une base de $s_r(E)$, et que $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme.

3 - <u>Représentations irréductibles de SU(2).</u>

3.1) La représentation π_r de $SU(2)$, dans $T^r(\mathbb{C}^2)$, a été définie par :

$$\pi_r(g) = T^r(\omega_1(g)) \quad (\text{où } g \in SU(2)).$$

D'après le § 2, le sous-espace des tenseurs symétriques d'ordre r, $s_r(\mathbb{C}^2)$, est donc stable par tous les $\pi_r(g)$. Grâce à l'isomorphisme $\tilde{\varphi}$, la sous-représentation π'_r, de π_r, correspondante, est équivalente à une représentation π''_r de $SU(2)$ dans $\mathbb{C}_r[X_1,X_2]$, définie par transport de structure au moyen de $\tilde{\varphi}$. Ainsi, $\tilde{\varphi}$ entrelace π'_r et π''_r, et comme s, d'après (2.3), entrelace π_r et π''_r, il en résulte que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ s$ entrelace π_r et π''_r. On a donc, pour tout $g \in SU(2)$:

$$\pi''_r(g) \circ \varphi = \varphi \circ \pi_r(g).$$

Ceci détermine $\pi''_r(g)$: soit (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$, on a $X_1^h X_2^{r-h} = \varphi\,[e_1 \otimes \dots \otimes e_1 \otimes e_2 \dots \otimes e_2]$ (où h facteurs sont égaux à e_1 et $r-h$ à e_2). Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, on a donc :

$$\pi'_r\,(g)[X_1^h\, X_2^{r-h}] = \varphi[\omega_1(g)e_1 \otimes \ldots \otimes \omega_1(g)e_1 \otimes \omega_1(g)e_2 \otimes \ldots \otimes \omega_1(g)e_2]$$

avec $\omega_1(g)e_1 = ae_1 - \overline{b}e_2$ et $\omega_2(g)e_2 = be_1 + \overline{a}e_2$, d'où

$$\pi'_r(g)[X_1^h\, X_2^{r-h}] = (aX_1 - \overline{b}X_2)^h\,(bX_1 + \overline{a}X_2)^{r-h}\,,$$

et, plus généralement : $\pi'_r\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\right][P] = P\,[aX_1 - \overline{b}X_2,\ bX_1 + \overline{a}X_2]$.

L'espace $\mathbb{C}_r[X_1, X_2]$ est isomorphe au sous-espace vectoriel V_r de $\mathbb{C}[X]$, constitué des polynômes de degré au plus égal à r, par l'application :

$$P(X_1,\, X_2) \mapsto P(X,1)$$

dont la réciproque est :

$$P(X) \mapsto X_2^r\, P\!\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\,.$$

Grâce à cet isomorphisme, on voit que π''_r est équivalente à la représentation π'''_r définie, dans V_r, par la formule :

$$\pi'''_r\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\right][P(X)] = (bX + \overline{a})^r\;P\!\left(\frac{aX - \overline{b}}{bX + \overline{a}}\right)\,.$$

<u>Notations classiques</u>.

Pour tout <u>demi-entier</u> $\ell \geqslant 0$, la notation π_ℓ désignera désormais la représentation de $SU(2)$, dans l'espace $V_{2\ell}$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus égal à 2ℓ, définie par

$$\pi_\ell\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\right][P(X)] = (bX + \overline{a})^{2\ell}\;P\!\left(\frac{aX - \overline{b}}{bX + \overline{a}}\right)\,. \tag{3.2}$$

Notons que $V_{2\ell}$ est de dimension $2\ell+1$. On peut voir, en utilisant le fait que $SU(2)$ est un groupe de Lie, et en passant aux représentations infinitésimales, que toutes les π_ℓ sont irréductibles, et que toute représentation irréductible de SU(2) est équivalente à une π_ℓ.

4 - Représentations irréductibles de SO(3).

On a vu, au chapitre 2, que l'on peut définir un homomorphisme de groupes, surjectif et continu, $u : SU(2) \to SO(3)$ dont le noyau est le centre de SU(2) : $\mathrm{Ker}\ u = \{I, -I\}$ et qui est tel que la bijection canonique : $SU(2)/_{\mathrm{Ker}\ u} \to SO(3)$ soit un homéomorphisme.

Or, d'une manière générale, si G est un groupe localement compact, et H un sous-groupe distingué fermé de G, les représentations π de $G/_H$ sont en bijection avec les représentations π' de G dont le noyau contient H, cette bijection étant définie par $\pi' = \pi \circ \psi$, où $\psi : G \to G/_H$ est l'application canonique.

De plus, grâce au fait que ψ est surjective, et aux propriétés de la topologie-quotient, on voit que π est irréductible ou continue ssi π' l'est, quelles que soient les définitions choisies pour ces notions.

On en déduit que les représentations irréductibles de SO(3) s'obtiennent en factorisant par u les représentations irréductibles de SU(2) constantes sur Ker u. La formule de définition de π_ℓ montre que cette condition est réalisée ssi ℓ est entier.

<u>Remarque</u> : Si G est un groupe localement compact, on appelle dual de G l'ensemble, noté $\hat{G}$, de ses classes de r.u.c. irréductibles. Dans le cas abélien, cette définition est bien identique à celle donnée au chapitre 3, et $\hat{G}$ est alors un groupe ; dans le cas non abélien, $\hat{G}$ n'est pas un groupe.

Ce qui précède, montre que le dual de SU(2) s'identifie à $\mathbb{N}/_2$, et celui de SO(3) à $\mathbb{N}$.

-:-:-:-:-:-

CHAPITRE V - MESURE DE HAAR - MESURES QUASI-INVARIANTES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES.

1) Mesure de Haar - définition - propriétés - premiers exemples.

1.1) Soit G un groupe localement compact. Pour toute fonction f sur G, et tout $s \in G$, on désigne par $\gamma(s)f$ (et $\delta(s)f$) les translatées à gauche (et à droite) de f définies par les formules :

$$(\gamma(s)f)(x) = f(s^{-1}x) \qquad\qquad (\delta(s)f)(x) = f(xs).$$

On dit qu'une mesure de Radon μ sur G est invariante à gauche (resp. à droite) si, pour tout $s \in G$ et toute f appartenant à l'ensemble $\mathscr{K}(G)$ des fonctions continues complexes à support cômpact sur G, on a :

$$\int[\gamma(s)f]d\mu = \int fd\mu. \qquad\qquad (\text{resp. } \int(\delta(s)fd\mu = \int fd\mu).$$

1.2) On démontre que, sur tout groupe G localement compact, il existe une mesure positive non nulle, unique à un facteur constant près, invariante à gauche par G. Une telle mesure est appelée mesure de Haar à gauche sur G. (même définition et résultat à droite).

Notation : on note, en général, dx une telle mesure, c.à.d. que l'on écrit $\int f(x)dx$ au lieu de $\int fd\mu$ ou de $\int f(x)d\mu(x)$. On a donc, par définition, pour tout $s \in G$:

$$\int f(s^{-1}x)dx = \int f(x)dx.$$

La notation μ reste évidemment indispensable lorsqu'on désire utiliser la mesure des parties mesurables de G. Par exemple, l'invariance à gauche de μ est équivalente à la relation:

$$\mu(sA) = \mu(A)$$

pour tout $s \in G$ et tout A intégrable.

1.3) Lorsque G est compact, $\mu(G) = \int dx$ est fini non nul ; par conséquent, en remplaçant μ par $\mu(G)^{-1}\mu$, on peut toujours supposer $\mu(G) = 1$. On dit alors que la mesure de Haar est normalisée, ce que l'on supposera toujours dans la suite, sauf si G est fini. Pour G compact, on a donc, pour toute f continue sur G :

$$\left|\int_G f(x)dx\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

1.4) Si G est discret, l'existence et l'unicité de la mesure de Haar sont évidentes : il suffit de poser, pour toute $f \in \mathcal{K}(G)$, c.à.d. à support fini:

1.5) $$\int f(x)dx = \sum_{x \in G} f(x) \qquad \text{c.à.d.} \qquad \mu = \sum_{x \in G} \delta_x$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x.

Lorsque G est fini, il est à la fois discret et compact, la mesure normalisée est donnée par la formule :

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{x \in G} f(x)$$

om $\mathrm{card}(G)$ désigne évidemment le cardinal de G. On préfère cependant en général utiliser la mesure définie par 1.5.

Premiers exemples.

1.5) Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une loi de groupe : $(x,y) \mapsto m(x,y) = x.y$ en faisant un groupe topologique pour la topologie induite par $\mathbb{R}^n$: ainsi, X est un groupe localement compact, non compact. Supposons de plus que $m : X \times X \mapsto X$ est de classe C^1.

Pour tout $(x,y) \in X \times X$, soit $\mathcal{J}(x,y)$ le jacobien de la translation à gauche $m_x : z \mapsto m(x,z)$, calculé au point y. Alors, on définit une mesure de Haar à gauche μ sur X en posant, pour toute f continue à support compact sur X:

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f(x)|\mathcal{J}(x^{-1},x)|dx.$$

(Ici, x^{-1} désigne l'inverse de x pour la loi de groupe, et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, ce qui exclut la notation habituelle pour la mesure de Haar de X ; l'intégrale est en fait une intégrale de Riemann).

En effet, soit $a \in X$, on a, par changement de variable :

$$\int_X f(a^{-1}.x)d\mu(x) = \int_X f(a^{-1}.x)|\mathcal{J}(x^{-1}x)|dx = \int f(y)|\mathcal{J}((a.y)^{-1},a.y)||\mathcal{J}(a,y)|dy.$$

Puis, on remarque que, d'après le calcul de la différentielle d'une application composée :

$$|\mathcal{J}((a.y)^{-1},a.y)||\mathcal{J}(a,y)| = |\mathcal{J}(y^{-1},y)|$$

d'où :

$$\int_X f(a^{-1}.x)d\mu(x) = \int_X f(y)d\mu(y)$$

1.6) Exemple 1 : Si X est le groupe additif de $\mathbb{R}^n$, on retrouve évidemment la mesure de Lebesgue habituelle.

Exemple 2 : Si $X = \mathbb{R} - \{o\}$ multiplicatif, on a $\mathcal{J}(x,y) = x$, d'où la mesure de Haar : $\frac{dx}{|x|}$.

Exemple 3 : Si $X = \mathbb{C} - \{o\}$ multiplicatif, on trouve $\frac{dx\ dy}{x^2+y^2} = \frac{dx\ dy}{|z|^2}$.

Exemple 4 : Si $X = GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL^+(n, \mathbb{R})$, considérés comme ouverts de $\mathbb{R}^{n^2}$, on trouve $\frac{dx}{|\det x|^n}$ (où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n^2}$).

Le résultat vaut également pour $GL(n,\mathbb{C})$ en désignant par dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{n^2}$ c.à.d. sur $\mathbb{R}^{2n^2}$ et en remplaçant $|\det x|^n$ par $|\det x|^{2n}$.

1.7) Naturellement, avec les mêmes hypothèses qu'en 1.6, on définit une mesure de Haar à droite sur X en remplaçant la translation à gauche par la translation à droite : $z \mapsto m(z,x)$. Dans les exemples précédents, ces deux mesures coïncident. Il n'en est pas de même dans le cas suivant :

Exemple 5 : Soit G le groupe des $x \mapsto ax + b$ avec $a > o$, $b \in \mathbb{R}$, identifié à l'ouvert $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}_-^+ \{o\})$ qui est l'ensemble des (b,a), muni de la loi :

$$(b,a)(b',a') = (b + ab', aa').$$

(autrement dit, G est produit semi-direct de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_-^+ \{o\}$). On trouve $\frac{da\ db}{a^2}$ comme mesure de Haar à gauche, et $\frac{da\ db}{a}$ comme mesure de Haar à droite.

Remarque : Soit $G = G_1 \times G_2$, où G_1 et G_2 sont deux groupes localement compacts. Alors, si μ_1 et μ_2 sont des mesures de Haar à gauche (resp. à droite) sur G_1

et G_2, la mesure-produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur $G = G_1 \times G_2$.

Soit, par exemple, $G_1 = \mathbb{R}^+ - \{o\}$, $\mu_1 = \frac{dt}{t}$ et $G_2 = \mathbb{U}$. La remarque précédente permet de déterminer μ_2. En effet, $G_1 \times G_2$ est ici isomorphe, en tant que groupe topologique, à $\mathbb{C} - \{o\}$ par l'application $(t,u) \mapsto tu$, dont la réciproque est $z \mapsto (|z|, \frac{z}{|z|})$. D'après ce qui précède, $\mu_1 \otimes \mu_2$ définit, par transport de structure, une mesure de Haar sur $\mathbb{C} - \{o\}$, nécessairement proportionnelle, par unicité, à $\frac{dx\,dy}{|z|^2}$. On a donc, pour toute $f_1 \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^+ - \{o\})$ et toute f_2 continue sur $\mathbb{U}$:

$$\int_{\mathbb{R}^+-\{o\}\times\mathbb{U}} f_1(t)f_2(u)d\mu_1(t)d\mu_2(u) = k \int_{\mathbb{C}-\{o\}} f_1(|z|)f_2(\frac{z}{|z|}) \frac{dx\,dy}{|z|^2}$$

c.à.d., en passant en coordonnées polaires dans la 2-ème intégrale :

$$(\int_{\mathbb{R}^+-\{o\}} f_1(t) \frac{dt}{t})(\int_{\mathbb{U}} f_2(u)d\mu_2(u)) = k(\int_o^\infty f_1(\rho) \frac{d\rho}{\rho}) \int_o^{2\pi} f_2(e^{i\theta})d\theta$$

d'où : $\int_{\mathbb{U}} f_2(u)d\mu_2(u) = k \int_o^{2\pi} f_2(e^{i\theta})d\theta,$ car il existe des f_1 telles que $\int_o^{+\infty} f_1(t)\frac{dt}{t} \neq o$!

La mesure de Haar normalisée sur U correspond à $k = \frac{1}{2\pi}$:

$$\int_{\mathbb{U}} f(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta.$$

1.8) Lorsque G est un groupe de Lie, il existe un voisinage ouvert de e homéomorphe à un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Par transport de structure, on obtient ainsi sur X une "loi de groupe non partout définie". En lui appliquant la méthode ci-dessus, on peut construire localement une mesure de Haar, que l'on prolonge ensuite au groupe tout entier.

Module d'un groupe localement compact.

Soit $\mu = dx$ une mesure de Haar à gauche sur un groupe localement compact G. Pour tout $s \in G$, l'application :

$$f \mapsto \int_G f(xs^{-1})dx = \int_G [\delta(s^{-1})f](x)\, dx$$

de $\mathcal{K}(G)$ dans $\mathbb{C}$, est évidemment encore une mesure de Haar à gauche sur G. D'après l'unicité, il existe donc $\Delta(s) \in \mathbb{R}^+ - \{o\}$ tel que :

1.9) $$\int_G f(xs^{-1})\, dx = \Delta(s) \int_G f(x)\, dx \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{K}(G).$$

On définit ainsi une application $\Delta : G \to \mathbb{R}^+ - \{o\}$, dont la définition montre qu'elle est un homomorphisme de groupes. De plus, Δ est continue car, pour toute $f \in \mathcal{K}(G)$ telle que $\int_G f(x)dx \neq o$, on a :

1.10) $$\Delta(s) = \frac{\int_G f(xs^{-1})dx}{\int_G f(x)\, dx} \quad .$$

La continuité de Δ résulte alors du lemme suivant :

1.11) Lemme. - *Soit* G *un groupe localement compact, toute fonction de* $\mathcal{K}(G)$ *est uniformément continue, c.à.d. que, étant donné* $\varepsilon > o$, *il existe* U, *voisinage de* o, *tel que :*

$y^{-1}x \in U$ *implique* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *(continuité uniforme à gauche)*

$xy^{-1} \in U$ *implique* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *(continuité uniforme à droite).*

Preuve : Soit $s \in G$; puisque les translations $x \mapsto xs$ sont des homéomorphismes, l'ensemble des voisinages de s est l'ensemble des Us (ou des sU), où U décrit l'ensemble des voisinages de e.

La fonction f étant continue en tout point, pour tout $\varepsilon > o$ et tout $s \in G$, il existe un voisinage V_s de e tel que $x \in sV_s$ implique $|f(x) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit U_s un voisinage de e tel que $U_s^2 \subset V_s$. On peut extraire de la famille sU_s un recouvrement fini du support K de f :

$$K \subset s_1 U_{s_1} \cup \ldots \cup s_n U_{s_n} .$$

Soit $U = \bigcap_{i=1}^{n} s_i U_{s_i}$ et $U' = U \cap U^{-1}$. Soit x et y tels que $y^{-1}x \in U'$. S'il existe $i_\circ$ tel que $y \in s_{i_\circ} U_{s_{i_\circ}}$, on a :

$$|f(y) - f(s_{i_\circ})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, puisque $U' \subset U_{s_{i_\circ}}$, d'où $x \in y\, U_{s_{i_\circ}} \subset s_{i_\circ} U^2_{s_{i_\circ}} \subset s_{i_\circ} V_{s_{i_\circ}}$, on a aussi :

$$|f(x) - f(s_{i_\circ})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'où} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

S'il existe $i_\circ$ tel que $x \in s_{i_\circ} U_{s_{i_\circ}}$, comme on a aussi $x^{-1}y \in U'$, le même raisonnement est valable.

Si, ni x, ni y, n'appartiennent à un $s_i U_{s_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a $f(x) = f(y) = o$, donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

c.q.f.d.

Il résulte ensuite du lemme, par démonstration standard, que, pour toute $f \in \mathscr{K}(G)$ et toute mesure υ sur G, les fonctions

$$s \mapsto \int_G f(s^{-1}x)\,d\upsilon(x) \quad \text{et} \quad s \mapsto \int_G f(xs)\,d\upsilon(x)$$

sont continues (continuité de l'intégrale par rapport au paramètre quand on intègre sur un compact). D'où la continuité de Δ d'après (1.10).

La définition de la fonction Δ montre de plus quelle ne dépend pas du choix de la mesure de Haar à gauche. Il s'agit donc d'un homomorphisme de groupes continu : $G \to \mathbb{R}^+ - \{o\}$, intrinsèquement attaché à G, appelé <u>module</u> de G.

Lorsque $\Delta = 1$, on dit que G est <u>unimodulaire</u>. C'est le cas lorsque G est abélien, d'après la définition de Δ, et aussi lorsque G est compact (car on peut choisir $f = 1$ dans 1.10), mais c'est aussi le cas pour tous les exemples vus en 1.6). En revanche, pour le groupe des "ax + b", on trouve $\Delta(b,a) = \frac{1}{a}$.

Soit υ la mesure sur G définie par :

$$\int_G f(x)d\upsilon(x) = \int_G f(x^{-1})\ \Delta(x^{-1})dx.$$

On a, en posant $\check{f}(x) = f(x^{-1})$:

$$\int_G f(sx)d\upsilon(x) = \int_G f(sx^{-1})\ \Delta(x^{-1})dx = \int_G \check{f}(xs^{-1})\ \Delta(x^{-1})dx$$

$$= \Delta(s) \int_G \check{f}(x)\ \Delta(s^{-1}x^{-1})dx = \int_G f(x^{-1})\ \Delta(x^{-1})\,dx = \int_G f(x)\ d\nu(x).$$

Ainsi, υ est une mesure de Haar à gauche, il existe donc k tel que :

$$\int_G f(x^{-1})\ \Delta(x^{-1})dx = k \int_G f(x)dx \qquad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{K}(G)$$

d'où, en remplaçant f par $\check{f}\,\check{\Delta}$:

$$\int_G f(x)dx = k \int_G f(x^{-1})\ \Delta(x^{-1})dx.$$

Ce qui implique $k = 1$. On a donc :

1.12) $$\int_G f(x)dx = \int_G f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})dx.$$

En particulier, si G est unimodulaire :

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(x^{-1})dx.$$

Support de la mesure de Haar.

1.13) PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe localement compact,* μ *une mesure de Haar à gauche sur* G. *Alors, le support de* μ *est égal à* G, *autrement dit, on a les deux propriétés équivalentes suivantes :*

a) Si A *est négligeable, son intérieur* $\overset{\circ}{A}$ *est vide ;*

b) Si $f \in \mathscr{K}(G)$, $f \geqslant 0$ *et* $\int_G f(x)dx = 0$, *alors* $f = 0$.

Preuve. - Supposons qu'il existe A tel que $\mu(A) = 0$ et $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$; tout compact de G est recouvert par un nombre fini de translatés à gauche de $\overset{\circ}{A}$, qui sont tous de mesure nulle d'après l'invariance par translation, donc tout compact est de mesure nulle et $\mu = 0$, ce qui est contraire à la définition d'une mesure de Haar.

On a ainsi démontré a), d'où l'on déduit b) comme dans le cas de $\mathbb{R}$. L'équivalence est un exercice facile de théorie de la mesure.

Application de la mesure de Haar aux représentations d'un groupe compact.

1.14) THEOREME. - *Soit* π *une représentation continue d'une groupe compact* G *dans un espace vectoriel complexe de dimension finie* V. *Alors, il existe* *sur* V *une structure d'espace de Hilbert telle que, pour cette structure,* π *soit unitaire.*

<u>Démonstration</u> : On peut toujours définir, par exemple en utilisant une base, une forme hermitienne définie positive ϕ sur V, qui fait donc de V un espace de Hilbert. Il résulte des définitions de la topologie de V, et de la continuité de π que, pour tout $(x,y) \in V$, l'application $G \to \mathbb{C} : s \mapsto \phi[\pi(s)x, \pi(s)y]$ est continue. Nous poserons :

$$\langle x|y\rangle = \int_G \phi[\pi(s)x, \pi(s)y]\, ds \; ;$$

où ds désigne la mesure de Haar normalisée de G.

L'application $(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$ est, de manière évidente, une nouvelle forme hermitienne positive sur $V \times V$. En fait, elle est <u>définie</u> positive car, si $\langle x|x\rangle = 0$, on a :

$$\int_G \phi[\pi(s)x, \pi(s)x]\, ds = 0.$$

Donc, puisque $s \mapsto \phi[\pi(s)x, \pi(s)x]$ est continue positive on a, d'après 1.13, pour tout $s \in G$, $\phi[\pi(s)x, \pi(s)x] = 0$.

En faisant $s = e$, on obtient : $\phi(x,x) = 0$ d'où $x = 0$. D'autre part, les $\pi(s)$ sont unitaires pour la structure d'espace de Hilbert définie par ce nouveau produit scalaire, car on a :

$$\langle \pi(t)x|\pi(t)y\rangle = \int_G \phi[\pi(s)\,\pi(t)x, \pi(s)\,\pi(t)y]\, ds$$

$$= \int_G \phi[\pi(st)x, \pi(st)y]\, ds = \int_G \phi[\pi(s)x, \pi(s)y]\, ds$$

(car ds est aussi invariante à droite) c.à.d. que :

$$<\pi(t)x|\pi(t)y> = <x|y>.$$

Ainsi, les $\pi(t)$ sont bien unitaires pour ce produit scalaire.

2) Mesure de Haar pour les groupes admettant une décomposition en produit de deux sous-groupes.

2.1) Soit G un groupe localement compact. Nous supposons, dans ce § 2, qu'il existe deux sous-groupes, N et H, de G tels que l'application : $(n,h) \mapsto nh$ soit un homéomorphisme de $N \times H$ sur G. On sait qu'il revient au même de supposer que N et H sont deux sous-groupes fermés de G tels que $G = NH$ et $N \cap H = \{e\}$, vérifiant de plus la condition suivante : les deux projections $G \to N$ et $G \to H$, associées à la décomposition $G = NH$, sont continues ; (il suffit d'ailleurs pour cela qu'une seule le soit).

On sait que l'on peut, dans ce qui précède, échanger les rôles de H et N.

2.2) Soit G_1 le groupe localement compact $N \times H$. La bijection $(n,h) \mapsto nh$ permet de transporter l'action à gauche naturelle de G_1 sur lui-même : $(g_1,g) \mapsto g_1g$ (où $g_1 = (n_1,h_1)$ et $g = (n,h)$ appartiennent à G_1) en une action à gauche de G_1 sur G, dont l'expression n'est malheureusement pas simple. En revanche, en utilisant la bijection $\psi : (n,h) \mapsto nh^{-1}$, on obtient, par transport de structure, une action à gauche de G_1 sur G définie par une formule simple :

$$(n_1,h_1).s = \psi[(n_1,h_1)\,\psi^{-1}(s)] = n_1sh_1^{-1} \quad (n_1 \in N,\ h_1 \in H,\ s \in G).$$

Comme ψ est un homéomorphisme, les mesures positives sur G qui sont invariantes par l'action de G_1, sont les images par ψ des mesures de Haar de G_1, elles sont donc toutes proportionnelles entre elles.

Soit ds une mesure de Haar à gauche sur G, et $f \in \mathscr{K}(G)$, on a :

$$\int_G f(n_1 s h_1^{-1}) ds = \int_G f(s h_1^{-1}) \, ds = \Delta_G(h_1) \int_G f(s) ds,$$

où Δ_G désigne le module de G.

Désignons, pour tout $s \in G$, par $H(s)$ et $N(s)$ ses "projections", sur H et N respectivement, définies par :

$$s = N(s)\, H(s), \quad \text{où} \quad N(s) \in N \quad \text{et} \quad H(s) \in H.$$

D'après la formule précédente, on a, en supposant toujours $f \in \mathscr{K}(G)$:

$$\int_G f(n_1 s h_1^{-1}) \quad \Delta_G(H(s))^{-1} ds = \int_G f(s) \; \Delta_G(H(s))^{-1} ds.$$

On en déduit que $\Delta_G(H(s))^{-1} ds$ est une mesure invariante sur G, par l'action de G_1, donc l'image par ψ d'une mesure de Haar à gauche sur G_1. Supposons choisies des mesures de Haar à gauche, dn et dh, sur N et H, on peut donc choisir la mesure de Haar à gauche ds de G de façon que :

$$\int_G f(s) \; \Delta_G(H(s))^{-1} ds = \int_{N \times H} f(nh^{-1}) dn \, dh,$$

d'où : 2.3) $\displaystyle\int_G f(s) \, ds = \int_{N \times H} f(nh^{-1}) \; \Delta_G^{-1}(h) \, dn \, dh \quad (f \in \mathscr{K}(G)),$

ce qui s'écrit aussi, en changeant h en h^{-1}, et en introduisant le module Δ_H de H :

2.4) $$\int_G f(s)ds = \int_{N \times H} f(nh)\, \Delta_G(h)\, \Delta_H^{-1}(h)\, dn\, dh.$$

Cette formule signifie que la mesure de Haar de G est l'image, par l'homéomorphisme $(n,h) \mapsto nh$, de la mesure $dn \otimes \Delta_G\, \Delta_H^{-1}(h)dh$ sur $N \times H = G_1$.

3) Mesure quasi-invariante sur un espace homogène.

a) Cas où $G = NH$.

On conserve dans ce paragraphe a) les hypothèses et notations du § 2.

3.1) On sait que la décomposition $G = NH$ induit un homéomorphisme de N sur l'espace homogène $G/_H$, à savoir l'application $n \mapsto nH$. Par transport de structure, on peut donc faire opérer G à gauche sur N, et faire ainsi de N un espace homogène topologique. L'action : $G \times N \to N$, notée $(s,n) \mapsto s.n$, est définie, d'après ce qui précède, par :

$$snH = (s.n)H$$

c.à.d. que $sn = (s.n)h$, avec $s.n \in N$ et $h \in H$, ce qui détermine $s.n$:

$$s.n = N(sn).$$

On a, plus généralement, la formule suivante, conséquence de la précédente :

$$N(sg) = s.N(g) \qquad (s \in G,\ g \in G),$$

qui signifie que $N : s \mapsto N(s)$ est un G-morphisme, de G dans N considéré comme espace homogène de G.

Soit $g \in \mathscr{K}(N)$, calculons $\int_N g(s_1.n)dn$, où $s_1 = n_1 h_1$, avec $n_1 \in N$, et $h_1 \in N$. Pour cela, soit $g' \in \mathscr{K}(H)$, telle que $\int_H g'(h)\Delta_H^{-1} \Delta_G(h)dh = 1$. On a :

$$\int_N g(s_1.n)dn = \left(\int_H g'(h)\Delta_H^{-1} \Delta_G(h)\, dh\right)\left(\int_N g(s_1.n)dn\right)$$

$$= \int_G g(s_1.N(s))g'(H(s))ds \qquad \text{(d'après 2.4)},$$

$$= \int_G g(N(s_1 s))g'(H(s))ds = \int_G g(N(s))g'(H(s_1^{-1}s))ds$$

$$= \int_{N\times H} g(n)g'(H(s_1^{-1}nh))\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(h)\, dn\, dh \qquad \text{(d'après 2.4)},$$

$$= \int_N g(n)\left(\int_H g'(H(s_1^{-1}nh))\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(h)\, dh\right) dn.$$

Or : $H(s_1^{-1}nh) = H(s_1^{-1}n)h$, d'où, par invariance de dh :

$$\int_H g'(H(s_1^{-1}nh))\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(h)dh = \int_H g'(h)\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(H(s_1^{-1}n)^{-1}h)\, dh$$

$$= \Delta_H^{-1}\, \Delta_G[H(s_1^{-1}n)^{-1}] \int_H g'(h)\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(h)\, dh = \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(H(s_1^{-1}n)^{-1}),$$

d'où, finalement :

3.2) $$\int_N g(s_1.n)dn = \int_N g(n)\, \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(H(s_1^{-1}n)^{-1})dn \;;$$

et cette formule signifie, comme on va le voir maintenant, que la mesure de Haar de N est <u>quasi-invariante</u> par l'action de G.

b) Mesures invariantes, quasi-invariantes, relativement invariantes.

3.3) Supposons qu'un groupe localement compact G opère à gauche, continûment, sur un espace localement compact X, et soit μ une mesure positive sur X. Pour toute fonction f sur X, et tout $s \in G$, on désigne par $\gamma(s)f$ la translatée de f par s, définie par la formule :

$$[\gamma(s)f](x) = f(s^{-1}.x)$$

(où l'on note, comme d'habitude, par $(s,x) \mapsto s.x$ l'action de G sur X). On définit alors, comme en 1.1, la notion de mesure invariante par G sur X : c'est une mesure positive μ, sur X, telle que l'on ait, pour tout $s \in G$ et toute $f \in \mathscr{K}(X)$:

$$\int_X f(s.x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Par analogie avec le cas de la mesure de Haar de G, on peut chercher dans quels cas il existe des mesures invariantes. Naturellement, il n'existe pas de théorème d'existence dans un cadre aussi général, mais voici des exemples qui nous serviront.

Exemple 1. - Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit G un sous-groupe fermé de $GL(n,K)$. On sait que G opère continûment à gauche sur $X = K^n$, par le représentation identique. Désignons par dx la mesure de Lebesgue sur K^n (qui n'est autre que $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$).

3.4) 1-er cas : Si $K = \mathbb{R}$, on a, d'après les formules de changement de variables:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f[s^{-1}.x]dx = |\det s| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Il en résulte que dx est invariante par l'action de G ssi, pour tout $s \in G$, on a $\det s = \pm 1$. Il en est ainsi pour les groupes du type $O(\mathbb{R}^n, B)$ (cf, chapitre I) et pour tous les groupes contenus dans $SL(n,\mathbb{R})$. En particulier, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^4$ est invariante par l'action de chacun des groupes de Lorentz : $O(1,3)$, $SO(1,3)$ et $SO_\circ(1,3)$. Elle est donc aussi invariante par l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^4$.

3.5) <u>2-ème cas</u>. - Si $K = \mathbb{C}$, on a, en remarquant que, si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$, son déterminant, lorsqu'on la considère comme élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ n'est autre que $|\det u|^2$:

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(s^{-1}.x)dx = |\det s|^2 \int_{\mathbb{C}^n} f(x)dx.$$

Il en résulte que dx est invariante par G, ssi pour tout $s \in G$, on a $|\det s| = 1$. C'est le cas pour tous les groupes $U(n)$, et pour tous les sous-groupes de $SL(n,\mathbb{C})$. Cette remarque nous permettra de calculer la mesure de Haar de $SU(2)$ (cf. ci-dessous, § 7).

<u>Exemple 2</u>. - Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G. Le groupe G opère continûment à gauche sur $X = G/_H$. Dans deux cas, il est facile de voir qu'il existe une mesure invariante sur G/H :

3.6) <u>1-er cas</u>. - <u>H est distingué</u>. Alors, toute mesure de Haar à gauche sur le groupe localement compact $G/_H$ répond à la question. En effet, en notant $\dot{s}$ la classe de $s \in G$ dans $G/_H$, on sait que l'on a, par définition de la loi de groupe sur $G/_H$, pour tout $\xi \in G_{/H}$:

$$s.\xi = \dot{s}\xi \qquad \text{(produit de } \dot{s} \text{ et } \xi \text{ dans } G/_H) \; ;$$

d'où : $$\int_{G/_H} f(s.\xi)d\xi = \int_{G/_H} f(\dot{s}\xi)d\xi = \int_{G/_H} f(\xi)d\xi.$$

c.q.f.d.

3.7) 2-ème cas. - H est compact. Alors, l'application canonique $\varphi : G \to G/_H$ est propre, c.à.d. que, pour tout compact $K \subset G/_H$, l'ensemble $\varphi^{-1}(K)$ est compact dans G. En effet, on sait (ch. III, lemme) qu'il existe un compact K' de G tel que $\varphi(K') = K$, d'où $\varphi^{-1}(K) = \varphi^{-1}(\varphi(K')) = K'H$, et $K'H$ est compact, puisque c'est l'image du compact $K' \times H$ par l'application continue $(x,y) \mapsto xy$. Ainsi, pour toute $f \in \mathscr{K}(G/_H)$, on a $f\circ\varphi \in \mathscr{K}(G)$, ce qui permet de définir une mesure λ sur $G/_H$ (dite mesure image par φ de la mesure de Haar à gauche dx sur G), par la formule :

$$\int_{G/_H} f(\xi)d\lambda(\xi) = \int_G f[\varphi(x)]dx.$$

On a alors :

$$\int_{G/_H} f(s.\xi)d\lambda(\xi) = \int_G f(s\varphi(x))dx = \int_G f[\varphi(sx)]dx = \int_G f[\varphi(x)]dx = \int_{G/_H} f(\xi)d\lambda(\xi).$$

Ainsi, si G est compact, tout espace homogène topologique de G admet une mesure invariante.

Mesures quasi-invariantes.

Limitons-nous maintenant au cas où X est un espace homogène topologique de G, c.à.d. (cf, ch. II, 4.8), à un transport de structure près, au cas $X = G/_H$ où H est un sous-groupe fermé de G. On démontre alors qu'il n'existe pas en général de mesure non nulle invariante sur $G/_H$: en fait, la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle mesure est que le module de G coïncide sur H avec celui de H, ce qui n'est pas toujours réalisé. En revanche, il existe toujours des mesures μ positives non nulles quasi-invariantes, c.à.d. telles que, pour tout $s \in G$, la mesure $\gamma(s)\mu$, image de μ par $\gamma(s)$, soit équivalente à μ, ce qui signifie, par définition, que $\gamma(s)\mu = g\mu$, où g est une fonction localement μ-intégrable sur $G/_H$, telle que $g(\xi) > o$ pour tout $\xi \in G/_H$. Comme g dépend évidemment de s, on voit finalement qu'il existe une fonction $\chi : G \times G/_H \to \mathbb{R}^+ - \{o\}$, telle que l'on ait, pour tout $s \in G$ et toute $f \in \mathscr{K}(G/_H)$:

$$(3.8) \qquad \int_{G/_H} f(s.\xi)d\mu(\xi) = \int_{G/_H} \chi(s^{-1},\xi)f(\xi)d\mu(\xi).$$

La mesure μ n'est pas unique : il est immédiat que toute mesure équivalente à μ est encore quasi-invariante : si h est une fonction localement μ-intégrable strictement positive sur G/H, on a, d'après (3.8) :

$$\int_{G/_H} f(s.\xi)h(\xi)d\mu(\xi) = \int_{G/_H} \chi(s^{-1},\xi)f(\xi)h(s^{-1}.\xi)d\mu(\xi)$$

$$= \int_{G/_H} f(\xi)\ \chi(s^{-1},\xi)\ \frac{h(s^{-1}.\xi)}{h(\xi)}\ h(\xi)d\mu(\xi),$$

donc $\mu' = h\mu$ est également quasi-invariante, la fonction χ' qui lui est associée étant :

$$(3.9) \qquad \chi'(s,\xi) = \chi(s,\xi)\ \frac{h(s.\xi)}{h(\xi)}\ .$$

On démontre la réciproque : l'ensemble des mesures quasi-invariantes sur G/H est une classe de mesures équivalentes, c-à-d que ce sont toutes les mesures du type $h\mu$.

On démontre aussi qu'il existe une mesure λ, dans cette classe, telle que la fonction χ associée soit continue, ce qui prouve, grâce à (3.9), que les autres fonctions χ sont toutes mesurables.

L'égalité $\gamma(s)\ \gamma(t)f = \gamma(st)f$ entraîne, grâce à la formule (3.8), l'identité suivante, qui nous sera très utile :

(3.10) $$\chi(st,\xi) = \chi(s,t\xi)\ \chi(t,\xi) \ ;$$

et qui est valable pour tout $(s,t) \in G \times G$, et pour presque tout $\xi \in G/H$.

L'ensemble de cette théorie est développé dans Bourbaki, intégration ch. VII ; notons que, dans tous les exemples d'utilisation , nous saurons calculer effectivement, sans faire appel à la théorie, une mesure quasi-invariante. C'est le cas lorsque les hypothèses de a) sont réalisées : toute mesure de Haar à gauche sur N est une mesure quasi-invariante sur N, considéré comme espace homogène topologique de G par identification à $G/_H$: c'est ce que prouve la formule (3.2). Dans ce cas, la fonction χ associée est définie par :

$$\chi(s,n) = \Delta_H\ \Delta_G^{-1}(H(sn)),$$

elle est donc continue.

Mesures relativement invariantes.

(3.11) Il s'agit d'une notion intermédiaire entre celle de mesure-invariante et celle de mesure quasi-invariante. Reprenons les hypothèses et notations de (3.3). On dira que μ est relativement invariante par G si, pour tout $s \in G$, la mesure $\gamma(s)\mu$ est proportionnelle à μ. Autrement dit, s'il existe $\chi : G \to \mathbb{R}^+ - \{o\}$ telle que :

$$\int_X f(s.x)d\mu(x) = \chi(s^{-1}) \int_X f(x)d\mu(x).$$

On a vu en (3.4) et (3.5) des exemples de cette situation. Notons que, dans ce cas, l'identité (3.10) se réduit à :

$$\chi(st) = \chi(s)\ \chi(t)$$

c-à-d que χ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}^+ - \{o\}$. Lorsque X est un espace homogène topologique de G, il y a de plus unicité de la mesure relativement invariante, à un facteur positif près (si une telle mesure existe !).

4 - Cas d'un produit semi-direct.

Nous examinons maintenant comment se simplifient les résultats précédents lorsque $G = NH$, comme en (2.1), mais avec, de plus, N distingué, c-à-d lorsque G est un produit semi-direct topologique.

Soit $s_1 = n_1\ h_1 \in G$, avec $n_1 \in N$, $h_1 \in H$, et $n \in N$, on a :

$$s_1 n = n_1\ h_1\ n\ h_1^{-1}\ h_1,$$

d'où : $\quad N(s_1 n) = n_1\ h_1\ n\ h_1^{-1} = s_1 n\ h_1^{-1} \quad$ et $\quad H(s_1 n) = h_1$.

Ainsi, la formule (3.2) devient :

$$(4.1) \qquad \int_N g(s_1.n)\ dn = \Delta_H^{-1}\ \Delta_G(h_1) \int_N g(n) dn \qquad (g \in \mathscr{K}(N)).$$

Elle exprime que dn est, dans ce cas, relativement invariante par l'action de G. En particulier, si $s_1 = h_1 \in H$, on obtient :

$$(4.2) \qquad \int_N g(h_1\ n\ h_1^{-1})\ dn = \Delta_H^{-1}\ \Delta_G(h_1) \int_N g(n)\ dn.$$

Rappelons que, par définition, le "module" de l'automorphisme $\sigma_h : n \mapsto hnh^{-1}$ de N, est le nombre réel positif $\Lambda(h)$ défini par :

$$\int_N g(\sigma_h^{-1}(n))\, dn = \Lambda(h) \int_N g(n)\, dn \ ;$$

(l'existence de $\Lambda(h)$ résulte de l'unicité de la mesure de Haar).

La formule (4.2) exprime donc que $\Lambda(h) = \Delta_H^{-1}\, \Delta_G(h^{-1})$, d'où :

(4.3) $$\Delta_G(h) = \Delta_H(h)\, \Lambda(h)^{-1} \quad \text{pour tout} \quad h \in H.$$

En échangeant dans (3.2) les rôles de H et de N, c-à-d en considérant l'action à gauche de G sur H, associée à la décomposition G = HN, nous obtenons :

$$\int_H g'(s_1.h)dh = \int_H g'(h)\, \Delta_N^{-1}\, \Delta_G\, [N'(s_1^{-1}\, h)^{-1}]\, dh \qquad (g' \in \mathscr{K}(H)) \ ;$$

où $s_1.h$ est défini par $s_1h = (s_1.h)n$, avec $s_1.h \in H$ et $n \in N$, et où N' désigne la "projection" sur N, associée à la désomposition G = HN.

Appliquons cette formule avec $s_1 = n_1 \in N$, alors :

$$s_1h = n_1h = hh^{-1}\, n_1h, \qquad \text{d'où :} \qquad n_1.h = h \quad \text{et} \quad N'(n_1h) = h^{-1}n_1h,$$

donc : $\int_H g'(h)dh = \int_H g'(h)\, \Delta_N^{-1}\, \Delta_G(h^{-1}n_1h)dh.$

Cette formule, valable pour toute $g' \in \mathscr{K}(H)$, implique, puisque $\Delta_N^{-1}\, \Delta_G$ est continue, et puisque le support de dh est H tout entier, que :

$$\Delta_N^{-1}\, \Delta_G(h^{-1}\, n_1\, h) = 1, \quad \text{pour tout} \quad h \in H$$

d'où, en particulier, $\Delta_N^{-1}\Delta_G(n_1) = 1$ c-à-d :

(4.4) $$\Delta_G(n) = \Delta_N(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in N.$$

Ainsi, dh est invariante par l'action de G sur H ; de plus $\Delta_G|N = \Delta_N$. Ce dernier résultat est d'ailleurs valable, plus généralement, pour tout sous-groupe fermé distingué N d'un groupe localement compact G.

Les formules (4.3) et (4.4) permettent de calculer le module, $\Delta_G(s)$, d'un élément quelconque, $s = nh \in G$, en fonction de $\Delta_H(h)$, $\Delta_N(n)$ et $\Lambda(h)$ par :

(4.5) $$\Delta_G(nh) = \Delta_G(n)\ \Delta_G(h) = \Delta_N(n)\ \Delta_H(h)\ \Lambda(h)^{-1}.$$

Notons également que, grâce à (4.4), on a la formule d'intégration :

(4.6) $$\int_G f(s)\, ds = \int_{N \times H} f(hn)\, dn\, dh$$

(c'est la formule 2.4, où l'on a échangé H et N).

5 - Exemples et applications.

5.1) Les groupes $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{C})$ sont unimodulaires.

En effet, ce sont des sous-groupes distingués (puisque ce sont des noyaux d'homomorphismes) de $GL(n, \mathbb{R})$ et $GL(n, \mathbb{C})$, tous deux unimodulaires. On peut même considérer $GL(n, \mathbb{R})^+$ comme le produit direct de $SL(n, \mathbb{R})$ et du sous-groupe des homothéties de rapport > o, tous deux distingués.

5.2) Mesure de Haar et module du groupe affine.

Le groupe affine G est le produit semi-direct de $\mathbb{R}^n$ et de $GL(n, \mathbb{R})$, défini au moyen de l'action canonique de $GL(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par la formule :

$$A.x = \sigma_A(x) = A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ A \in GL(n, \mathbb{R})).$$

Le module $\Lambda(A)$ de σ_A est défini par l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(A^{-1}.x)\, dx = \Lambda(A) \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \qquad (g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$$

d'où, d'après la formule du changement de variables dans une intégrale :

$$\Lambda(A) = |\det A|.$$

On en déduit le module Δ de G, grâce à (4.3) :

$$\Delta(x,A) = |\det A|^{-1}$$

et la formule définissant la mesure de Haar de G, grâce à (2.4) :

$$\int_G f(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}^n \times GL(n, \mathbb{R})} f(x,A) \frac{dx\, dA}{|\det A|^{n+1}} .$$

Par exemple, pour le groupe affine de R, on trouve :

$$\Delta(b,a) = \frac{1}{|a|} \qquad \int_G f(s)\, ds = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ - \{o\}} f(b,a) \frac{db\, da}{|a|^2} .$$

Ce sont bien les formules de l'exemple 5 de (1.7), où l'on a remplacé $\mathbb{R}^+ - \{o\}$ par $\mathbb{R} - \{o\}$ (c-à-d qu'on ne se limite pas à la composante neutre).

5.3) Mesure de Haar et module d'un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$.

Considérons, comme en (3.11), le groupe G des bijections affines de $\mathbb{R}^n$ conservant la pseudo-distance δ associée à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B, c-à-d le produit semi-direct de $\mathbb{R}^n$ et de $O(\mathbb{R}^n,B)$.

Comme $O(\mathbb{R}^n, B)$ agit canoniquement sur $\mathbb{R}^n$, la formule définissant $\Lambda(A)$ est la même qu'en (5.2), mais ici $|\det A| = 1$, donc $\Lambda(A) = 1$. Comme on peut prouver que $O(\mathbb{R}^n, B)$ est unimodulaire, il en résulte que G est unimodulaire. La formule (2.4) montre alors que la mesure de Haar de G est le produit de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ par la mesure de Haar de $O(\mathbb{R}^n, B)$ lorsqu'on identifie G à $\mathbb{R}^n \times O(\mathbb{R}^n, B)$ muni d'une loi de produit semi-direct externe (cf. 3.9.1 et 3.11).

Le raisonnement précédent s'applique, plus généralement, lorsqu'on construit un produit semi-direct G, de $\mathbb{R}^n$ par un groupe unimodulaire H opérant linéairement et continûment à gauche sur $\mathbb{R}^n$ par des homomorphismes σ_A $(A \in H)$ tels que $|\det \sigma_A| = 1$.

Ainsi, le groupe de Poincaré est unimodulaire, et il en est de même du produit semi-direct de $\mathbb{R}^4$ par l'un quelconque des groupes de Lorentz. De plus, le calcul de la mesure de Haar de ces produits semi-directs est ramené à celui de la mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{C})$ et des divers groupes de Lorentz.

De même, $ST(2)$ est unimodulaire, et sa mesure de Haar est l'image du produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ c-à-d $\mathbb{R}^2$ et de la mesure de Haar de $\mathbb{U}$, par l'application $(z,u) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \overline{uz} \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$\int_{ST(2)} f(s)ds = \int_{\mathbb{U} \times \mathbb{C}} f\begin{pmatrix} u & \bar{u}z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} du\, dz = \frac{1}{2\pi} \iint_{[0,2\Pi] \times \mathbb{C}} f\begin{pmatrix} u & \frac{z}{u} \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} du\, dz.$$

5.4) <u>Mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{R})$ et $SL(2,\mathbb{C})$</u>.

La décomposition d'Iwasawa montre que chacun de ces deux groupes G s'écrit $G = KAN$, où

-) $K = SO(2)$ si $G = SL(2, \mathbb{R})$, et $K = SU(2)$ si $G = SL(2, \mathbb{C})$.

-) A est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{o\}$.

-) N est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$ si $G = SL(2, \mathbb{R})$,
et $t \in \mathbb{C}$ si $G = SL(2,\mathbb{C})$.

5.5) Comme K est compact, il est unimodulaire, on connait même explicitement la mesure de Haar si $K = SO(2)$:

$$\int_{K = SO(2)} f(k)dk = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\Pi} f(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix})d\theta.$$

(Ceci, grâce à 1.7 et l'isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO(2)$ défini par :

$$u \mapsto (\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, u & -\mathrm{Im}\, u \\ \mathrm{Im}\, u & \mathrm{Re}\, u \end{pmatrix}).$$

La mesure de Haar de $SU(2)$ sera calculée au § 7.

5.6) Les groupes A et N sont isomorphes, respectivement, à $\mathbb{R}^+ - \{o\}$, et à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'où les formules définissent leurs mesures de Haar :

$$\int_A f(a)da = \int_{\mathbb{R}^+ - \{o\}} f(\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}) \frac{d\alpha}{\alpha} \quad \text{et}$$

$$\int_N f(n)dn = \int f(\begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix})dt,$$ où dt est la mesure de Lebesgue, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On sait, d'autre part, que $H = AN$ est un sous-groupe de G. Mais, de plus, N est distingué dans H et, comme $A \cap N = \{e\}$, le sous-groupe H est produit semi-direct de A et de N. La formule

$$\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & o \\ o & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 t \\ o & 1 \end{pmatrix},$$

montre qu'il s'agit du produit semi-direct de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) par $\mathbb{R}^+ - \{o\}$, obtenu en faisant agir linéairement ce dernier groupe sur $K = \mathbb{R}$ (ou C) par :

$$(\alpha,t) \to \sigma_\alpha(t) = \alpha^2 t.$$

De manière plus précise, cette dernière formule définit sur $K \times (\mathbb{R}^+ - \{o\})$ une structure de groupe G_1, par :

$$(t,\alpha)(t',\alpha') = (t + \alpha^2 t',\alpha\alpha').$$

Le module de σ_α est égal, d'après la formule du changement de variables, à α^2 si $K = \mathbb{R}$, et à α^4 si $K = \mathbb{C}$. On en déduit, comme en 5.2, que

$$\Delta_H(\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}) = \alpha^{-2} \text{ (si } K = \mathbb{R}\text{), ou } \alpha^{-4} \text{ (si } K = \mathbb{C}\text{)},$$

puis que :

$$\int_H f(h)\,dh = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ - \{o\}} f(\begin{pmatrix} v & u \\ o & v^{-1} \end{pmatrix}) \frac{du\,dv}{v^2} \quad \text{si } K = \mathbb{R}$$

et

$$\int_H f(h)\,dh = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ - \{o\}} f(\begin{pmatrix} v & u \\ o & v^{-1} \end{pmatrix}) \frac{du\,dv}{v^4} \quad \text{si } K = \mathbb{C}.$$

5.7) Calculons maintenant la mesure de Haar de $G = KH = KAN$. En utilisant la formule 2.4, moyennant le fait que K est unimodulaire, on obtient :

$$\int_G f(s)ds = \int_{H \times K} f(hk)\,dh\,dk.$$

ou bien, en échangeant les rôles de K et H :

$$\int_G f(s)ds = \int_{H \times K} f(kh)\,\Delta_H^{-1}(h)\,dk\,dh.$$

En appliquant de nouveau la formule 2.4 à H, et en utilisant les deux décompositions $H = AN$ et $H = NA$, on obtient :

(5.8) $$\int_G f(s)ds = \int_{A \times N \times K} f(ank)\, da\, dn\, dk \quad \text{et :}$$

(5.9) $$\int_G f(s)ds = \int_{A \times N \times K} f(nak)\, \Delta_H(a)\, da\, dn\, dk,$$

et d'autres formules encore ...

La formule (5.8), lorsqu'on l'explicite complètement, grâce aux résultats de 5.5 et 5.6, montre que la mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{R})$ est l'image, par l'application :

$$(\alpha,t,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de la mesure $\frac{d\alpha}{\alpha} \otimes dt \otimes \frac{d\theta}{2\Pi}$, sur $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times \mathbb{R} \times [0,2\Pi]$.

6 - Mesures quasi-invariantes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$ ou $SO(1,3)e$.

Afin de pouvoir écrire explicitement les représentations du groupe de Poincaré il est nécessaire de connaître les mesures quasi-invariantes sur les espaces homogènes $G/_H$, où $G = SL(2,\mathbb{C})$, et où H est l'un des "petits groupes" $SU(2)$, $ST(2)$ ou $SU(1,1)$ (cf. Ch. I, 2.14) ; en fait, comme G et H sont toujours unimodulaires, il se trouve qu'il existe toujours sur $G/_H$ une mesure invariante, puisque la restriction à H du module de G coïncide évidemment avec le module de H.

Dans la situation qui nous intéresse, on sait que chaque espace homogène est homéomorphe à l'orbite correspondante, dans un homéomorphisme qui respecte l'action de G, de sorte que la problème revient à la recherche d'une mesure invariante sur l'orbite, qui est une hypersurface de $\mathbb{R}^4$ (c.à.d. une sous-variété de dimension 3). Du fait que cette mesure est invariante, son image sur l'espace homogène est par ailleurs, indépendante du point choisi pour définir l'homéomorphisme.

Or, on a déjà remarqué, en calculant la mesure de Haar du groupe de Poincaré, que, du fait que $SL(2,\mathbb{C})$ opère linéairement sur $\mathbb{R}^4$ par des applications de déterminant égal à 1, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$ est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ et, plus généralement, par l'action de tous les groupes de Lorentz.
Par changement de variables, on va en déduire les mesures invariantes sur les orbites du type O_m^+, O_m^- et O_{im}.

6.1) <u>Mesure invariante sur O_m^+</u> .

Soit, comme au chapitre II, C_o^+ l'ouvert de $\mathbb{R}^4$ défini par les conditions :

$$B(x,x) = (x^\circ)^2 - (x')^2 - (x^2) - (x^3)^2 > 0 \quad \text{et} \quad x^\circ > o.$$

On a vu (ch. II, 6.9, démonstration de la proposition) que C_o^+ est invariant par l'action de $SL(2, \mathbb{C})$. Il est à peu près évident, géométriquement, que C_o^+ est homéomorphe au produit $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$. On va vérifier que l'image, par cet homéomorphisme, de la mesure de Lebesgue sur C_o^+ , est une mesure-produit, dont la composante sur O_m^+ est une mesure invariante.

a) Vérification de l'homéomorphisme :

A tout $(\lambda,x) \in (\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$, associons $\lambda x \in C_\circ^+$. Réciproquement, à tout $y \in C_\circ^+$, associons le couple $(\lambda,x) \in (\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$, où $\lambda = m^{-1}\ B(y,y)^{1/2}$, et $x = \lambda^{-1}\ y = m\ B(y,y)^{-1/2} y$. On obtient ainsi deux applications, réciproques l'une de l'autre, et évidemment continues, ce qui prouve l'homéomorphisme annoncé.

b) Action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$.

Si l'on transporte, par la bijection précédente, l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $C_\circ^+$, on obtient une action sur $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$, définie par la formule :

$$X.(\lambda,x) = (\lambda,X.x) \qquad (X \in SL(2, \mathbb{C}))$$

où $X.x$ désigne l'action usuelle de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^4$. Ainsi, $M = (\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times O_m^+$ apparait comme un espace topologique dans lequel $SL(2, \mathbb{C})$ opère continûment à gauche ; plus précisément, l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur M est le produit, en un sens évident, de l'action triviale sur $\mathbb{R}^+ - \{o\}$, et de l'action usuelle sur O_m^+.

c) Mesure invariante sur O_m^+.

Désignons par μ la mesure sur M, image de la mesure de Lebesgue sur $C_\circ^+$. Par construction, μ est invariante par l'action de $SL(2, \mathbb{C})$. On va en déduire, facilement, le lemme suivant :

6.2) LEMME. - *Si la mesure μ est le produit d'une mesure μ_1 sur $\mathbb{R}^+ - \{o\}$, par une mesure μ_2 sur O_m^+, la mesure μ_2 est invariante.*

Preuve. - Si c'est le cas, soit $f_1 \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^+ - \{o\})$ et $f_2 \in \mathscr{K}(O_m^+)$, et soit $f = f_1 \otimes f_2 : (\lambda,x) \mapsto f_1(\lambda)f_2(x)$. On a :

$$\int_M f(X.m)d\mu(m) = \int_M f(m)d\mu(m),$$

pour tout $X \in SL(2, \mathbb{C})$, c.à.d. :

$$\int_M f_1(\lambda)f_2(X.x)d\mu_1(\lambda)d\mu_2(x) = \int_M f_1(\lambda)f_2(x)d\mu_1(\lambda)d\mu_2(x)$$

ou $\left(\int_{R^+-\{o\}} f_1(\lambda)d\mu_1(\lambda)\right)\left(\int_{O_m^+} f_2(X.x)d\mu_2(x)\right) = \left(\int_{R^+-\{o\}} f_1(\lambda)d\mu_1(\lambda)\right)\left(\int_{O_m^+} f_2(x)d\mu_2(x\right.$

Or, on peut choisir f_1 telle que $\int_{R^+-\{o\}} f_1(\lambda)d\mu_1(\lambda) \neq o$ (sinon μ_1 serait nulle, donc aussi la mesure de Lebesgue sur C_o^+). On en déduit le résultat.

c.q.f.d.

Remarque. - Connaissant l'existence et l'unicité d'une mesure invariante sur O_m^+ (cf. le début de ce § 6), on pourrait démontrer que μ est bien de la forme $\mu_1 \otimes \mu_2$. On va se contenter de le vérifier :

d) Calcul de la mesure μ_2.

La situation est très simple ici, car l'hypersurface O_m^+ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$; en fait, sa structure de variété est déterminée par une carte unique, qui est tout simplement la projection de O_m^+ sur le sous-espace, isomorphe à R^3, engendré par (e_1, e_2, e_3) :

$$x = (x^\circ, x^1, x^2, x^3) \xmapsto{p} (x^1, x^2, x^3).$$

L'application réciproque est :

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \xmapsto{p^{-1}} ((|\xi|^2 + m^2)^{1/2}, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

où l'on a posé $|\xi|^2 = |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 + |\xi^3|^2$.

Soit μ' l'image de μ par l'homéomorphisme de M sur $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times \mathbb{R}^3$ défini par $(\lambda,x) \to (\lambda,p(x))$. Tout revient à vérifier que μ' est de la forme $\mu'_1 \otimes \mu'_2$; on aura alors $\mu_1 = \mu'_1$, et $\mu_2 = p^{-1}(\mu'_2)$ sera l'image de μ'_2 par p^{-1}. Or μ' se calcule par simple changement de variables ; en effet, par définition de μ', on a :

$$\int_{C_o^+} f(y)dy = \int_{(\mathbb{R}^+-\{o\}) \times \mathbb{R}^3} f(t\, p^{-1}(\xi))d\mu'(t,\xi).$$

Posons $y = t\, p^{-1}(\xi) = (t(|\xi|^2 + m^2)^{1/2}, t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$. Le jacobien de cette transformation est égal à $m^2\, t^3\, (m^2 + |\xi|^2)^{-1/2}$, donc :

$$\int_{C_o^+} f(y)dy = m^2 \int_{(\mathbb{R}^+-\{o\}) \times \mathbb{R}^3} f(tp^{-1}(\xi))t^3(m^2 + |\xi|^2)^{-1/2}dt\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3,$$

ce qui prouve que μ' est le produit de $t^3\, dt$ et de $\mu'_2 = m^2(m^2 + |\xi|^2)^{-1/2}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3$. A une constante près, on peut donc définir μ_2 par :

$$\int_{O_m^+} f(x)d\mu_2(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(p^{-1}(\xi))(m^2 + |\xi|^2)^{-1/2}d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3.$$

<u>Remarques</u> : 1) Soit U un ouvert de O_m^+, et ψ une carte de O_m^+, de domaine U ; ainsi ψ est un homéomorphisme de U sur un ouvert $V = \psi(U)$ de $\mathbb{R}^3$. L'image μ'' de μ par l'homéomorphisme $(t,x) \to (t,\psi(x))$ de $\mathbb{R}^+ - \{o\} \times U$ sur $\mathbb{R}^+-\{o\} \times \psi(U)$ est définie par la formule suivante, où A désigne l'ouvert de C^+_o image de $\mathbb{R}^+ - \{o\} \times U$:

$$\int_A f(y)dy = \int_{(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times V} f(t\psi^{-1}(\xi))d\mu''(t,\xi).$$

Les mêmes méthodes s'appliquent et permettent de calculer μ'' par le changement de variables $y = t\psi^{-1}(\xi)$. La mesure μ'' est de la forme $\mu_1 \otimes \mu''_2$ et, on a

$$\int_U f(x)d\mu_2(x) = \int_{\psi(U)} f(\psi^{-1}(\xi))d\mu''_2(\xi)$$

ce qui peut donner des expressions plus simples de μ_2 sur U.

2) Naturellement, les calculs pour O_m^- sont analogues, en remplaçant C_o^+ par C_o^-.

6.2) <u>Mesure invariante sur O_{im}.</u>

On raisonne comme en 6.1 au départ, en remplaçant C_o^+ par l'ouvert $C_o^!$ de $\mathbb{R}^4$ défini par $B(x,x) < o$. Cet ouvert est homéomorphe à $M' = \mathbb{R}^+-\{o\} \times O_{im}$, par l'application qui, à $y \in C_o^!$, associe $(\lambda,x) \in \mathbb{R}^+-\{o\} \times O_{im}$, définis par $\lambda = m^{-1}(-B(y,y))^{1/2}$ et $x = \lambda^{-1}y$, et l'analyse de 6.1 b est valable, en particulier, on a le lemme 6.2.

Pour le calcul de μ_2, la situation est moins simple car O_{im}, n'étant pas simplement connexe, n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3$, c.à.d. que sa structure de variété n'est pas définie par une seule carte. Cependant, on peut trouver une carte dont le domaine U soit un ouvert de O_{im} dont le complémentaire est une sous-variété de dimension inférieure ; son image dans C_o' sera un ouvert dont le complémentaire sera de mesure nulle et ceci nous permettra de conclure. Pour cela, nous aurons besoin de certains calculs qui nous serons utiles encore par la suite.

a) Section de l'action de $SO(3)$ sur S^2.

Soit S^2 la sphère unité dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut considérer S^2 comme l'orbite de $e_3 = (0,0,1)$ par l'action canonique de $SO(3)$. Nous allons calculer une section de cette action c.à.d. une application $\sigma : S^2 \to SO(3)$ telle que, pour tout $\xi \in S^2$, on ait $\sigma_\xi(e_3) = \xi$.

Pour cela, remarquons que si ξ n'appartient pas au demi-plan défini par $\xi^1 \leqslant o$ et $\xi^2 = 0$, il existe $(\theta,\varphi) \in]0,\Pi[\times]-\Pi, +\Pi[$, unique, tel que :

$$\xi^1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \xi^2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \xi^3 = \cos\theta$$

(il s'agit des coordonnées sphériques de ξ). On peut alors choisir :

$$\sigma_\xi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a ainsi défini σ, de manière continue, sur un ouvert de S^2 dont le complémentaire est un demi-cercle. On peut, de manière évidente, définir σ également sur ce demi-cercle, de manière continue sur ce demi-cercle ; on obtient ainsi la section cherchée, qui n'est pas globalement continue, mais dont les restrictions à un ouvert et un fermé complémentaires sont continues. (Il n'existe pas de section continue de S^2 dans $SO(3)$, ce qui se voit en considérant les groupes d'homotopie de $SO(3)$, de S^2, et du stabilisateur d'un point quelconque de S^2). On verra au ch. VI, 8.7., une section de l'action de $SU(2)$ sur S^2, dont on peut aussi déduire une section de l'action de $SO(3)$, d'expression plus compliquée.

b) Section de l'action de $SO(1,3)_e$ sur O_{im}.

Soit $x = (x^\circ, x^1, x^2, x^3) \in O_{im}$. Soit $\alpha = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0$ car $(x^\circ)^2 - \alpha^2 = -m^2 < 0$. Alors $\xi = (\frac{x^1}{\alpha}, \frac{x^2}{\alpha}, \frac{x^3}{\alpha}) \in S^2$, donc $\xi = \sigma_\xi(e_3)$ et

$\sigma_\xi^{-1}(\xi) = e_3$, donc $\sigma_\xi^{-1}(\alpha\xi) = \alpha e_3$, c.à.d. $\sigma_\xi^{-1}(x^1,x^2,x^3) = (0,0,\alpha)$. Identifions SO(3) au sous-groupe de $SO(1,3)_e$ constitué des rotations autour de e_o. Alors :

$$\sigma_\xi^{-1}(x) = (x^\circ,0,0,\alpha) \quad \text{avec} \quad (x^\circ)^2 - \alpha^2 = - m^2.$$

Ainsi, dans le plan défini par e_o et e_3, le point $\sigma_\xi^{-1}(x)$ appartient à la même branche de l'hyperbole d'équation $(x^\circ)^2 - (x^3)^2 = - m^2$ que le point $(0,m) = me_3$ (car m et α sont tous deux positifs). Il existe donc une unique transformation de Lorentz X, dans le plan (e_o, e_3), telle que $X(me_3) = \sigma_\xi^{-1}(x)$ (cf fin du chapitre II). Finalement :

$$x = \sigma_\xi X(me_3) = m\sigma_\xi X(e_3).$$

Nous choisirons comme section l'application $x \mapsto \sigma_\xi X$. Elle possède visiblement les mêmes propriétés que σ du point de vue de la continuité. On a d'ailleurs, en posant $\tau = \operatorname{Arg\,sh} \frac{x_o}{m}$, en dehors du demi-hyperplan $x^1 \leqslant o$, $x^2 = o$:

$$\sigma_\xi X = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & 0 & 0 & \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{sh}\tau \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \operatorname{ch}\tau\sin\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sh}\tau\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \operatorname{ch}\tau\sin\theta\sin\varphi \\ \operatorname{sh}\tau\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \operatorname{ch}\tau\cos\theta \end{pmatrix}.$$

c) <u>Paramétrage de O_{im}.</u>

Soit $x \in O_{im}$, mais n'appartenant pas au demi-hyperplan $x^1 \leqslant o$, $x^2 = o$. Alors, il existe $(\tau, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times]0,\Pi[\times]-\Pi, +\Pi[$, unique, tel que :

$$x^\circ = m\operatorname{sh}\tau,\ x^1 = m\operatorname{ch}\tau\sin\theta\cos\varphi,\ x^2 = m\operatorname{ch}\tau\sin\theta\sin\varphi,\ x^3 = m\operatorname{ch}\tau\cos\theta.$$

On obtient ainsi une bijection de l'ouvert $V = \mathbb{R} \times]0,\Pi[\times]-\Pi, +\Pi[$ de $\mathbb{R}^3$ sur l'ouvert U de O_{im} défini par les conditions $x^1 > o$ ou $x^2 \neq o$. La bijection inverse $\psi : U \to V$ définit évidemment une carte de O_{im}.

d) Calcul de la mesure invariante sur O_{im}.

Soit A l'ouvert de C'_o, image homéomorphe de $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times U$; explicitement, A est l'ensemble des $x \in C'_o$ vérifiant $x^1 > o$ ou $x^2 \neq o$. Ainsi, le complémentaire de A est négligeable, et l'on a donc, en désignant toujours par μ la mesure sur M', image de la mesure de Lebesgue sur C'_o, les propriétés suivantes :

-) Le complémentaire dans M' de l'ouvert $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times U$ est μ-négligeable.

-) Pour toute $f \in \mathscr{K}(C'_o)$:

$$\int_{C'_o} f(y)dy = \int_A f(y)dy = \int_{(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times U} f(tx)d\mu(t,x) = \int_{\mathbb{R}^+ - \{o\} \times O_{im}} f(tx)d\mu(t,x).$$

Soit μ'' l'image de μ par l'homéomorphisme $(t,x) \mapsto (t,\psi(x))$; on a :

$$\int_A f(y)dy = \int_{(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times V} f(t\psi^{-1}(\xi))\, d\mu''(t,\xi)$$

et μ'' se calcule par le changement de variables $y = t\psi^{-1}(\xi)$, c.à.d. :

$$y^o = mt \ \operatorname{sh} \tau, \quad y^1 = mt \operatorname{ch} \tau \sin \theta \cos \varphi$$

$$y^2 = mt \ \operatorname{ch} \tau \sin \theta \sin \varphi, y^3 = mt \operatorname{ch} \tau \cos \theta$$

ce qui donne :

$$\int_A f(y)dy = m^4 \int_{(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times V} f(t\psi^{-1}(\xi))t^3 \operatorname{ch}^2 \tau \sin \theta \, dt\, d\tau\, d\theta\, d\varphi$$

où $\xi = (\tau, \theta, \varphi)$.

Ainsi, μ'' est le produit de la mesure $t^3 dt$ sur $\mathbb{R}^+-\{o\}$ par $\mu''_2 = ch^2\tau \sin\theta \, d\tau \, d\theta \, d\varphi$ sur V. Donc μ, restreinte à $(\mathbb{R}^+-\{o\}) \times U$, est le produit de $t^3 dt$ par l'image $\psi^{-1}(\mu''_2)$ de μ''_2 par ψ^{-1}. Comme le complémentaire de $(\mathbb{R}^+-\{o\}) \times U$ est μ-négligeable, il en résulte que μ est le produit de $t^3 dt$ par la mesure sur O_{im} induite par $\psi^{-1}(\mu''_2)$. Ainsi, il existe une mesure μ_2 invariante sur O_{im}. On peut choisir, à une constante près :

$$\int_{O_{im}} f(x) d\mu_2(x) = \int_U f(x) d\mu_2(x) = \int_V f[\psi^{-1}(\tau, \theta, \varphi)] \, ch^2\tau \sin\theta \, d\tau \, d\theta \, d\varphi.$$

6.3) Mesure invariante sur $O_\circ^+$ et $O_\circ^-$.

La méthode utilisée jusqu'ici ne s'applique pas à la nappe supérieure $O_\circ^+$ du cône de lumière. Remarquons que cette hypersurface est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - \{o\}$, sa structure de variété étant, comme celle de O_m^+, déterminée par une carte unique $O_\circ^+ \to \mathbb{R}^3 - \{o\}$, analogue à celle de O_m^+ :

$$x = (x^\circ, x^1, x^2, x^3) \xmapsto{p} (x^1, x^2, x^3)$$
$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \xmapsto{p^{-1}} (|\xi|, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Ainsi, $O_\circ^+$ apparait comme une position limite, en un sens que nous ne chercherons pas à préciser, de O_m^+ quand m tend vers zéro. Définissons alors la mesure μ_2 sur $O_\circ^+$, par passage à la limite formel dans la formule définissant la mesure invariante de O_m^+, quand m tend vers zéro, c-à-d. par :

$$\int_{O_\circ^+} f(x) d\mu_2(x) = \int_{\mathbb{R}^3 - \{o\}} f(p^{-1}(\xi)) \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3}{|\xi|}.$$

Il est aisé de vérifier l'invariance de μ_2 par $SL(2,\mathbb{C})$: d'après la preuve de la dernière proposition du ch. II (décomposition de Cartan de $SO_\circ(1,3)$ et $SL(2,\mathbb{C})$), § 6.9, toute transformation $x \mapsto X.x$, où

$X \in SL(2, \mathbb{C})$, est un produit $w^{-1} Yw'$ où w et w' sont des rotations autour de $e_\circ$ et Y une transformation de Lorentz dans le plan $(e_\circ, e_3)$; l'invariance de μ_2 par ces deux types de transformations se vérifie facilement.

Remarque. - Si l'on paramètre $O^+_\circ$ par :

$$x^\circ = \text{ch}\, \tau, \quad x^1 = \text{ch}\, \tau \sin\theta \cos\varphi, \quad x^2 = \text{ch}\, \tau \sin\theta \sin\varphi, \quad x^3 = \text{ch}\, \tau \cos\theta,$$

soit $\qquad x = g(\tau, \theta, \varphi)$,

on trouve :

$$\int_{O^+_\circ} f(x)dx = \int_{]0,+\infty[\times]0,\Pi[\times]-\Pi,+\Pi[} f(g(\tau,\theta,\varphi)\text{sh}\, \tau\, \text{ch}\, \tau \sin\theta\, d\tau\, d\theta\, d\varphi.$$

6.4) Caractérisation intrinsèque des mesures invariantes sur O^+_m et O_{im}.

Soit U_1 un ouvert de O^+_m (ou O_{im}) et ψ une carte de O^+_m (ou O_{im}) de domaine U_1. Soit $V = \psi(U_1)$, et $\varphi = \psi^{-1}$. Ainsi, φ est une application C^∞ de V dans $\mathbb{R}^4$ qui induit un difféomorphisme de V sur U_1. On a, en employant les mêmes notations qu'en 6.2, d) :

$$\int_A f(y)dy = \int_{(\mathbb{R}^+-\{o\})\times V} f(t\,\varphi(\xi))d\mu''(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^+-\{o\}\times U} f(tx)d\mu_1(t)d\mu_2(x).$$

Le changement de variables $y = t\,\varphi(\xi)$ a pour jacobien $\det(M(\varphi(\xi), tD^1 \varphi(\xi), tD^2 \varphi(\xi), tD^3 \varphi(\xi))$ où $D^i \varphi(\xi) = \dfrac{\partial^i \varphi}{\partial \xi^i}(\xi)$.

Soit $A = M[\varphi(\xi), D^1 \varphi(\xi), D^2 \varphi(\xi), D^3 \varphi(\xi)]$. Remarquons que, puisque $\varphi(V) \subseteq O^+_m$ (ou O_{im}) on a $B(\varphi(\xi), \varphi(\xi)) = \varepsilon m^2$ sur V, donc, par dérivation, $B(\varphi(\xi), D^i \varphi(\xi)) = 0$; soit alors A' la matrice dont les vecteurs lignes sont les composantes covariantes des vecteurs dont les colonnes de A sont les composantes contravariantes (au sens du chapitre I) ; les coefficients $a'^{i}_{\;j}$ de A' sont liés à ceux, $a^{i}_{\;j}$ de A par $a'^{i}_{\;j} = \varepsilon_j \, a^{j}_{\;i}$. On a :

$$A'A = \varepsilon m^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A_1 = (B(D_i \, \varphi(\xi), D_j \, \varphi(\xi)))$. D'où :

$$|\det A| = m|\det B(D_i \, \varphi(\xi), D_j \, \varphi(\xi))|^{1/2}.$$

On en déduit, puisque le jacobien vaut, (par définition de A), t^3 det A, que :

$$\int_U f(x) d\mu_2(x) = m \int_V f\,[\varphi(\xi)]\,|\det B(D_i \, \varphi(\xi), D_j \, \varphi(\xi))|^{1/2} \, d\xi,$$

ce qui signifie que μ_2/m est la mesure sur l'hypersurface O^+_m (ou O_{im}) canoniquement induite par la structure de variété pseudo-riemannienne conférée à $\mathbb{R}^4$ par le produit scalaire de Minkowski.

Remarques. - a) (6.5). La caractérisation (6.4) ne s'étend pas aux nappes du cône de lumière. En effet, du fait que ce cône est le cône isotrope de la forme B, il n'existe pas, sur les hypersurfaces $O^+_\circ$ et $O^-_\circ$, de mesure canoniquement induite par la structure pseudo-riemannienne de R^4. Ceci provient du fait que la forme bilinéaire induite sur l'espace tangent est, dans ce cas, dégénérée.

b) (6.6) Le calcul effectué en (6.4) donne l'expression de la mesure invariante sur les orbites du type O^+_m, O^-_m, O_{im}, dans toute carte. Pour retrouver le résultat, on retiendra que si φ est une paramétrisation, (c.à.d. un inverse de carte), on définit le carré de l'élément de volume sur l'orbite considérée par :

$$dS^2 = |\det(B(D_i\varphi\ (\xi),\ D_j\varphi\ (\xi)))|(d\xi)^2$$

d'où $\int f(x)dS(x) = \int f\ [\varphi(\xi)]\ dS(\xi)$.

c) (6.7) Si l'on admet l'existence de la mesure de surface sur les orbites du type précédent, la théorie se simplifie beaucoup : le lemme (6.2) étant établi, le calcul de (6.4) montre immédiatement que la mesure μ, sur $C^+{}_o$ par exemple, est le produit de la mesure $t^3\ dt$ sur $\mathbb{R}^+$ par la mesure canonique sur O^+_m.

7) Mesure de Haar de SU(2).

La situation qui nous a permis, au paragraphe précédent, de calculer les mesures invariantes sur les espaces homogènes a partir des orbites se présente fréquemment. En voici un autre exemple, permettant de calculer la mesure de Haar de SU(2).

(7.1) Considérons l'action identique $(X,x) \mapsto X(x)$ de SU(2) sur $\mathbb{C}^2$. Cette action a déjà été étudiée au chapitre II, § 6. On sait donc que SU(2) opère dans $\mathbb{C}^2$ par isométries, pour la forme hermitienne canonique, que l'orbite de tout point $a = (a^1, a^2)$ est la sphère de centre o, de rayon $\|a\| = (|a^1|^2 + |a^2|^2)^{1/2}$, et que, si $\|a\| \neq o$, le stabilisateur de tout point de la sphère est réduit à l'élément neutre, de sorte que, vu la compacité de SU(2), chaque orbite est homéomorphe à SU(2).

(7.2) En identifiant $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$, par exemple par U :
$(x^1, x^2, x^3, x^4) \mapsto (x^1 + ix^2, x^3 + ix^4)$, les mêmes considérations sont valables

pour l'action de SU(2) sur $\mathbb{R}^4$, à condition de remplacer la forme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^4$ par le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^4$. Il suffit pour cela de remarquer que U est une isométrie. On a vu de plus, au § 3.5 de ce même chapitre, que la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^4$ est invariante par l'action de SU(2).

La recherche d'une mesure de Haar à gauche sur SU(2) se ramène donc à la recherche d'une mesure invariante sur une sphère de $\mathbb{R}^4$ de rayon non nul. La démarche est alors celle du § 6 : on considère l'ouvert $\mathbb{R}^4 - \{o\}$ qui va jouer le rôle de $C^+_\circ$, il est homéomorphe à $M = (\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times S_3(m)$, où $S_3(m)$ désigne la sphère d'équation $\|x\| = m$, par l'homéomorphisme obtenu en remplaçant, dans 6.1 a), $B(y,y)$ par $\langle y|y\rangle$. L'action de SU(2) sur $\mathbb{R}^4 - \{o\}$ se transporte en une action sur M, qui est le produit de l'action triviale sur $\mathbb{R}^+ - \{o\}$ par l'action initiale sur $S_3(m)$, de sorte que l'on a l'analogue du lemme (6.2). Le calcul se poursuit ensuite de manière analogue au cas de O_{im} (car il n'existe pas de carte globale de $S_3(m)$) et se ramène concrètement à un passage en coordonnées polaires : on choisit ici l'ouvert $V =]0,\Pi[\times]0,\Pi[\times]-\Pi,+\Pi[$ de $\mathbb{R}^3$. Lorsque $(\theta,\varphi,\psi) \in V$, le point $u(\theta,\varphi,\psi) = x$, défini par :

$$x^1 = m\cos\theta, \qquad x^2 = m\sin\theta\cos\varphi, \qquad x^3 = m\sin\theta\sin\varphi\cos\psi,$$

$$x^4 = m\sin\theta\ \sin\varphi\ \sin\psi,$$

décrit un ouvert U de $S_3(m)$ et, en définissant A comme en 6.2 d), on trouve que :

$$\int_A f(y)dy = m^4 \int_{\mathbb{R}^4-\{o\}\times V} f(tu(\theta,\varphi,\psi))t^4 \sin^2\theta \sin\varphi \, dt\, d\theta\, d\varphi\, d\psi .$$

D'où :

$$\int_{S_3(m)} f(x)d\mu_2(x) = \int_U f(x)d\mu_2(x) = \int_V f[g(\theta,\varphi,\psi)] \sin^2\theta \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\, d\psi.$$

On prouve enfin, par le même calcul qu'en (6.4), que μ_2 est la mesure sur $S_3(m)$ canoniquement induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^4$.

Calcul pratique.

Choisissons $e_1 = (1,0,0,0) \in S_3 = S_3(1)$. On a $U(e_1) = (1,0)$.
Si $s = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, on a $s.(1,0) = (a, -\bar{b})$; ainsi, en posant $a = a^1 + ia^2$ et $b = b^1 + ib^2$ on voit que l'action de $SU(2)$ sur e_1 est définie par :

$$s.e_1 = (a^1, a^2, -b^1, b^2).$$

On sait que l'application $\phi : s \mapsto s.e_1$ est un homéomorphisme de $G = SU(2)$ sur S_3 ; l'égalité précédente montre que $\phi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{pmatrix} x^1+ix^2 & -x^3+ix^4 \\ x^3+ix^4 & x^1-ix^2 \end{pmatrix}$.
On sait d'autre part que la mesure de Haar de G est l'image de μ_2 par ϕ^{-1}. Pour le calcul effectif, il est bon de faire la remarque suivante :

On peut, si on le désire, se débarasser du signe "moins" apparaissant dans les formules précédentes en remarquant que si l'on pose, pour $s \in G$, $\theta(s) = {}^t s$ (transposée de s), θ est un homéomorphisme de G sur G vérifiant $\theta(ss') = \theta(s')\theta(s)$ et $\theta^2 = id$. D'où :

$$\int_G f[s'\theta(s)]ds = \int_G f[\theta(s\theta(s'))]ds = \int_G f(\theta(s))ds$$

ce qui prouve que l'image de la mesure de Haar de G par θ est encore une mesure de Haar sur G, donc qu'il existe $a > o$ tel que :

$$\int_G f[\theta(s)]ds = a \int_G f(s)ds ;$$

mais $\int_G f(s)ds = \int_G f[\theta^2(s)]ds = a \int_G f[\theta(s)]ds = a^2 \int f(s)ds.$

D'où $a = 1$: $\int_G f[{}^t s]ds = \int_G f(s)ds.$

La mesure de Haar de SU(2) s'obtient donc aussi en transportant μ_2 au moyen de l'homéomorphisme :

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \xmapsto{u} {}^t\phi^{-1}(x^1,\dots, x^4) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = x^1+ix^2 \\ b = x^3+ix^4 \end{cases}$$

ce qui donne :

(7.3) $$\int_G f(s)d\mu(s) = \int_{\substack{0 \leqslant \theta \leqslant \Pi \\ 0 \leqslant \psi \leqslant 2\Pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \Pi}} f\left[\begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi e^{i\psi} \\ -\sin\theta\sin\varphi e^{-i\psi} & \cos\theta - i\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}\right]\sin^2\theta\sin\varphi d\theta\, d\varphi d\psi$$

En faisant $f = 1$ on trouve : $\int_G d\mu(s) = 2\Pi^2$, donc la mesure de Haar normalisée est :

(7.4) $$\int_{SU(2)} f(s)ds = \frac{1}{2\Pi^2}\int_{SU(2)} f(s)d\mu(s) = \dots$$

(7.5) <u>Cas d'une fonction centrale</u>.

Toute $s = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ est diagonalisable car l'équation caractéristiques: $\lambda^2 - (a + \bar{a})\lambda + 1 = 0$ a deux racines imaginaires conjugués λ_1 et $\bar{\lambda}_1$ distinctes, sauf si $a = \pm 1$, auquel cas, la matrice est déjà diagonale. Les vecteurs propres associés à λ_1 et $\bar{\lambda}_1$ étant orthogonaux, on peut trouver une base de vecteurs propres orthonormée c.à.d. telle que la matrice de passage k appartienne à SU(2) d'où :

$$s = k^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix} k : \qquad \text{avec } k \in SU(2).$$

En particulier, si $s = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi\, e^{i\psi} \\ -\sin\theta\sin\varphi\, e^{-i\psi} & \cos\theta - i\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$

on trouve comme valeurs propres $\pm\ e^{i\theta}$ donc $s = k^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & o \\ o & e^{-i\theta} \end{pmatrix} k$.

Soit f une fonction centrale sur $SU(2)$; avec les notations précédentes, on a donc $f(s) = f(k^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & o \\ o & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix} k) = f(\begin{pmatrix} \lambda_1 & o \\ \cdot & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix})$.

Et si f est continue :

$$\int_{SU(2)} f(s)ds = \frac{1}{2\Pi^2} \int f(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & o \\ o & e^{-i\theta} \end{pmatrix}) \sin^2\theta \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$$

c.à.d. : $$\int_G f(s)ds = \frac{2}{\Pi} \int_o^{\Pi} f(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & o \\ o & e^{-i\theta} \end{pmatrix}) \sin^2\theta\, d\theta.$$

7.6) Autre expression de la mesure de Haar.

On peut aussi paramétrer $SU(2)$ au moyen des "angles d'Euler" en posant, si $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$

$$|a| = \cos\frac{\theta}{2} \qquad \operatorname{Arg} a = \frac{\varphi+\psi}{2} \qquad \operatorname{Arg} b = \frac{\varphi-\psi+\pi}{2}$$

avec $0 < \varphi < 2\pi$ $\quad o < \theta < \pi \quad - 2\pi < \psi < 2\pi$.

On obtient ainsi une carte de $SU(2)$ définie dans un ouvert dont le complémentaire est une variété de dimension inférieure et on a la formule :

$$\int_{SU(2)} f(s)ds = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\substack{-2\pi < \psi < 2\pi \\ o < \varphi < 2\pi \\ o < \theta < \pi}} f\left(\begin{pmatrix} a(\varphi,\theta,\psi) & b(\varphi,\theta,\psi) \\ -\bar{b}(\varphi,\theta,\psi) & \bar{a}(\varphi,\theta,\psi) \end{pmatrix}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi.$$

Dans cette formule $a(\varphi,\theta,\psi) = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}$ et $b(\varphi,\theta,\psi) = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}$.

-:-:-:-:-

CHAPITRE VI - REPRÉSENTATIONS INDUITES. MÉTHODE DES PETITS GROUPES.

1) Représentations induites ; définitions générales.

Dans tout ce chapitre, on désigne par G un groupe localement compact séparable (i.e. dont la topologie admet une base dénombrable d'ouverts) ; a fortiori, le groupe G est dénombrable à l'infini, ce qui simplifie les questions d'intégration.

La théorie des représentations induites a pour but de construire des représentations de G à partir de celles d'un sous-groupe fermé H. On verra que, dans le cas d'un produit semi-direct, on peut, sous certaines hypothèses, vérifiées par le groupe de Poincaré, obtenir, à partir de divers sous-groupes H, toutes les représentations irréductibles de G.

1.1) Soit ω une r.u.c. d'un sous-groupe fermé H de G dans un espace de Hilbert complexe séparable X. Soit V l'espace vectoriel complexe des applications $f : G \to X$ vérifiant :

a) f est continue ;

b) Pour tout $h \in H$ et tout $x \in G$, on a : $f(xh) = \omega(h^{-1})f(x)$;

c) Il existe un compact C de G tel que $\operatorname{supp} f \subset CH$.

(on exprime c) en disant que f est à support compact modulo H).

Il est immédiat que, si f et g appartiennent à V, le nombre $\langle f(x) | g(x) \rangle$ ne dépend que de la classe $xH = \dot{x}$ de x dans G/H et que la fonction $\dot{x} \mapsto \langle f(x)|g(x)\rangle$ appartient à $\mathscr{K}(G/H)$. Soit λ une mesure quasi-invariante sur G/H, et $\chi : G \times G/H \to \mathbb{R}^+ - \{o\}$, la fonction associée, telle que $\gamma(s)\lambda = \chi(s^{-1},\xi)d\lambda(\xi)$ (cf ch. 5, § 3) ; on définit une structure d'espace préhilbertien sur V en posant :

$$\langle f|g\rangle = \int_{G/H} \langle f(x)|g(x)\rangle d\lambda(\dot{x}).$$

Pour toute $f \in V$, et tout $s \in G$, la fonction $U^\omega(s)f$ définie par :

$$[U^\omega(s)f](x) = \chi(s^{-1}, \dot{x})^{1/2} f(s^{-1}x)$$

appartient encore à V et $U^\omega(s)$ est une isométrie de V dans V ; de plus, $U^\omega : s \mapsto U^\omega(s)$ est une représentation de G dans V, dont on peut vérifier qu'elle est continue.

1.2) <u>DEFINITION</u>. - *Soit* W *l'espace de Hilbert complété de* V. *Notons toujours* $U^\omega(s)$ *le prolongement à* W *de l'opérateur* $U^\omega(s)$. *On définit ainsi une r.u.c. de* G *dans* W *appelée représentation induite par* ω.

On note souvent $\mathrm{ind}_H^G\omega$ cette représentation. Il est immédiat de vérifier que si l'on remplace λ par une autre mesure quasi-invariante, c-à-d par une mesure équivalente, et ω par une représentation équivalente, on obtient une nouvelle représentation de G équivalente à la première, ainsi la classe de U^ω ne dépend que de H et de la classe de ω.

1.3) On démontre que W peut s'identifier à un espace fonctionnel, modulo l'égalité presque partout : c'est l'ensemble des $f : G \to X$ vérifiant

a) f est mesurable (i.e, pour tout $a \in X$, l'application $s \mapsto \langle f(s)|a\rangle$ est mesurable) ;

b) Pour tout $h \in H$, et tout $x \in G$, on a $f(xh) = \omega(h^{-1})f(x)$;

c) $\int_{G/H} |f(x)|^2 \, d\lambda(\dot{x}) < +\infty$.

Naturellement, la structure hilbertienne de W est définie par la formule :

$$<f|g> = \int_{G/H} <f(x)|g(x)> \, d\lambda(\dot{x}),$$

et la formule définissant U^{ω} est toujours la même.

1.4) EXEMPLE. - Choisissons pour ω la représentation triviale de dimension 1 de H. Alors, les conditions 1.1 a,b,c montrent que V est l'ensemble des fonctions f du type $x \to \tilde{f}(\dot{x})$ où $\tilde{f} \in \mathscr{K}(G/H)$, muni du produit scalaire :

$$<f|g> = \int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\overline{\tilde{g}(\xi)} \, d\lambda(\xi).$$

On peut donc identifier W à $L^2(G/H)$; on obtient ainsi une r.u.c. de G dans $L^2(G/H)$, appelée représentation quasi-régulière associée à H, et définie par la formule :

$$(U^1(s)f)(\xi) = \chi(s^{-1},\xi)^{1/2} \, f(s^{-1}.\xi).$$

Lorsque $H = \{e\}$, on retrouve la représentation régulière gauche de G. Plus généralement, lorsque H est distingué, U^1 est composée de l'application canonique $G \to G/H$ et de la représentation régulière gauche du groupe G/H.

1.5) REMARQUES. - a) On peut a priori se demander si l'espace V n'est pas réduit à $\{o\}$. En fait, on peut prouver que V est exactement l'ensemble des f de la forme :

$$f(x) = \int_H \omega(h) \, g(xh) \, dh.$$

où g appartient à l'ensemble $\mathcal{K}(G,X)$ des applications continues à support compact $G \to X$. Lorsqu'on se limite aux g de la forme $x \mapsto g'(x)\xi$ où $g' \in \mathcal{K}(G)$ et $\xi \in X$, on obtient un ensemble total dans V et W, ce qui suffit à assurer que l'espace V est assez grand...

b) On ne développera pas ici la théorie des représentations induites, qui remonte à FROBENIUS dans le cas des groupes finis et est due à MACKEY dans le cas localement compact. Un exposé complet se trouve par exemple dans WARNER : Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I.

2) Cas d'un groupe décomposé en produit de sous-groupes.

2.1) Supposons que $G = NH$ avec les hypothèses et notations habituelles (cf. ch. 5, § 2). Soit toujours ω une r.u.c. de H et V et W les espaces correspondants. A toute $f \in V$ associons sa restriction f' à N. Alors, la condition a) de 1.1 (continuité de f) implique la continuité de f' et la condition c) implique que f' est à support compact, contenu dans la "projection" de C sur N dans la décomposition $G = NH$. Réciproquement, si $f' \in \mathcal{K}(N,X)$, la condition b) conduit à définir f par la formule,

$$f(nh) = \omega(h^{-1})f'(n)$$

et on vérifie facilement que $f \in V$. On définit ainsi deux applications linéaires réciproques l'une de l'autre, qui permettent d'identifier V à $\mathcal{K}(N,X)$. La structure d'espace préhilbertien de $\mathcal{K}(N,X)$ associée est facile à déterminer. Dans ce cas, en effet, on sait qu'un homéomorphisme canonique : $n \mapsto nH$ identifie N et G/H. Dans cette identification, l'application $\dot{x} \mapsto \langle f(x)|g(x)\rangle$ devient $n \mapsto \langle f(n)|g(n)\rangle$, et on sait qu'on peut choisir pour mesure quasi-invariante par l'action de G sur N la mesure de Haar de N (ch. 5, § 3 a)). On en déduit que le produit scalaire sur $\mathcal{K}(N,X)$ est donné par :

$$<f|g> = \int_N <f(n)|g(n)> dn,$$

donc que W, complété de V, s'identifie au complété $L^2(N,X)$ de $\mathcal{K}(N,X)$. Dans cette identification, la représentation U^ω devient une représentation équivalente, d'espace $L^2(N,X)$, que nous noterons encore U^ω, donnée par :

$$(2.2)\quad \begin{cases} [U^\omega(s_1)f](n) = \chi(s_1^{-1}, n)^{1/2}\ \omega(H(s_1^{-1}n)^{-1})f(s_1^{-1}.n) \quad (f \in L^2(N,X)) \\ \text{où } \chi(s_1^{-1},n) = \Delta_H\ \Delta_G^{-1}\ (H(s_1^{-1}n)) \quad (\text{ch } 5, \S\ 3). \end{cases}$$

2.3) Lorsque N est distingué (cas d'un produit semi-direct) on a, en posant $s_1 = n_1\ h_1$, avec $n_1 \in N$ et $h_1 \in H$:

$$s_1^{-1}n = h_1^{-1}\ n_1^{-1}\ n = (h_1^{-1}\ n_1^{-1}\ n\ h_1)\ h_1^{-1}$$

d'où $$s_1^{-1}.n = h_1^{-1}\ n_1^{-1}\ n\ h_1 \quad \text{et} \quad H(s_1^{-1}n) = h_1^{-1}. \quad \text{Ainsi :}$$

$$[U^\omega(s_1)f](n) = \Delta_H^{-1/2}\ \Delta_G^{1/2}\ (h_1)\ \omega(h_1)\ f(s_1^{-1}.n).$$

En particulier, en faisant $\omega = 1$, on obtient une version π_H de la représentation quasi-régulière associée à H, réalisée dans $L^2(N)$:

$$[\pi_H(s_1)f](n) = \Delta_H^{-1/2}\ \Delta_G^{1/2}\ (h_1)\ f(s_1^{-1}.n).$$

Revenons à ω quelconque, et choisissons $f \in L^2(N,X)$ du type : $x \mapsto f_1(x)\xi$ où $f_1 \in L^2(N)$ et $\xi \in X$, c-à-d l'image canonique dans $L^2(N,X)$ de $f_1 \otimes \xi \in L^2(N) \otimes X$, on a :

$$[U^\omega(s_1)f](n) = [[\pi_H(s_1)f_1](n)][\omega(h_1)\xi]$$

c-à-d que $U^\omega(s_1)f$ est l'image canonique de $\pi_H(s_1)f_1 \otimes \omega(h_1)\xi$.
Ainsi, on obtient une représentation U'^ω, équivalente à U^ω, dans le produit tensoriel hilbertien $L^2(N) \otimes X$ en posant, pour les éléments décomposés :

$$(U'^{\omega})(s_1)(f_1 \otimes \xi) = (\pi_H(s_1)f_1) \otimes (\omega \circ H(s_1)\xi).$$

On exprime ce fait en disant que U'^{ω} est le produit tensoriel de π_H et de $\omega \circ H$, qui est aussi une r.u.c. de G, puisque la projection sur H est, dans ce cas, un homomorphisme de groupes.

Supposons toujours N distingué, soit γ une r.u.c. de N d'espace X, calculons $\mathrm{ind}_N^G\ \gamma$. D'après (2.2), en échangeant les rôles de H et N, on a :

$$(\mathrm{ind}_N^G\ \gamma)(s_1)f(h) = \gamma(N'(s_1^{-1}h)^{-1})\ f(s_1^{-1}.h) \quad (f \in L^2(H,X))$$

car $\Delta_N\ \Delta_G^{-1} = 1$ sur N. Or, si $s_1 = n_1\ h_1$,

$$s_1^{-1}h = h_1^{-1}\ n_1^{-1}\ h = (h_1^{-1}\ h)(h^{-1}\ n_1^{-1}\ h) \quad \text{d'où :}$$

$$s_1^{-1}.h = h_1^{-1}\ h \quad \text{et} \quad N'(s_1^{-1}\ h) = h^{-1}\ n_1^{-1}\ h. \quad \text{Ainsi :}$$

$$(\mathrm{ind}_N^G\ \gamma)(s_1)f(h) = \gamma(h^{-1}\ n_1\ h)\ f(h_1^{-1}\ h).$$

3) Cas où il existe une section.

3.1) On peut démontrer que, sous les hypothèses faites sur G (séparabilité), pour tout sous-groupe fermé H, il existe une section borélienne $\sigma : G/H \to G$ de l'application canonique $\varphi : G \to G/H$. Autrement dit, l'application σ est borélienne et vérifie $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_{G/H}$. Dans les cas qui nous intéressent, nous saurons toujours expliciter une telle section : dans le cas G = NH, avec les hypothèses du § 2, lorsqu'on identifie G/H à N, on peut choisir pour σ l'injection canonique ; dans le cas du groupe de Poincaré, on sait toujours calculer de telles sections (cf. ch. 5).

3.2) Soit $x \in G$ et $\dot{x} = \varphi(x)$ sa classe dans G/H. On a $\varphi[\sigma(\dot{x})] = \dot{x} = \varphi(x)$ c-à-d que $x \in \sigma(\dot{x})H$ i.e. $\sigma(\dot{x})^{-1} x \in H$. Définissons $\theta : G \to H$ par la formule :

$$\theta(x) = \sigma(\dot{x})^{-1}x.$$

L'application θ est borélienne et vérifie $x = \sigma(\dot{x})\ \theta(x)$. On déduit en outre immédiatement de la définition que, si $h \in H$, on a :

$$(3.3) \qquad \theta(xh) = \theta(x)h.$$

Lorsque $G = NH$, l'application θ est tout simplement la projection sur H.

On peut prouver que σ peut être choisie telle que, pour tout compact K de G, l'ensemble $KH \cap \sigma(G/H)$ soit relativement compact (MACKEY, Annals of math, t.55 , 1952 ; WARNER loc. cit.). Dans ce cas, on montre que l'on peut choisir une mesure quasi-invariante λ sur G/H telle que la fonction χ associée soit :

$$\chi(s,\xi) = \Delta_G\ \Delta_H^{-1}\ (\theta(s\sigma(\xi))^{-1}).$$

(ce qui coïncide bien, lorsque $G = NH$ avec la formule trouvée au ch. V : $\chi(s,n) = \Delta_H\ \Delta_G^{-1}\ (H(sn)).$).

3.4) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* ω *une r.u.c. d'un sous-groupe fermé* H *de* G, *l'application* $f \mapsto f\circ\sigma$ *est une isométrie de l'espace* W *défini en (1.3) sur* $L^2(G/H,X)$. *La représentation* $\mathrm{ind}_H^G\omega$ *est équivalente à la représentation* π *définie dans* $L^2(G/H,X)$ *par la formule :*

$$(3.5) \quad (\pi(s)f)(\xi) = \chi(s^{-1},\xi)^{1/2}\ [\omega(\theta(s^{-1}\ \sigma(\xi))^{-1})]\ [f(s^{-1}.\xi)].$$

PREUVE. Naturellement, cet énoncé sous-entend le choix d'une mesure quasi-invariante λ sur G/H, qui permet de définir les espaces W et $L^2(G/H, X)$ et la fonction χ.

Soit $f \in W$, alors $f\circ\sigma$ est mesurable, et on sait que $|f(x)|^2$ ne dépend que de $\dot{x} = \sigma(\dot{x})$ donc $|f(x)|^2 = |f(\sigma(\dot{x}))|^2$ et 1.3 c assure donc que $f\circ\sigma \in L^2(G/H,X)$. Plus précisément, on a même $\|f\circ\sigma\|_2 = \|f\|$. Ainsi $f \mapsto f\circ\sigma$ est linéaire et isométrique. Elle est de plus surjective, car si $g \in L^2(G/H,X)$ il est immédiat que si l'on pose :

$$f(x) = \omega(\theta(x)^{-1})g(\dot{x})$$

on a $f \in W$ et $f\circ\sigma = g$. Notons que la formule ci-dessus donne explicitement l'isométrie de $L^2(G/H)$ sur W.

On peut donc, au moyen de l'isométrie $W \to L^2(G/H)$, réaliser $\mathrm{ind}_H^G\omega$ dans $L^2(G/H,X)$, et un simple calcul donne le résultat annoncé.

REMARQUES. - a) Dans la pratique, ceci signifie que l'on peut réaliser $\mathrm{ind}_H^G\omega$ dans tout $L^2(\Omega,X)$, où Ω est un espace homogène topologique de G isomorphe à G/H, muni de la mesure image de λ. Par exemple, lorsque $G = SL(2, \mathbb{C})$, et lorsque H est l'un des petits groupes, on remplacera G/H par l'orbite correspondante.

b) Il est possible de choisir la section σ telle que, en outre, $\sigma(G/H)$ soit borélien (cf WARNER I). Posons alors $\sigma(G/H) = M$, tout $s \in G$ s'écrit d'une manière unique $s = mh$ avec $m \in M$ et $h \in H$ et, plus précisément, l'application $(m,h) \mapsto mh$ est un isomorphisme d'espaces boréliens de $M \times H$ sur G. Ainsi, les résultats de ce paragraphe apparaissent comme une généralisation de ceux du paragraphe précédent ; pour avoir une analogie complète, il suffit de réaliser $\mathrm{ind}_H^G\omega$ dans $L^2(M,X)$, au lieu de $L^2(G/H),X)$, en utilisant l'isomorphisme d'espaces boréliens $\sigma: G/H \to M$, et en choisissant comme mesure sur M la mesure image de λ.

L'application $f \mapsto f{\circ}\sigma$ se réduit alors à la restriction : $f \mapsto f|M$.

4) Cas mixte.

4.1) Dans la pratique, nous rencontrerons la situation suivante : $G = NH = HN$ avec les hypothèses du § 2 ; H_o est un sous-groupe de H tel que H_oN soit encore un sous-groupe de G, ce qui équivaut à supposer que $H_oN = NH_o$ (condition toujours réalisée si N est distingué). Enfin, ω est une r. u. c. de H_oN dans un espace de Hilbert X telle que $\omega(n)$ soit une homothétie pour tout $n \in N$. Soit $\gamma(n) \in \mathbb{U}$ le rapport de cette homothétie, et soit ω_o la restriction de ω à H_o, on a donc :

$$\omega(h_on) = \gamma(n)\omega_o(h_o) \qquad (h_o \in H_o,\ n \in N),$$

où ω_o est une r. u. c. de H_o et γ un caractère de N (i.e. un homomorphisme continu : $N \to \mathbb{U}$). Notons que si, réciproquement, on se donne arbitrairement ω_o et γ, la formule précédente ne définit pas en général une représentation. Notons aussi que cette formule implique :

$$\omega(h_on) = \omega(nh_o).$$

Le problème à résoudre est de calculer $\mathrm{ind}_{H_oN}^{G}\ \omega$. Pour cela, nous avons besoin d'identifier les espaces homogènes H/H_o et G/H_oN, ce qui fait l'objet du lemme suivant :

4.2) LEMME. - (mêmes hypothèses et notations).

Pour tout $x \in G$, *soit* $p(x)$ *sa "projection" sur* H *dans la décomposition* $G = HN$. *Pour tout* $h \in H$ *(resp. tout* $x \in G$*), soit* $\dot{h} = hH_o$ *(resp.* $\overline{x} = x\,H_oN$*) sa classe dans* H/H_o *(resp.* G/H_oN *). Alors :*

a) L'application $\alpha : G/H_\circ N \to H/H_\circ$ *définie par* $\alpha(\bar{x}) = \widehat{\dot{p}(x)}$ *est bien définie et est un homéomorphisme ; l'homéomorphisme réciproque est défini par* $\alpha^{-1}(\dot{h}) = \bar{h}$.

b) Les applications α *et* α^{-1} *sont des* H*-morphismes c-à-d que* $\alpha(h.\xi) = h.\alpha(\xi)$ *et* $\alpha^{-1}(h.\eta) = h\alpha^{-1}(\eta)$ *pour tout* $h \in H$*, tout* $\xi \in G/H_\circ N$*, et tout* $\eta \in H/H_\circ$. *Lorsque* N *est distingué, on a de plus, pour tout* $s \in G$ *:*

$$\alpha(s.\xi) = p(s).\alpha(\xi).$$

c) La classe des mesures quasi-invariantes (par l'action de H*) sur* $H/H_\circ$ *est l'image par* α *de la classe des mesures quasi-invariantes (par l'action de* G*) sur* $G/H_\circ N$. *Soit* λ *une mesure quasi-invariante sur* $H/H_\circ$*, image de* λ' *mesure quasi-invariante sur* $G/H_\circ N$*, les fonctions* χ *et* χ' *correspondantes, définies respectivement sur* $H \times H/H_\circ$ *et* $G \times G/H_\circ N$*, sont liées par :*

$$\chi(h,\eta) = \chi'(h, \alpha^{-1}(\eta))$$

et, si N *est distingué, par*

$$\chi'(s,\xi) = \chi(p(s), \alpha(\xi)).$$

d) Soit $\sigma : H/H_\circ \to H$ *une section borélienne,* θ *la fonction associée ; alors* $\sigma_1 = \sigma\circ\alpha$ *est une section borélienne* $G/H_\circ N \to G$ *et la fonction* θ_1 *associée est définie, pour* $x = hn$ *(*$h \in H$ *et* $n \in N$*) par* $\theta_1(x) = \theta(h)n$ *c-à-d* $\theta_1(x) = \theta(p(x))\, p(x)^{-1}x$.

<u>Preuve</u> : Les points a), b) et d) sont évidents et laissés au lecteur. Pour c), remarquons que, si l'on transporte l'action à gauche de G sur $G/_{H_\circ N}$ en une action

à gauche sur $H/H_\circ$, au moyen de α, on obtient l'action :

$$(s,\eta) \to \alpha[s\alpha^{-1}(\eta)]$$

et le fait que α^{-1} soit un H-morphisme exprime que cette action se restreint, lorsque $s = h \in H$, à l'action canonique de H sur $H/H_\circ$.

Soit alors λ' une mesure quasi-invariante par G sur $G/NH_\circ$, la mesure image $\alpha(\lambda')$ sera quasi-invariante par l'action de G sur $H/H_\circ$, donc par celle de H, ce qui assure que $\alpha(\lambda') = \lambda$ appartient à l'unique classe de mesures quasi-invariantes sur $H/H_\circ$, et démontre la correspondance annoncée entre classes de mesures. La première formule sur χ et χ' en résulte. Quant à la seconde, elle provient du fait que, lorsque N est distingué, l'action de G sur $H/H_\circ$ est donnée par :

$$(s,\eta) \mapsto p(s).\eta$$

puisque dans ce cas, $\alpha(s\alpha^{-1}(\eta)) = p(s)\alpha\alpha^{-1}(\eta)$ (cf. b).

c.q.f.d.

REMARQUE 1. - Lorsque N n'est pas distingué, si $h \in H$, on a l'expression suivante pour l'action de $s \in G$ sur $\dot{h} \in H/H_\circ$; $s.\dot{h} = \alpha[s\alpha^{-1}(h)] = \widehat{p(s\dot{h})}$.

REMARQUE 2. - Lorsque N n'est pas distingué, la connaissance d'une mesure quasi-invariante λ sur $H/H_\circ$ et de la fonction χ correspondante détermine une mesure quasi-invariante λ' sur $G/H_\circ N$ mais ne détermine pas entièrement la fonction χ'. On verra qu'il peut arriver que λ soit invariante (i.e. $\chi = 1$) sans que λ' le soit (i.e. $\chi' \neq 1$).

4.3) PROPOSITION. - (Notations de 4.2).

Soit W *et* $W_\circ$ *les espaces des représentations* $\mathrm{ind}_{H_\circ N}^{G}\,\omega$ *et* $\mathrm{ind}_{H_\circ}^{H}\,\omega_\circ$ *(définis comme en 1.3). Alors l'application restriction* $f \mapsto f|H$ *est une isométrie de* W *sur* $W_\circ$.

PREUVE. - Soit $f \in W$ et $f_1 = f|H$ sa restriction à H. L'espace X de la représentation $\omega_\circ$ est aussi celui de ω et f_1 est évidemment une application mesurable $H \to X$ vérifiant : $f_1(hh_\circ) = \omega_\circ(h_\circ)^{-1}\, f_1(h)$.

La condition $\int_{G/H_\circ N} |f(x)|^2\, d\lambda'(\bar{x}) < +\infty$ signifie plus précisément qu'il existe $\tilde{f} \in L^1(G/H_\circ N,\ \lambda')$ telle que

$$|f(x)|^2 = \tilde{f}(\bar{x}), \quad \text{d'où} \quad |f_1(h)|^2 = \tilde{f}(\bar{h}) = (\tilde{f}{\circ}\alpha^{-1})(\dot{h}), \quad \text{avec}$$

$\tilde{f}{\circ}\alpha^{-1} \in L^1(H/H_\circ,\lambda)$, ce qui prouve que $\int_{H/H_\circ} |f_1(h)|^2 d\lambda(\dot{h}) < +\infty$ donc que $f_1 \in W_\circ$.

Réciproquement, soit $f_1 \in W_\circ$ et définissons f par la condition :

$$f(hn) = \gamma(n^{-1})f_1(h) \quad (n \in N,\ \ h \in H).$$

Alors f est mesurable et vérifie la condition :

$$f(su) = \omega(u)^{-1}f(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in G \quad \text{et tout} \quad u \in H_\circ N.$$

En effet, posons $s = hn$ et $u = n'h_\circ$, avec $h \in H$, $h_\circ \in H_\circ$ et $(n,n') \in N \times N$, ainsi,

$f(su) = f(hnn'h_\circ)$, soit n'' et $h'_\circ$ tels que :

$nn'h_\circ = h'_\circ n''$. Alors :

$$f(su) = f(hh'_\circ\, n'') = \gamma(n'')^{-1} f_1(hh'_\circ\,) = \gamma(n'')^{-1}\omega_\circ(h'_\circ\,)^{-1} f_1(h)$$
$$= \omega(n''h'_\circ\,)^{-1} f_1(h) = \omega(nn'h_\circ)^{-1} f_1(h)$$
$$= \omega(n'h_\circ)^{-1}\ \omega(n)^{-1} f_1(h) = \omega(u)^{-1} f(s)\ ,\ \ (\text{car}\ \ \omega(n) = \ (n)).$$

La condition d'intégrabilité sa vérifie comme dans la partie directe, ainsi $f \in W$, et l'application $f_1 \mapsto f$ définit une isométrie inverse de la restriction.

c.q.f.d.

L'isométrie de W et $W_\circ$ permet évidemment de réaliser $\mathrm{ind}_{H_\circ N}^{G}$ en une représentation équivalente dans $W_\circ$. Notons toujours $(s,h) \mapsto s.h$ l'action à gauche de G sur H ; le calcul conduit à l'énoncé suivant :

4.4) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *1) La représentation* $\mathrm{ind}_{H_\circ N}^{G}\,\omega$ *est équivalente à la représentation* π *définie, dans* $W_\circ$*, par la formule :*

$$[\pi(s)f_1](h) = \chi'(s^{-1},\bar{h})^{1/2}\ \gamma((s^{-1}.h)^{-1}\ s^{-1}h)^{-1} f_1(s^{-1}.h).$$

2) La restriction à H *de* $\mathrm{ind}_{H_\circ N}^{G}\,\omega_\circ$ *est équivalente à* $\mathrm{ind}_{H_\circ}^{H}\,\omega_\circ$.

<u>REMARQUE</u>. - L'élément $(s^{-1}.h)^{-1}s^{-1}h$ est la projection de $s^{-1}h$ sur N dans la décomposition $G = HN$.

<u>PREUVE</u>. - La preuve de 1 est un simple calcul fondé sur l'égalité :

$$s^{-1}h = (s^{-1}.h)\ [\,(s^{-1}.h)^{-1}\ s^{-1}h\,]$$

où l'on a, par définition, $s^{-1}.h \in H$ et $(s^{-1}.h)^{-1}\ s^{-1}h \in N$.

L'affirmation 2 résulte du fait que, lorsque $h \in H$, on a $\pi(h) = (\mathrm{ind}_{H_\circ}^{H}\,\omega)(h)$ car, si $s = h_1 \in H$, on a :

$$\chi'(h_1^{-1},\bar{h}) = \chi(h_1^{-1},\dot{h}) \quad \text{et} \quad h_1^{-1}.\,h = h_1^{-1}h.$$

4.5) COROLLAIRE 2. - *La représentation* $\mathrm{ind}_{H_\circ N}^{G}\,\omega$ *est aussi équivalente à la représentation* π' *de* G *définie dans* $L^2(H/H_\circ,X)$ *par la formule :*

$$[\pi'(s)g](\xi) = \chi'(s^{-1},\alpha^{-1}(\xi))^{1/2}\gamma[(s^{-1}.\sigma(\xi))^{-1}s^{-1}\sigma(\xi)]^{-1}\omega_\circ[\theta(s^{-1}.\sigma(\xi))^{-1}]g(s^{-1}.\xi)$$

où $s^{-1}.\xi = \alpha[s^{-1}\alpha^{-1}(\xi)]$.

(c.à.d. que l'on note $s.\xi$ l'action à gauche de $s \in G$ sur $\xi \in H/H_\circ$, alors que $s^{-1}.\sigma(\xi)$ note l'action à gauche de $s \in G$ sur $\sigma(\xi) \in H$, définie par l'identification de H à G/N).

PREUVE. - On utilise l'isométrie entre $W_\circ$ et $L^2(H/H_\circ,X)$ établie en 3.4.

4.6) REMARQUE 4. - La mesure λ sur $H/H_\circ$ est quasi-invariante par G ; il lui est donc associé une fonction χ'' qui n'est autre, puisque $\lambda = \alpha(\lambda')$ que $\chi''(s,\xi) = \chi'(s,\alpha^{-1}(\xi))$. Ainsi, le premier facteur du second membre de l'égalité définissant $[\pi'(s)g](\xi)$, c-à-d $\chi'[s^{-1},\alpha^{-1}(\xi)]^{1/2}$ n'est autre que $\chi''(s^{-1},\xi)$.

5) Premier exemple : série principale de représentations de $SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ et $SU(1,1)$.

La décomposition d'Iwasawa de $SL(2,\mathbb{R})$ et $SL(2,\mathbb{C})$ va nous servir à nouveau. On écrira donc chacun de ces deux groupes sous la forme $G = KAN$ avec les notations déjà précisées antérieurement (ch. II, 3.5 et ch. V, 5.4).

5.1) On sait, depuis le chapitre I, (2.14), que $SU(1,1)$ est l'image de $SL(2,\mathbb{R})$ par l'automorphisme intérieur de $SL(2,\mathbb{C})$: $X \mapsto C^{-1}XC$ où $C = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $C^{-1} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $SU(1,1)$ admet aussi une "décomposition d'Iwasawa" $G = KAN$ possédant les mêmes propriétés que celles de $SL(2,\mathbb{R})$. On trouve explicitement que :

-) K est l'ensemble des $\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ avec $u \in \mathbb{U}$.

-) A est l'ensemble des $\begin{pmatrix} cht & isht \\ -isht & cht \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

-) N est l'ensemble des $\begin{pmatrix} 1+i\xi & \xi \\ \xi & 1-i\xi \end{pmatrix}$ avec $\xi \in \mathbb{R}$.

5.2) Pour chacun des groupes $SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ et $SU(1,1)$, on désignera par M le commutant de A dans K ;

-) $M = \{\pm I\}$ si $G = SL(2,\mathbb{R})$ ou $SU(1,1)$;

-) M = l'ensemble des $\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$, avec $u \in \mathbb{U}$, si $G = SL(2,\mathbb{C})$.

Notons que, dans le cas de $SL(2,\mathbb{R})$ et $SU(1,1)$, le sous-groupe M est le centre du groupe considéré. En particulier, il est distingué. Dans ces deux cas, il est donc évident que $P = MAN$ est un sous-groupe du groupe correspondant, puisqu'on sait déjà que AN est lui-même un sous-groupe. Dans le cas de $SL(2,\mathbb{C})$, un calcul matriciel élémentaire permettra au lecteur de s'assurer que MAN est bien encore un sous-groupe, c-à-d que $MAN = ANM$: il suffit de vérifier que, pour tout $m \in M$ et tout $n \in N$, il existe $n' \in N$ tel que :

$$mn = n'm.$$

Cette formule permet également de vérifier que, pour toute représentation ω_o de M et tout caractère γ de A, la formule

$$\omega(man) = \gamma(a)\ \omega_\circ(m),$$

définit une représentation de P dans l'espace de $\omega_\circ$.

5.3) On peut prouver (cf. par ex. WARNER, Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I, 5.5.1.3) que l'ensemble des représentations irréductibles de P continues et de dimension finie (non nécessairement unitaires) est obtenu en faisant varier $\omega_\circ$ dans les représentations continues irréductibles de dimension finie de M et γ dans l'ensemble des homomorphismes continus $A \to \mathbb{C} - \{o\}$. Si l'on désire se limiter, comme nous le ferons, au cas unitaire, il suffit de ne considérer que des caractères γ de A, la représentation $\omega_\circ$ étant toujours unitarisable (cf. Ch. 5, (1.14)). Dans les cas qui nous intéressent, $\omega_\circ$ et γ sont faciles à expliciter :

-) Si $M = \{\pm I\}$, il n'existe que deux représentations irréductibles, qui sont de dimension 1 et déterminées par le caractère trivial σ_+, et par le caractère σ_- tel que $\sigma^-(- I) = - 1$.

-) Si $M = \{\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}, u \in \mathbb{U}\}$, l'isomorphisme évident de M et de $\mathbb{U}$ montre que les représentations irréductibles de M sont déterminées par les caractères $\sigma_n : \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} \mapsto u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ (cf. Ch. III, 4.2, exemple 2).

- Comme le groupe A est toujours isomorphe à $\mathbb{R}$, ses caractères sont faciles à expliciter. Nous emploierons les notations suivantes, plus ou moins traditionnelles : soit $\nu = 2i\lambda$ un nombre imaginaire pur $(\lambda \in \mathbb{R})$; si $a \in A$, la notation a^ν désigne α^ν lorsque $a = \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, alors qu'elle désigne $e^{\nu t}$ si $a = \begin{pmatrix} cht & isht \\ -isht & cht \end{pmatrix}$. Ainsi, l'ensemble des caractères de A est l'ensemble des a^ν.

5.4) <u>DEFINITION</u>. - *On appelle série principale de représentations du groupe* $G = SL(2, \mathbb{C})$ *ou* $SL(2, \mathbb{R})$ *ou* $SU(1,1)$ *l'ensemble des représentations* $U^{\sigma,\nu}$ *obtenues en induisant de* $P = MAN$ *à* G *les représentations de* P *du type :*

$$man \mapsto \sigma(m)a^{\nu}$$

où σ *est une r.u.c. irréductible de* M *et* $\nu \in i\,\mathbb{R}$.

On voit que ces représentations se calculent en appliquant les résultats du § 4 : ici le rôle de H est joué par K, celui de N par AN, celui de $H_\circ$ par M, alors que $\omega_\circ$ et γ sont à remplacer par σ et $a \mapsto a^{\nu}$.

<u>Calculs complets dans le cas de $SU(1,1)$</u>.

Nous allons expliciter complètement la formule que donne le corollaire 2 du § 4 dans le cas de $SU(1,1)$.

(5.5) Pour expliciter K/M et sa mesure invariante, considérons l'homomorphisme $K \to \mathbb{U} : \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} \mapsto u^2$. Comme son noyau est égal à M, il détermine, par passage au quotient, un homomorphisme bijectif et continu de K/M, qui est ici un groupe puisque M est distingué, sur $\mathbb{U}$. Comme K/M est compact, il s'agit d'un isomorphisme de groupes topologiques. On sait de plus que, puisque M est distingué, la mesure invariante sur K/M par l'action de K est la mesure de Haar du groupe quotient K/M. Au total, K/M s'identifie donc à $\mathbb{U}$, à condition de faire agir K sur $\mathbb{U}$ par $(\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}, v) \mapsto u^2 v$ (où $u \in \mathbb{U}$ et $v \in \mathbb{U}$), et la mesure de Haar de $\mathbb{U}$ est invariante par cette action.

Il nous reste à expliciter l'action de $SU(1,1)$ sur $\mathbb{U}$, et à calculer la fonction χ' correspondante. Afin d'obtenir des formules plus agréables, nous modifions d'abord comme suit, la décomposition d'Iwasawa de $SU(1,1)$:

Soit $C_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & o \\ o & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$, en transformant encore K, A, N par l'automorphisme intérieur $X \mapsto C_1 X C_1^{-1}$ de SU(1,1) , on obtient :

$$C_1 \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} C_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & -ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

donc, K est invariant, A est transformé en l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$ et N en l'ensemble des $\begin{pmatrix} 1+i\xi & -i\xi \\ i\xi & 1-i\xi \end{pmatrix}$.

Nous utiliserons dorénavant cette nouvelle décomposition d'Iwasawa. Naturellement, si $a = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$, la notation a^{ν} désigne $e^{\nu t}$. Un premier avantage de cette décomposition est le suivant : le sous-groupe H = AN de SU(1,1) se caractérise très simplement : c'est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ telles que $a+b > o$. On en déduit très facilement les "projections" de SU(1,1) sur K et H dans la décomposition KH :

Soit $s = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, il s'agit de déterminer $k = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ avec $|u| = 1$, et $h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$ avec $a'+ b' > o$, tels que $s = kh$. On trouve $u = \frac{a+b}{|a+b|}$ et $a'+ b' = |a+b|$. On en déduit facilement l'action de SU(1,1) sur K :

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} v & o \\ o & \bar{v} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad v = \frac{au+b\bar{u}}{|au+b\bar{u}|} .$$

On en déduit enfin l'action de SU(1,1) sur $\mathbb{U}$: soit $z \in \mathbb{U}$, image de $k = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} \in K$ telle que $u^2 = z$, il lui correspond $(\pm k) \in K/M$, et l'on sait que l'action de $s = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ sur $(\pm k)$, soit $s.(\pm k)$, est la classe, dans K/M, de s.k, c-à-d que $s.(\pm k) = (\pm k')$, où $k' = \begin{pmatrix} v' & o \\ o & \bar{v}' \end{pmatrix}$ avec $v' = \frac{au+b\bar{u}}{|au+b\bar{u}|}$. L'action s.z est donc l'image dans $\mathbb{U}$ de k' c-à-d :

$$\left(\frac{au+b\bar{u}}{|au+b\bar{u}|}\right)^2 = \frac{au+b\bar{u}}{\bar{a}\bar{u}+\bar{b}u} = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \quad .$$

Ainsi, si $s = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ et $z \in \mathbb{U}$, on a :

$$s.z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \quad .$$

On sait que la mesure de Haar de $\mathbb{U}$ doit être quasi-invariante par cette action de $SU(1,1)$. Effectivement, sachant que la mesure de Haar de $\mathbb{U}$ est définie par :

$$\int_{\mathbb{U}} f(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{o}^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta$$

(c'est aussi l'intégrale "le long de S^1" de $f(z)\,\frac{dz}{z}$), on trouve, par simple changement de variables que :

$$\int_{\mathbb{U}} f(s^{-1}.z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{U}} f(z)|az+b|^{-2} d\mu(z)$$

c-à-d que la fonction χ'' introduite en 4.6 est :

$$\chi''(s,z) = |az+b|^{-2} \quad \text{(noyau de Poisson) si} \quad s = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

La formule (4.5) montre que la représentation induite peut se réaliser dans $L^2(K/M)$, donc dans $L^2(\mathbb{U})$. Il faut cependant, pour cela, préciser une section $\mathbb{U} \to K$, et la formule obtenue par simple application de (4.5) est alors compliquée dans le cas du caractère σ^-. Pour en déduire la formule classique, il est de plus nécessaire d'effectuer une autre isométrie de $L^2(\mathbb{U})$ sur lui-même. Au total, il est plus simple de passer par l'intermédiaire de la formule (4.4).

Pour cela, soit W^+ (resp. W^-) l'espace $W_\circ$ relatif à la représentation $\mathrm{ind}_M^K\, \sigma_+$ (resp. $\mathrm{ind}_M^K\, \sigma_-$). On trouve que W^+ (resp. W^-) est l'espace des fonctions paires (resp. impaires) sur K, c-à-d telles que $f(k) = f(-k)$ (resp. $f(k) = -f(-k)$) pour tout $k \in K$.

La formule (4.4) ne dépend que de γ, c-à-d ici de ν, c'est l'espace de la représentation qui change. On a à calculer $\chi'(s^{-1}, \bar{k})$, $\gamma((s^{-1}.k)^{-1} s^{-1}k)$ et $f_1(s^{-1}.k)$. Soit $k = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ avec $|u| = 1$ et supposons $s^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ i.e. $s = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}$, on sait déjà que :

$$\chi'(s^{-1}, \bar{k}) = \chi''(s^{-1}, \dot{k}) = |au^2 + b|^{-2} .$$

On a $s^{-1}k = \begin{pmatrix} au & b\bar{u} \\ \bar{b}u & \overline{au} \end{pmatrix}$, d'où l'on déduit, par projection sur K et $H = AN$, d'après un calcul fait précédemment :

$$s^{-1}.k = \begin{pmatrix} v & o \\ o & \bar{v} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad v = \frac{au + b\bar{u}}{|au + b\bar{u}|} ,$$

et $(s^{-1}.k)^{-1}\, s^{-1}k = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$ avec $a' + b' = |au + b\bar{u}|$.

Comme la projection de $H = AN$ sur A est donnée par la formule, facile à vérifier :

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad e^t = \mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t = a' + b'$$

on voit que $\gamma((s^{-1}.k)^{-1}\, s^{-1}k) = |au + b\bar{u}|^{\nu}$, ce qui donne :

5.6) $$(\pi(s)f_1(k) = |au^2 + b|^{-1-\nu}\, f_1(s^{-1}.k)$$

avec $s^{-1}.k = \begin{pmatrix} v & o \\ o & \bar{v} \end{pmatrix}$ où $v = \dfrac{au+b\bar{u}}{|au+b\bar{u}|}$

et cette formule définit une représentation équivalente à $U^{\sigma_+\nu}$ ou $U^{\sigma_-\nu}$, suivant que f_1 varie dans W^+ ou W^-. Remarquons que, si l'on désigne par χ le caractère de K défini par $\chi(\begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}) = u$, l'application $f \mapsto \chi f$ réalise une isométrie de W^- sur W^+, dont la réciproque est $f \to \bar{\chi} f$. Cette isométrie permet de réaliser $U^{\sigma_-\nu}$ dans W^+, ce qui donne la représentation notée π^- :

5.7) $$(\pi^-(s)f_1)(k) = |au^2 + b|^{-1-\nu} \, \frac{\bar{b}u^2 + \bar{a}}{|au^2 + b|} \, f_1(s^{-1}.k).$$

Enfin, d'après (1.4), $L^2(\mathbb{U})$ est isomorphe à W^+ par l'isométrie $f \mapsto f \circ \chi^2$. En effet, σ^+ est le caractère trivial de M, donc W^+ est l'espace de la représentation quasi-régulière associée au sous-groupe M de H_o. En transportant, au moyen de cette isométrie les formules (5.6) et (5.7), on obtient en définitive, les réalisations suivantes de $U^{\sigma_+\nu}$ et $U^{\sigma_-\nu}$, que nous noterons simplement $U^{+\nu}$ et $U^{-\nu}$:

$$(U^{+\nu}(s)f)(z) = |az + b|^{-1-\nu} \, f(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}) \quad ;$$

$$(U^{-\nu}(s)f)(z) = |az + b|^{-1-\nu} \, \frac{\bar{b}z + \bar{a}}{|az + b|} \, f(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}) \quad ;$$

où $f \in L^2(\mathbb{U})$ et $s^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$.

Notons que $|az + b| = |\bar{b}z + \bar{a}|$ et que l'on regroupe souvent ces deux formules de la façon suivante :

soit $-1-\nu = -2s$ i.e. $s = \frac{\nu+1}{2}$ et $j \in \{0, \frac{1}{2}\}$:

$$(V_g^{j,s} f)(z) = |\bar{b}z + \bar{a}|^{-2s} \left(\frac{\bar{b}z + \bar{a}}{|\bar{b}z + \bar{a}|}\right)^{2j} \, f(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}).$$

REMARQUES. - 1) On démontre que les représentations $V^{j,s}$ sont toutes irréductibles, (on suppose $j = 0$ ou $1/2$ et $s \in \frac{1}{2} + i\,\mathbb{R}$) sauf $V^{1/2\ 1/2}$ (i.e. $U^{\sigma_-,o}$) qui est somme directe de deux irréductibles.

2) On démontre aussi que $V^{j,s}$ est équivalente à $V^{j,s-1}$; dans les autres cas, les $V^{j,s}$ sont deux à deux disjointes.

3) L'ensemble des représentations irréductibles de $SL(2, \mathbb{R})$, $SU(1,1)$ et $SL(2, \mathbb{C})$ comporte, outre la série principale, la "série complémentaire" et, dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ et $SU(1,1)$ la "série discrète". (On trouvera l'étude complète des représentations de $SL(2, \mathbb{R})$ dans SUGIURA : Unitary representations and harmonic analysis, ou LANG : $SL(2, \mathbb{R})$. Pour $SL(2, \mathbb{C})$, se reporter à WARNER : Harmonic analysis on semi-simple Lie groups T. II).

6) Description de la méthode de Mackey (ou méthode des petits groupes) pour un produit semi-direct. Exemple de ST(2).

Dans ce paragraphe, nous allons décrire la méthode de MACKEY (ou WIGNER-MACKEY) qui permet de calculer toutes les représentations irréductibles d'un produit semi-direct topologique $G = NH$, où N est distingué abélien, sous certaines hypothèses, toujours vérifiées dans les cas qui nous intéressent, que nous préciserons au § 7. Notons que cette méthode peut s'étendre à des cas où N n'est pas abélien, et même où N est simplement distingué dans G, sans être facteur semi-direct (cf MACKEY : the theory of group representations, University of Chicago 1955).

6.1) Soit donc $G = NH$ un groupe localement compact séparable, produit semi-direct d'un sous-groupe distingué abélien N et d'un autre sous-groupe fermé H. Conformément au chapitre III, nous notons $\hat{N}$ le groupe dual de N, ensemble des caractères de N.

6.2) Action à gauche de H sur $\hat{N}$.

Comme N est distingué, G opère dans N par les automorphismes $\sigma_s : n \mapsto sns^{-1}$ (où $s \in G$). En fait, si $s = n' \in N$, comme N est abélien, $\sigma_{n'} = id_N$ et, plus généralement, si $s = nh = hn'$ (avec $n \in N$, $n' \in N$ et $h \in H$), on a $\sigma_s = \sigma_h$, de sorte qu'en fait, seule l'action de H importe. Nous nous limiterons à elle désormais. On peut alors faire opérer H dans $\hat{N}$ suivant une action $H \times \hat{N} \to \hat{N}$ notée $(h,\hat{n}) \mapsto h.\hat{n}$ et définie par la formule :

$$<n,h.\hat{n}> = <\sigma_{h^{-1}}(n),\hat{n}> = <h^{-1}nh,\hat{n}>.$$

Il est immédiat que l'on obtient ainsi une action à gauche continue de H dans $\hat{N}$. Cette action décompose $\hat{N}$ en orbites ; le cas échéant, nous noterons $O_{\hat{n}}$ l'orbite de $\hat{n}$.

Notons que, parmi ces orbites, il y a toujours une orbite O_1 réduite à un point, que l'on obtient en choisissant pour $\hat{n}$ le caractère trivial égal à 1.

6.3) Petits groupes.

Pour tout $\hat{n} \in \hat{N}$, la stabilisateur de $\hat{n}$ dans H, que nous noterons le cas échéant $H_{\hat{n}}$, est un sous-groupe fermé de H. Ces sous-groupes $H_{\hat{n}}$ seront appelés petits groupes ; plus précisément, $H_{\hat{n}}$ est le petit groupe associé à $\hat{n}$. On sait (ch. I) que les petits groupes associés à une orbite (i.e. aux points d'une orbite) sont tous conjugués entre eux. Le petit groupe associé à 1 n'est autre que H.

6.4) Représentations de G associées.

Soit $\hat{n} \in \hat{N}$ et soit ω une r.u.c. irréductible de $H_{\hat{n}}$. Nous noterons (abusivement) $\hat{n} \times \omega$ la r.u.c. du sous-groupe $H_{\hat{n}}N$ dans l'espace V_ω de ω définie par

6.5) $$(\hat{n} \times \omega)(nh) = \langle n,\hat{n}\rangle\omega(h) \qquad (n \in N,\ h \in H_{\hat{n}}).$$

Notons que $H_{\hat{n}}N$ est bien un sous-groupe de G, puisque N est distingué, c'est même le produit semi-direct de $H_{\hat{n}}$ et N. D'autre part, la formule (6.5) définit bien une représentation, parce que $H_{\hat{n}}$ est le stabilisateur de $\hat{n}$; la continuité est évidente. On notera $\pi_{\hat{n},\omega} = \mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}N}^{G}(\hat{n} \times \omega)$. On dira que $\pi_{\hat{n},\omega}$ est associée à $(\hat{n},\omega)$, mais aussi à $\hat{n}$...

6.6) Résultats de Mackey.

Dans tous les cas qui nous intéressent, seront vrais les résultats suivants dont les conditions de validité seront précisées au § 7.

a) L'ensemble des classes des $\pi_{\hat{n},\omega}$ obtenues pour un $\hat{n}$ fixé, ω variable, ne dépend que de l'orbite de $\hat{n}$. Plus précisément, pour tout $h \in H$, la représentation $\pi_{\hat{n},\omega}$ est équivalente à $\pi_{h.\hat{n},\omega\circ\sigma_{h^{-1}}}$.

L'ensemble des classes de ces représentations sera appelé l'ensemble des classes de représentations ou, abusivement, des représentations associées à $O_{\hat{n}}$.

b) Les représentations $\pi_{\hat{n},\omega}$ et $\pi_{\hat{n}',\omega'}$ ne sont jamais équivalentes si $\hat{n}$ et

$\hat{n}'$ n'appartiennent pas à la même orbite et $\pi_{\hat{n}\omega}$ est équivalente à $\pi_{\hat{n}\omega'}$, si et seulement si ω est équivalente à ω'.

c) Les représentations $\pi_{\hat{n},\omega}$ sont toutes irréductibles et constituent, à équivalence près, la liste complète des représentations irréductibles de G.

6.7) <u>Forme explicite de $\pi_{\hat{n},\omega}$ dans $L^2(H/H_{\hat{n}}, V_\omega)$.</u>

On peut réaliser $\pi_{\hat{n},\omega}$ dans $L^2(H/H_{\hat{n}}, V_\omega)$, grâce au corollaire 4.5 du § 4. Rappelons les notations :

- σ est une section borélienne de $H/H_{\hat{n}}$ dans H (notion définie en 3.1).

- θ est l'application borélienne : $H \to H_\circ$ telle que, pour tout $h \in H$, de classe $\dot{h}$ dans $H/H_\circ$, on ait $h = \sigma(\dot{h})\ \theta(h)$ (cf. 3.2).

- On suppose choisie une mesure quasi-invariante λ sur $H/H_\circ$, à laquelle est associée une fonction χ sur $H \times H/H_\circ$ (ch. 5, 3.8), la fonction χ' figurant dans la formule 4.5 est donnée, dans ce cas (4.2, c) par :

$$\chi'(s,\xi) = \chi(p(s), \alpha(\xi))$$

où p est la "projection" de G sur H associée à la décomposition $G = HN$, et α l'application de $G/H_\circ N$ dans $H/H_\circ$ définie par $\alpha(\overline{x}) = \dot{p(x)}$, pour tout $x \in G$, de classe $\overline{x} \in G/H_\circ N$.

Soit donc $s = n_1\ h_1 \in G$, de sorte que $p(s) = h_1$. On a :

-) $\chi'(s^{-1}, \alpha^{-1}(\xi)) = \chi(h_1^{-1},\xi)$;

-) $s^{-1}.\xi = h_1^{-1}.\xi$, car on a remarqué (fin de la preuve de 4.2) que, du fait que N est distingué, l'action de $s \in G$ sur $\xi \in H/H_\circ$ se réduit à celle de $p(s)$.

-) $s^{-1}.\sigma(\xi) = h_1^{-1}\sigma(\xi)$ car $s^{-1}\sigma(\xi) = (h_1^{-1}\sigma(\xi))\ (\sigma(\xi)^{-1}\ n_1^{-1}\sigma(\xi))$ avec $h_1^{-1}\sigma(\xi) \in H$ et $\sigma(\xi)^{-1}\ n_1^{-1}\ \sigma(\xi) \in N$.

On doit donc remplacer, dans la formule (4.5), $\omega\,[\theta(s^{-1}.\sigma(\xi))^{-1}]$ par $\omega(\theta(h_1^{-1}\sigma(\xi))^{-1})$, et $\gamma((s^{-1}.\sigma(\xi))^{-1}s^{-1}\sigma(\xi)$ par $<\sigma(\xi)^{-1}n_1^{-1}\sigma(\xi),\hat{n}> = <n_1^{-1},\sigma(\xi).\hat{n}>$, ce qui donne

6.8) $[\pi_{\hat{n},\omega}(s)g](\xi) = \chi(h_1^{-1},\xi)^{1/2}\ <n_1,\sigma(\xi).\hat{n}>\ \omega(\theta(h_1^{-1}\sigma(\xi))^{-1})\ g(h_1^{-1}.\xi)$

où $s = n_1\ h_1$, avec $n_1 \in N$ et $h_1 \in H$, et $g \in L^2(H/H_\circ,\ V_\omega)$.
Notons que l'on peut choisir λ telle que :

$$\chi(h_1^{-1},\xi) = \Delta_{H_\circ}\ \Delta_H^{-1}\ (\theta(h_1^{-1}\sigma(\xi))) \qquad \text{(cf. 3.2)}$$

et que, si $\dot{h} = \xi$, on a $\sigma(\xi).\ \hat{n} = \sigma(\dot{h})\ \theta(h).\hat{n}$ car $\theta(h) \in H_{\hat{n}}$, c-à-d que $\sigma(\dot{h}).\hat{n} = h.\hat{n}$.

6.9) <u>Forme explicite de $\pi_{\hat{n},\omega}$ dans l'espace de $\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}}^{H}\ \omega$.</u>

On sait qu'on peut réaliser (formule 4.4) $\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}N}^{G}\hat{n}\times\omega$ dans l'espace W de la représentation $\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}}^{H}\ \omega$. Dans le cas particulier ici étudié, N étant distingué, cette formule se simplifie beaucoup. En effet, on sait que, dans ce cas:

$$\chi'(s^{-1},\overline{h}) = \chi(p(s)^{-1},\dot{h})$$

c-à-d que, si $s = n_1\ h_1$, on a : $\chi'(s^{-1},\overline{h}) = \chi(h_1^{-1},\dot{h})$. D'autre part, avec les mêmes notations :

$$s^{-1}h = h_1^{-1}\ n_1^{-1}\ h = (h_1^{-1}\ h)(h^{-1}\ n_1^{-1}\ h)$$

d'où $\quad s^{-1}.h = h_1^{-1}\ h$ et $(s^{-1}.h)^{-1}\ s^{-1}h = h^{-1}\ n_1^{-1}\ h$,

ce qui donne la réalisation suivante de $\pi_{\hat{n},\omega}$ dans $W_\circ$:

$$[\pi_{\hat{n}\omega}(s)f_1](h) = \chi(h_1^{-1}, \dot{h})^{1/2} \quad <h^{-1} n_1 h, \hat{n}> \ f_1(h_1^{-1} h)$$

c-à-d
$$[\pi_{\hat{n}\omega}(s)f_1](h) = \chi(h_1^{-1}, \dot{h})^{1/2} \quad <n_1, h.\hat{n}> f_1(h_1^{-1} h),$$

et comme, ainsi qu'on l'a déjà remarqué en 4.4, 2) :

$$[(\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}}^{H} \omega)(h_1)f](h) = \chi(h_1^{-1}, \dot{h})^{1/2} \ f_1(h_1^{-1} h)$$

cette formule s'écrit aussi :

$$[\pi_{\hat{n},\omega}(s) \ f_1](h) = <n_1, h.\hat{n}> [(\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}}^{H} \omega)(h_1) \ f_1] \ (h)$$

où, rappelons-le, $f_1 \in W$, $n_1 \in N$, $h_1 \in H$ et $s = n_1 h_1$.

6.10) <u>Remarque</u>. - Naturellement, l'emploi des formules précédentes est "réservé" au cas général. Si, par exemple, $H_{\hat{n}} = \{e\}$, on emploiera simplement la formule établie en (2.3) pour N distingué. Un autre cas très simple est celui de l'orbite O_1 réduite au caractère trivial de N. Dans ce cas, $H_{\hat{n}} = H$, donc $H_{\hat{n}}N = G$, la représentation $\hat{n} \times \omega$ est définie par : $nh \mapsto \omega(h)$, ceci pour toute r.u.c. de H. Dans ce cas, évidemment, la représentation induite lui est identique ; on obtient ainsi une famille particulière de r.u.c. irréductibles de G obtenues par factorisation des r.u.c. irréductibles de H par la "projection" sur H qui est un homomorphisme de groupes. En fait, tenant compte de l'isomorphisme de H et du groupe-quotient G/N, on retrouve ainsi que les r.u.c. de G/N s'identifient aux r.u.c. de G dont le noyau contient N.

6.11) <u>Exemple de ST(2)</u>.

On sait, (cf. Ch. I, (3.4)), que $G = ST(2)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$; on désigne par N et H les sous-groupes constitués respectivement par les matrices du type $n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ o & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$.

Le sous-groupe N est distingué et isomorphe à $\mathbb{C}$ (additif) et à $\mathbb{R}^2$, alors que H est isomorphe à $\mathbb{U}$. Le groupe G est le produit semi-direct topologique interne NH et la formule :

$$hnh^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u^2z \\ o & 1 \end{pmatrix}$$

montre que G est isomorphe au produit semi-direct externe $\mathbb{C} \circledS \mathbb{U}$, obtenu en définissant sur $\mathbb{C} \times \mathbb{U}$ une loi de groupe par la formule :

$$(z,u)(z',u') = (z + u^2z', uu'),$$

autrement dit, en faisant opérer linéairement et continûment $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$(u,z) \mapsto u^2z.$$

Ici, $\hat{N}$ s'identifie à $\mathbb{C}$, par la formule :

$$<n,\zeta> = e^{i\ \mathrm{Re}(z\bar{\zeta})}, \quad \text{où} \quad n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ o & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Par définition, l'action de H sur $\mathbb{C}$ est définie par :

$$<n,h.\zeta> = <h^{-1}nh,\zeta> = e^{i\ \mathrm{Re}(\bar{u}^{-2}z\bar{\zeta})} = <n,u^2\zeta> ;$$

d'où : $h.\zeta = u^2\zeta$, si $h = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$. On en déduit que :

a) L'orbite O_ζ de ζ est le cercle de centre O de rayon $|\zeta|$; si $\zeta = \{o\}$, on retrouve que $O_o = \{o\}$, ce qui correspond au caractère trivial.

b) Le stabilisateur de tout point $\zeta \neq o$ est le sous-groupe $M = \{\pm I\}$ de H, et celui de o est évidemment H.

D'après les résultats de Mackey, on obtiendra un représentant et un seul de chaque classe de r.u.c. irréductibles de G en choisissant dans chaque orbite un représentant $\hat{n}$, et en calculant les $\pi_{\hat{n},\omega}$ associées, ω variant dans les r.u.c. irréductibles de $H_{\hat{n}}$.

Mettons à part l'orbite nulle dont le cas a déjà été réglé en 6.10 : le calcul des représentations associées revient à celui des r.u.c. irréductibles de H, c-à-d de $\mathbb{U}$, c-à-d au calcul des caractères de $\mathbb{U}$, problème déjà résolu.

Choisissons comme représentant de chaque orbite $\neq \{o\}$ son point d'intersection avec le demi-axe réel positif, on peut ainsi associer, à tout $r > o$, la famille des $\pi_{r,\omega}$ où ω est l'une des deux représentations σ^+ ou σ^- de M introduites en 5.2. Explicitement :

$$\pi_{r,\sigma^+} = \mathrm{ind}_{MN}^{G}\ r \times \sigma^+ \quad \text{et} \quad \pi_{r,\sigma^-} = \mathrm{ind}_{MN}^{G}\ r \times \sigma^-$$

où $(r \times \sigma^+)(mn) = \langle n,r\rangle = e^{ir\,\mathrm{Re}(z)}$ et $(r \times \sigma^-)(\pm n) = \pm \langle n,r\rangle = \pm e^{ir\,\mathrm{Re}(z)}$, en supposant que $n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ o & 1 \end{pmatrix}$.

Suivant la même démarche qu'en (5.5), nous identifions H/M à $\mathbb{U}$ par le même procédé, mais nous réalisons d'abord π_{r,σ^+} et π_{r,σ^-} dans W^+ et W^- avant de les réaliser dans $L^2(\mathbb{U})$. Comme $\chi = 1$, la formule est très simple, on obtient la représentation π :

$$(\pi\ (s)f_1)(h) = \langle n_1, h.r\rangle\ f_1(h_1^{-1}h) \quad \text{où} \quad f_1 \in W^+ \quad \text{ou} \quad f_1 \in W^-,$$

et où $s = n_1 h_1$. Si $s = \begin{pmatrix} v & z \\ o & \bar{v} \end{pmatrix}$, on a donc $n_1 = \begin{pmatrix} 1 & vz \\ o & 1 \end{pmatrix}$ et $h_1 = \begin{pmatrix} v & o \\ o & \bar{v} \end{pmatrix}$, si $h = \begin{pmatrix} u & o \\ o & \bar{u} \end{pmatrix}$, il vient :

$$(\pi(s)f_1)(h) = e^{ir\,\mathrm{Re}(v\bar{u}^2 z)}\ f_1(h_1^{-1}h) \quad \text{avec} \quad h_1^{-1}h = \begin{pmatrix} \bar{v}u & o \\ o & v\bar{u} \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'isométrie de W^- et W^+ définie par le caractère χ de H, on transforme, comme dans le cas de SU(1,1), la représentation π définie par la formule précédente dans W^-, en une représentation π^- dans W^+, équivalente à π_{r,σ^-}, et donnée par :

$$(\pi^-(s)f_1)(h) = v\, e^{ir\, \mathrm{Re}(v\bar{u}^{-2}z)}\, f_1(h_1^{-1}h).$$

Enfin, l'isométrie $f \mapsto f\circ\chi^2$ de $L^2(\mathbb{U})$ sur W^+ donne les réalisations suivantes de π_{r,σ^+} et π_{r,σ^-} :

$$[\pi_{r,\sigma^+}(s)f](w) = e^{ir\, \mathrm{Re}(v\bar{w}z)} f(\bar{v}^{2}w)$$

$$[\pi_{r,\sigma^-}(s)f](w) = ve^{ir\, \mathrm{Re}(v\bar{w}z)} f(\bar{v}^{2}w)$$

où $f \in L^2(\mathbb{U})$ et $s = \begin{pmatrix} v & z \\ o & \bar{v} \end{pmatrix}$.

L'isométrie de $L^2(\mathbb{U})$ sur $L^2(\mathbb{U})$ qui associe à $z \mapsto f(z)$, la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ permet d'obtenir la forme équivalente :

$$(\pi_{r,\sigma^+}(s)f)(w) = e^{ir\, \mathrm{Re}(vwz)} f(v^2w)$$

$$(\pi_{r,\sigma^-}(s)f)(w) = ve^{ir\, \mathrm{Re}(vwz)} f(v^2w).$$

En résumé :

6.11) <u>THEOREME</u>. - *Toute représentation unitaire continue irréductible de* ST(2) *est équivalente à une et une seule des représentations des deux familles suivantes :*

a) Une famille de représentations de dimension 1 indexées par $n \in \mathbb{Z}$ *et définies par :*

$$\begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} \mapsto u^n.$$

b) Une famille de représentations de dimension infinie indexées par deux paramètres $\lambda \in \{0,1\}$ *et* $r \in \mathbb{R}^+ - \{o\}$, *se réalisant toutes dans* $L^2(\mathbb{U})$ *par la formule :*

$$[\pi_{\lambda,r}\begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u}\end{pmatrix} f](v) = u^\lambda e^{ir\,\mathrm{Re}(zuv)} f(u^2 v).$$

REMARQUE. - Pour la famille a), les physiciens choisissent en général le paramètre $j = n/_2 \in \mathbb{Z}/_2$ appelé hélicité.

7) Conditions d'applications de la méthode de Mackey.

On démontre que, si G est un groupe localement compact séparable, produit semi-direct de N abélien distingué et de H, il suffit, pour que les résultats énoncés en (6.6) soient valables, que la condition suivante soit remplie :

7.1) Il existe un ensemble dénombrable $\mathscr{B}$ de boréliens de $\hat{N}$ tel que :

7.1 a) Tout $B \in \mathscr{B}$ est une réunion d'orbites suivant l'action de H (i.e., B est saturé pour la relation d'équivalence associée à la partition par les orbites).

7.1 b) Si O_1 et O_2 sont deux orbites distinctes dans $\hat{N}$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $O_1 \subset B$ et $B \cap O_2 = \emptyset$.

Ces conditions expriment que "l'espace ${}_H\backslash\hat{N}$ est dénombrablement séparé". On dit alors que le produit semi-direct $G = NH$ est "régulier", terminologie que nous emploierons dans la suite.

Exemple. - Le groupe ST(2) remplit bien les conditions 7.1.a et 7.1.b. En effet, pour le vérifier, il nous suffit de définir $\mathscr{B}$ comme l'ensemble des $B_{r_1 r_2}$ où $\mathscr{B}_{r_1 r_2}$ désigne la couronne définie, dans $\hat{N} = \mathbb{C}$, par : $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, et où r_1 et r_2 varient dans $\mathbb{Q}^+$.

Exercice : Vérifier que tout produit direct localement compact séparable est régulier, et examiner ce que donne, dans ce cas, la théorie de Mackey.

8) Application au groupe de Poincaré.

8.1) Dans tout ce paragraphe, G désigne le groupe de Poincaré, produit semi-direct externe de $SL(2, \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^4$, c-à-d ensemble des $(x,X) \in \mathbb{R}^4 \times SL(2,\mathbb{C})$, muni de la loi :

$$(x,X)(x',X') = (x+X.x', XX').$$

Ici, le rôle de N est tenu par l'ensemble des (x,I) et celui de H par celui des $(0,X)$. On identifiera souvent N à $\mathbb{R}^4$ c-à-d (x,I) à x et H à $SL(2,\mathbb{C})$, c-à-d $(0,X)$ à X. On sait que l'on a la formule :

$$(0,X)(x,I)(0,X^{-1}) = (X.x,I)$$

c-à-d que, moyennant les identifications, on a, dans les notations de 6.2 :

$$\sigma_X(x) = X.x$$

8.2) Le groupe dual $\hat{N}$ s'identifie à l'espace vectoriel dual $(\mathbb{R}^4)^*$ de $\mathbb{R}^4$ par la formule

$$<x,x'> = e^{i(x,x')} \qquad (x \in \mathbb{R}^4, \quad x' \in (\mathbb{R}^4)^*)$$

où (x,x') désigne le crochet de dualité $(\mathbb{R}^4, (\mathbb{R}^4)^*)$.
On peut identifier $\hat{N}$ à $\mathbb{R}^4$ en utilisant la forme bilinéaire non dégénérée de Minkowski, comme cela a été expliqué au chapitre 3, 4.3, ex. b, par,

$$<x,y> = e^{i(x,\ell(y))} = e^{iB(x,y)},$$

c-à-d que tout $y \in \mathbb{R}^4$ définit le caractère $x \mapsto e^{iB(x,y)}$ de $\mathbb{R}^4$.

Dans la suite, nous identifions toujours $\hat{N}$ à $\mathbb{R}^4$. L'action de $X \in SL(2,\mathbb{C})$ sur $y \in \hat{N} = \mathbb{R}^4$ est alors facile à calculer. Notons-la provisoirement $X \circ y$. Par définition :

$$<x, X \circ y> = <\sigma_X^{-1}(x), y> = <X^{-1}.x, y> = e^{iB(X^{-1}.x,y)}.$$

Mais $\quad B(X^{-1}.x,y) = B(x,X.y)$.

Donc : $\quad <x,X\circ y> = e^{iB(x,X.y)} = <x,X.y>$

et $X \circ y = X.y$. Ainsi, grâce à cette identification, l'action de $SL(2,\mathbb{C}) = H$ sur $\hat{N} = \mathbb{R}^4$ se réduit à l'action initiale, pour laquelle les orbites et les stabilisateurs ont déjà été calculés au Ch. I.

8.3) L'ensemble des résultats et des formules établies dans les chapitres précédents permet d'écrire explicitement les r.u.c. irréductibles du groupe de Poincaré associées aux orbites O_m^+, O_m^-, $O_\circ^+$ et $O_\circ^-$ (cas ayant un sens physique) puisque, dans ces cas, on a décrit complètement les r.u.c. irréductibles des petits groupes correspondants $SU(2)$ et $ST(2)$. Dans le cas (non physique) de O_{im} on sait écrire explicitement certaines r.u.c. irréductibles : celles associées à la série principale de $SL(2,\mathbb{R})$. Il reste le cas de l'orbite exceptionnelle $O_\circ^\circ = \{o\}$, à laquelle sont associées les r.u.c. irréductibles de Poincaré obtenues à partir de celles de $SL(2,\mathbb{C})$ par composition avec la projection de G sur $SL(2,\mathbb{C})$.

On a le choix a priori entre 3 espaces, donc 3 formules, pour réaliser les $\pi_{\hat{n},\omega}$:

-l'espace $W_{\hat{n},\omega}$ des fonctions définies sur le groupe G en 1.3, à valeurs dans l'espace V_ω de ω.

- l'espace W_ω de $\mathrm{ind}_{H_{\hat{n}}}^{H}\ \omega$: il s'agit ici d'un espace de fonctions définies sur $SL(2,\mathbb{C})$, à valeurs dans V_ω (formule 4.4).

- l'espace $L^2(H/H_{\hat{n}}, V_\omega)$ (formule 4.5).

La réalisation la plus souvent utilisée est la dernière, mais ce n'est pas la seule !

Notons que les formules sont simplifiées ici par le fait que l'on peut choisir $\chi = 1$, puisque chaque espace homogène $H/H_{\hat{n}}$ est muni d'une mesure invariante, que l'on a calculée au chap. 5.

On sait d'autre part que chaque espace homogène $H/H_{\hat{n}}$ est homéomorphe à l'orbite $O_{\hat{n}}$ correspondante et l'on connait l'expression de la mesure invariante sur $O_{\hat{n}}$. On appliquera donc la formule (6.8) en remplaçant $H/H_{\hat{n}}$ par $O_{\hat{n}}$ c-à-d que l'on obtiendra :

$$[\pi_{\hat{n},\omega}(x,X)\ g](\xi) = \langle x,\ \sigma_\xi.\hat{n}\rangle\omega(\Theta(X^{-1}\sigma_\xi)^{-1})\ g(X^{-1}.\xi)$$

où -) la fonction g appartient à $L^2(O_{\hat{n}}, V_\omega)$ (pour la mesure invariante μ_2 définie au chap. 5).

- le point ξ varie dans $O_{\hat{n}}$, alors que $x \in \mathbb{R}^4$ et $X \in SL(2,\mathbb{C})$.

- l'application $\sigma : O_{\hat{n}} \to SL(2,\mathbb{C}) = H$ est composée d'une section borélienne $H/H_{\hat{n}} \to H$ et de la bijection canonique $O_{\hat{n}} \to H/H_{\hat{n}}$. Autrement dit, σ est une section (i.e. un inverse à droite) borélienne de l'application $H \to O_{\hat{n}}$ définie par $X \mapsto X.\hat{n}$. On a donc, pour tout $\xi \in O_{\hat{n}}$:

$$\sigma_\xi.\hat{n} = \xi$$

ce qui donne, en définitive, la formule :

8.4) $$[\pi_{\hat{n},\omega}(x,X)g](\xi) = \langle x,\xi\rangle\ \omega(\theta(X^{-1}\sigma_\xi)^{-1})\, g(X^{-1}.\xi)$$

où $x \in \mathbb{R}^4$, $X \in SL(2,\mathbb{C})$ et $g \in L^2(O_{\hat{n}}, V_\omega)$.

Dans la pratique, il reste à préciser le choix de σ (ce qui fixe automatiquement θ) ; auparavant, toutefois, il est utile de préciser certaines notations différentes parfois employées en physique théorique :

8.5) Autre écriture des représentations induites.

Revenons provisoirement à la situation tout à fait générale des § 1 et 3. Remarquons que si l'on pose :

$$B(s) = \omega(\theta(s)^{-1})$$

on obtient une application B, de G dans le groupe des opérateurs unitaires de X, possédant les propriétés suivantes :

- elle est mesurable au sens où, pour tout $(a,b) \in X \times X$, l'application $s \mapsto \langle B(s)a|b\rangle$ est mesurable (et même, ici, borélienne).

- elle vérifie, pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$:

$$B(xh) = \omega(h^{-1})\ B(x).$$

Il est alors facile de vérifier, en recopiant la démonstration de 3.4 que, si l'on se donne réciproquement une fonction B possédant toutes ces propriétés, et si l'on associe à toute $g \in L^2(G/H,X)$ la fonction $s \mapsto B(s)[g(\dot{s})]$ on obtient une isométrie de $L^2(G/H, X)$ sur W dont la réciproque associe à $f \in W$ la fonction $\dot{x} \mapsto B(x)^{-1}f(x)$ (qui est bien définie si $f \in W$, vu les propriétés de B). On peut ainsi réaliser la représentation induite dans $L^2(G/H, X)$ au moyen de cette nouvelle isométrie, ce qui donne la formule :

8.6) $$[\pi(s)f](\xi) = \chi(s^{-1},\xi)^{1/2}\, B(x)^{-1}B(s^{-1}x)\, f(s^{-1}\xi)$$

où x est un représentant quelconque de ξ. En fait, la généralisation par rapport à (3.5) est en grande partie illusoire car, vu les propriétés de B, on a, pour tout $s \in G$:

$$B(s) = B(\sigma(\dot{s})\theta(s)) = \omega(\theta(s))^{-1}B(\sigma(\dot{s}))$$

donc, toute fonction B se déduit de la fonction particulière que nous avons considérée au départ par un choix relativement arbitraire (il faut que B soit mesurable) des $B(\sigma(\dot{s}))$. Dans la pratique, on prend toujours $B(\sigma(\dot{s})) = 1$, ce qui réduit alors 8.6 à 4.5 modulo le changement de notations :

$$\omega(\theta(s)^{-1}) = B(s)$$

d'où : $$\omega(\theta(s^{-1}\sigma(\xi))^{-1}) = B(s^{-1}\sigma(\xi)).$$

Remarquons aussi que, grâce à la définition de σ et θ, on a :

$$\theta(s^{-1}\sigma(\xi))^{-1} = \sigma(\xi)^{-1}s\sigma(s^{-1}\xi)$$

expression que l'on rencontre fréquemment.

8.6) <u>Sections de l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur les orbites.</u>

Comme on l'a vu, l'écriture concrète de la formule (8.4) est subordonnée au choix d'une section $\sigma : O_{\hat{n}} \to SL(2,\mathbb{C})$. Ce problème des sections a déjà été abordé aux Ch. 2 et 5, pour $SL(2,\mathbb{C})$, $SO(1,3)_\circ$ et $SU(2)$. Nous y revenons ici une dernière fois. Pour cela, nous adoptons des notations classiques chez les physiciens : l'identification de $\mathbb{R}^3$ au sous-espace de l'espace de Minkowski

$\mathbb{R}^4$ engendré par e_1, e_2, e_3 nous autorise à écrire tout $x = (x^\circ, x^1, x^2, x^3)$ sous la forme $x = (x^\circ, \vec{x})$ où $\vec{x} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \in \mathbb{R}^3$. On pourrait aussi bien écrire d'ailleurs $x = x^\circ + \vec{x}$. L'isomorphisme h de $\mathbb{R}^4$ sur les matrices hermitiennes s'écrit :

$$h(x) = x^\circ \sigma_\circ + h(\vec{x})$$

où $h(\vec{x}) = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x' + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}$

8.7) <u>Retour sur SU(2)</u>.

Rappelons que, si $X \in SU(2)$, on lui associe $u_X \in SO(3)$ définie par

$$u_X(\vec{x}) = h^{-1}[Xh(\vec{x})X^*] \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$$

et que l'on identifie, le cas échéant, u_X à une transformation de Lorentz laissant fixe $e_\circ$:

$$u_X(x) = h^{-1}[Xh(x)X^*]$$

c-à-d que $\quad u_X(x^\circ, \vec{x}) = (x^\circ, u_X(\vec{x}))$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$. On a :

$$X\sigma_3 X^* = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & -2ab \\ -2\overline{ab} & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que, pour que la rotation u_X soit telle que $u_X(e_3) = \vec{\nu}$, où $\vec{\nu}$ est un vecteur unitaire donné, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\begin{cases} -2ab = \nu^1 - i\nu^2 \\ |a|^2 - |b|^2 = \nu^3. \end{cases}$$

Ces équations, compte-tenu de la condition $|a|^2 + |b|^2 = 1$, ont évidemment une infinité de solutions, qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. Nous n'aurons besoin que des relations :

(8.8) $$|a|^2 = \frac{1}{2}(1+\nu^3) \;;\quad |b|^2 = \frac{1}{2}(1-\nu^3)\;;\ -2ab = \nu^1 - i\nu^2$$

qui forment d'ailleurs un système équivalent au système proposé.

Ces relations permettent d'écrire très facilement une matrice représentant, dans SU(2), une rotation donnée, d'axe $\vec{\nu}$, et d'angle θ. En effet, soit u_θ la rotation d'axe e_3, d'angle θ; la rotation cherchée, soit $r(\vec{\nu},\theta)$ est égale à $u_X u_\theta u_X^{-1}$, pour toute $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \in SU(2)$, telle que $u_X(e_3) = \vec{\nu}$. Or on sait que u_θ est représentée dans SU(2) par $\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & o \\ o & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}$, donc $r(\vec{\nu},\theta)$ est représentée par :

$$A(\vec{\nu},\theta) = X\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & o \\ o & e^{i\theta/2}\end{pmatrix} X^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 e^{-i\theta/2} + |b|^2 e^{i\theta/2} & -ab(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) \\ \overline{ab}\,(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) & |a|^2 e^{i\theta/2} + |b|^2 e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}$$

c-à-d que, moyennant (8.8) :

(8.9) $$A(\vec{\nu},\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 - i\nu^3 \sin\theta/2 & -i\sin\theta/2(\nu^1 - i\nu^2) \\ -i\sin\theta/2(\nu^1 + i\nu^2) & \cos\theta/2 + i\nu^3\sin\theta/2\end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta/2\ \sigma_o - i\sin\theta/2\ \ h(\vec{\nu})$$

ce qui redémontre la surjectivité de $X \mapsto u_X : SU(2) \to SO(3)$.

En particulier, soit $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs unitaires indépendants, il existe une unique rotation d'axe perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ transformant $\vec{u}$ en $\vec{v}$, c'est la rotation $r(\vec{\nu},\theta)$ où $\theta = \text{Arc}\cos(\vec{u}.\vec{v})$ et $\vec{\nu} = (\sin\theta)^{-1}\, \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Si l'on choisit par exemple : $\vec{u} = e_3$ et $\vec{v} = \sin\theta\,(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) + \cos\theta e_3$ avec $0 < \theta < \pi$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (c-à-d que θ et φ sont les coordonnées sphériques de $\vec{\nu}$) on trouve que la matrice correspondante dans SU(2) est

8.10 $$A(\vec{\nu}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \; e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2 \; e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{\nu} = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2 .$$

Cette matrice donne une section continue $\vec{v} \mapsto A_{\vec{v}} = A(\vec{\nu},\theta)$ de l'action de SU(2) sur la sphère S^2, définie en tout point de S^2 autre que e_3 et $-e_3$, mais qui se prolonge continûment par l'identité en e_3. Par projection sur SO(3), on trouve de même une section continue sur $S^2 - \{-e_3\}$, mais dont l'expression est plus compliquée que celle employée au ch. 5.

8. 11) Sections de l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur O_m^+.

Il s'agit de trouver, pour tout $\xi \in O_m^+$, une matrice $\sigma_\xi \in SL(2, \mathbb{C})$ telle que $u_{\sigma_\xi}(me_\circ) = \xi$. On sait déjà (cf. Ch. II) que, dans ce cas, on peut trouver une telle section continue. Nous allons ici calculer explicitement σ_ξ ; pour cela il nous faut revenir sur les :

8.12) Transformations de Lorentz pures.

Soit $\vec{\nu}$ un vecteur unitaire et $\chi \in \mathbb{R}$, nous noterons $\ell(\vec{\nu},\chi)$ la transformation, dite de Lorentz pure, définie par $\ell(\vec{\nu},\chi)(x^\circ,\vec{x}) = (y^\circ,\vec{y})$ où :

$$\begin{cases} y^\circ = \operatorname{ch}\chi \, x^\circ + \operatorname{sh}\chi(\vec{x}.\vec{\nu}) \\ \vec{y} = \vec{x} - (1 - \operatorname{ch}\chi)(\vec{x}.\vec{\nu})\vec{\nu} + x^\circ \operatorname{sh}\chi \, \vec{\nu}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine, en se rappelant que :

$$B((x^\circ,\vec{x}),\ (y^\circ,\vec{y})) = x^\circ y^\circ - \vec{x}.\vec{y}$$

que $\ell(\vec{\nu},\chi)$ est une transformation de Lorentz propre. On remarque que $\ell(\vec{\nu},\chi) = \ell(-\vec{\nu},\ -\chi)$, ce qui permet de se limiter à $\chi \geqslant o$ si on le désire. Physiquement, $\ell(\vec{\nu},\chi)$ correspond à un changement de repère dans lequel le nouveau repère est animé, dans $\mathbb{R}^3$, d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $v\vec{\nu}$ où $v = c\ \mathrm{th}\ \chi$, c désignant la vitesse de la lumière. On remarque que $\ell(\vec{\nu},\chi)$ s'effectue en fait dans le plan défini par e_o et $\vec{\nu}$: elle se réduit à l'identité sur le plan perpendiculaire, dans $\mathbb{R}^3$, à $\vec{\nu}$, qui est aussi l'orthogonal, dans $\mathbb{R}^4$, pour la forme de Minkowski, du plan défini par e_o et $\vec{\nu}$.

Pour calculer une matrice $L(\vec{\nu},\chi)$ représentant $\ell(\vec{\nu},\chi)$ dans $SL(2,\mathbb{C})$, remarquons que $\ell(\vec{e}_3,\chi)$ est la transformation

$$\begin{aligned} y^\circ &= (\mathrm{ch}\ \chi)x^\circ + (\mathrm{sh}\ \chi)x^3 \\ \vec{y} &= \vec{x} - (1 - \mathrm{ch}\ \chi)x^3\ e_3 + x^\circ\ \mathrm{sh}\ \chi\ e_3 \\ &= x^1\ e_1 + x^2\ e_2 + (x^\circ\ \mathrm{sh}\ \chi + x^3\ \mathrm{ch}\ \chi)e_3 \end{aligned}$$

c-à-d (cf. Ch. II) la transformation u_X associée à $X = \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$L(e_3,\ \chi) = \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$$

Pour calculer $L(\vec{\nu},\chi)$, il nous suffit alors de remarquer, comme au chapitre 2, que

$$\ell(\vec{\nu},\chi) = u_X\ \ell(e_3,\chi)u_X^{-1}$$

pour toute u_X où $X \in SU(2)$ est telle que $u_X(e_3) = \vec{\nu}$ (cette égalité peut aussi se vérifier directement à partie de la définition donnée au début de (8.12)).

On peut donc choisir :

$$L(\vec{\nu},\chi) = X\begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2} \end{pmatrix} X^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 e^{\chi/2} + |b|^2 e^{-\chi/2} & -2\, ab \quad \mathrm{sh}\, \chi/2 \\ -2\, \bar{a}\, \bar{b}\, \mathrm{sh}\, \chi/2 & |b|^2 e^{\chi/2} + |a|^2 e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$$

c-à-d que, moyennant 8.8 :

$$L(\vec{\nu},\chi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \chi/2 + \nu^3\, \mathrm{sh}\, \chi/2 & (\nu^1 - i\nu^2)\, \mathrm{sh}\, \chi/2 \\ (\nu^1 + i\nu^2)\, \mathrm{sh}\, \chi/2 & \mathrm{ch}\, \chi/2 - \nu^3\, \mathrm{sh}\, \chi/2 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathrm{ch}\, \chi/2)\, \sigma_\circ + (\mathrm{sh}\, \chi/2)\, h(\vec{\nu}).$$

8.13) <u>Calcul des sections : cas de O_m^+.</u>

Soit $\xi \in O_m^+$, $\xi \neq me_\circ$, d'après le chapitre 2, il existe une transformation de Lorentz pure ℓ_ξ unique, dans le plan défini par $e_\circ$ et ξ telle que $\ell_\xi(me_\circ) = \xi$. Si l'on se limite à $\chi > o$, le couple $(\chi,\vec{\nu})$ tel que $\ell_\xi = \ell(\chi,\vec{\nu})$ doit être bien déterminé. Effectivement, on a :

$$\ell(\vec{\nu},\chi)(e_\circ) = (\mathrm{ch}\, \chi,\ \mathrm{sh}\, \chi\, \vec{\nu})\ ;$$

donc $\ell(\vec{\nu},\chi)(me_\circ) = \xi$ équivaut à $m\mathrm{ch}\chi = \xi^\circ$ et $m\mathrm{sh}\chi\, \vec{\nu} = \vec{\xi}$, équations qui, vu la condition $B(\xi,\xi) = m^2$, ont pour unique solution :

$$\begin{cases} \chi = \mathrm{Arg\, ch}\, \xi^\circ/m = \mathrm{Arg\, sh}\, |\vec{\xi}|/m \\ \vec{\nu} = \vec{\xi}\, /|\vec{\xi}|. \end{cases}$$

Et, comme σ_ξ est la matrice associée à ℓ_ξ i.e. :

$$\sigma_\xi = L(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|,\ \text{Arg ch}\ \xi^\circ/m),$$

$\sigma_\xi = (\text{ch}\ \chi/2)\sigma_\circ + (\text{sh}\ \chi/2\ /\ m\ \text{sh}\ \chi)\ h(\vec{\xi})$. Donc, en tenant compte de la définition de χ et des relations :

$$\text{sh}\chi = 2\ \text{sh}\ \chi/2\ \text{ch}\ \chi/2 \quad \text{et} \quad 2\ \text{ch}^2\ \chi/2 = 1 + \text{ch}\ \chi, \text{ on obtient :}$$

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2\ m\ \text{ch}\ \chi/2}\ (2\ m(\text{ch}^2\ \chi/2)\sigma_\circ + h(\vec{\xi}))\quad \text{et, finalement}$$

(8.14) $$\sigma_\xi = [2\ m(m + \xi^\circ)]^{-1/2}\ [m\ \sigma_\circ + h(\vec{\xi})],$$

formule sur laquelle la continuité de σ est évidente.

Un autre choix, à la lecture du chapitre 2, est possible : par une rotation w autour de $e_\circ$ on peut transformer ξ en $w(\xi) = (\xi^\circ,o,o,a)$ avec $a > o$. La condition $B(w(\xi),w(\xi)) = B(\xi,\xi) = (\xi^\circ)^2 - \vec{\xi}^2$ montre d'ailleurs que $a = |\vec{\xi}|$. Il existe une unique transformation de Lorentz pure ℓ, dans le plan $(e_\circ, e_3)$, telle que $\ell(me_\circ) = w(\xi)$. La transformation $w^{-1}\ell$ sera telle que $w^{-1}\ell(me_\circ) = \xi$, on peut donc choisir pour σ_ξ une matrice représentant $w^{-1}\ell$. Pour calculer les matrices représentant w et ℓ, il suffit de remarquer que, avec les mêmes définitions de $\vec{\nu}$ et χ que ci-dessus, on a :

$$\xi = m(\text{ch}\ \chi,\ \text{sh}\ \chi\ \vec{\nu}),\quad w(\xi) = m(\text{ch}\ \chi,\ \text{sh}\ \chi e_3)$$

et on en déduit que ℓ est donc la transformation de Lorentz pure, dans le plan $(e_\circ, e_3)$, telle que $\ell(e_\circ) = \text{ch}\ \chi\ e_\circ + \text{sh}\ \chi e_3$, alors que w est une rotation qui, dans $\mathbb{R}^3$, est telle que $w(\vec{\nu}) = e_3$ c-à-d $w^{-1}(e_3) = \vec{\nu}$. La matrice représentant ℓ est donc bien déterminée, c'est $\begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2}\end{pmatrix}$. Pour définir une section, il faut préciser le choix d'une rotation w telle que $w(\vec{\nu}) = e_3$, c-à-d $w^{-1}(e_3) = \vec{\nu}$, ce qui revient à choisir une section de l'action de $SU(2)$ sur S^2. On utilise la section A introduite en 8.7. et 8.10, non définie si $\vec{\nu} = -e_3$, et on obtient, en fonction des angles polaires (θ,φ) de $\vec{\nu}$,

$$A_{\vec{\nu}} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}.$$

D'où, par produit, $\sigma'_\zeta = A_{\vec{\nu}}\ell$ c-à-d :

$$\sigma'_\xi = \begin{pmatrix} \cos\theta 2\, e^{\chi/2} & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi}\, e^{-\chi/2} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi}\, e^{\chi/2} & \cos\theta/2\, e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$$

et comme, d'après la définition de χ, on trouve :

$$e^{\varepsilon\chi/2} = [2\, m(m+\xi^\circ)]^{-1/2}\, (m+\xi^\circ+\varepsilon|\vec{\xi}|) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

on obtient finalement la matrice σ'_ξ :

$$(8.15) \qquad \sigma'_\xi = [2\, m(m+\xi^\circ)]^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos\theta/2(m+\xi^\circ+|\vec{\xi}|) & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi}\, (m+\xi^\circ-|\vec{\xi}|) \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi}\, (m+\xi^\circ+|\vec{\xi}|) & \cos\theta/2\, (m+\xi^\circ-|\vec{\xi}|) \end{pmatrix}$$

A la différence de σ_ξ qui est une application continue de O_m^+ dans $SL(2, \mathbb{C})$, la fonction σ'_ξ n'est définie que lorsque $\vec{\nu} \neq -e_3$, la formule (8.15) étant valable partout ailleurs, y compris lorsque $\vec{\nu} = e_3$ (en faisant $\theta = o$) ; sur l'ouvert de O_m^+ ainsi défini, σ'_ξ est continue ; en définissant σ'_ξ aux points $m(\mathrm{ch}\chi e_\circ - \mathrm{sh}\chi e_3)$, $\chi > o$, de manière borélienne (mais telle que $\sigma'_{\xi_\circ}(me_\circ) = \xi_\circ$) on définit bien une section borélienne.

<u>Remarque</u> : Le calcul de $L(\vec{\nu},\chi)$ montre que, avec les notations ci-dessus, on a :

$$\sigma_\xi = X\begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2} \end{pmatrix} X^{-1} \qquad \text{et} \qquad \sigma'_\xi = X\begin{pmatrix} e^{\chi/2} & o \\ o & e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$$

où X est la matrice de w telle qu'elle a été précisée ci-dessus. On en déduit

$$\sigma'_\xi = \sigma_\xi X \qquad \text{avec } X = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

(8.16) Cas de O_m^-.

Comme O_m^- est l'orbite de $-me_\circ$, il suffit de définir, pour tout $\xi \in O_m^-$, une matrice $\sigma_\xi \in SL(2, \mathbb{C})$ telle que $\sigma_\xi.(-me_\circ) = \xi$ c-à-d $\sigma_\xi(me_\circ) = -\xi$; comme $-\xi \in O_m^+$, on voit que l'on est ramené au cas de O_m^+ : il suffit d'appliquer les mêmes formules, en remplaçant ξ par $-\xi$. Par exemple, (8.14) est remplacée par :

$$\sigma_\xi = 2m(m-\xi^\circ)^{-1/2} (m\sigma_\circ - h(\xi)) \qquad (\xi \in O_m^-).$$

(8.17) Cas de $O_\circ^+$.

On va retrouver très facilement l'analogue de σ'_ξ en remarquant que $O_\circ^+$ est l'orbite de $e_\circ + e_3$, et que la transformation de Lorentz pure $\ell(e_3,\chi)$ se réduit sur $e_\circ + e_3$ à une homothétie :

$$\ell(e_3,\chi)(e_\circ + e_3) = (\text{ch}\,\chi + \text{sh}\,\chi)(e_\circ + e_3) = e^\chi(e_\circ + e_3).$$

Soit $\xi = (\xi^\circ, |\vec{\xi}|) \in O_\circ^+$, c-à-d que $\xi^\circ = |\vec{\xi}|$.

Considérons, comme pour O_m^+, la section A de l'action de $SU(2)$ sur S^2 ; on a, en posant $\vec{\nu} = \vec{\xi}/|\vec{\xi}|$, $A_{\vec{\nu}}(e_3) = \vec{\nu}$, d'où $A_{\vec{\nu}}(|\vec{\xi}|(e_\circ + e_3)) = \vec{\xi}$. Soit $\chi = \text{Log}\xi^\circ = \text{Log}|\vec{\xi}|$: on ne se limite pas ici à $\chi > o$, on a donc $|\vec{\xi}|(e_\circ + e_3) = \ell(e_3,\chi)(e_\circ + e_3)$ c-à-d que $\vec{\xi} = A_{\vec{\nu}}\circ\ell(e_3,\chi)[e_\circ + e_3]$. On choisit pour σ'_ξ une matrice représentant $A_{\vec{\nu}}\circ\ell(e_3,\chi)$, d'où avec le même calcul que pour O_m^+, sauf que, ici, $e^{\chi/2} = (\xi^\circ)^{1/2}$:

$$(8.17) \qquad \sigma'_\xi = \begin{pmatrix} \cos\theta/2(\xi^\circ)^{1/2} & -\sin\theta/2 \; e^{-i\varphi} \, (\xi^\circ)^{-1/2} \\ \sin\theta/2 \; e^{i\varphi}(\xi^\circ)^{1/2} & \cos\theta/2(\xi^\circ)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

formule valable pour tout $\xi \in O_\circ^+$, sauf si $\vec{\xi}$ est proportionnel à $-e_3$.

Il n'existe pas, dans ce cas, de réel analogue de σ_ξ.

8.18) Cas de $O_\circ^-$.

On raisonne comme en 8.16 : $O_\circ^-$ est l'orbite de $-e_\circ - e_3$. On remplace donc, dans 8.17, ξ par $-\xi$.

8.19) Remarques.

1) Le choix de σ_ξ, dans le cas de O_m^+, conduit à une écriture explicite des représentations dite "formalisme canonique", alors que le choix de σ'_ξ conduit au "formalisme hélicité".

2) Dans le cas de O_m^+, on peut encore trouver facilement une section continue en utilisant la décomposition d'Iwasawa de $SL(2, \mathbb{C})$. On sait en effet, avec les notations habituelles, que $G = KH$ où $K = SU(2)$, et $H = AN$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{o\}$. Il en résulte que H est homéomorphe à G/K, donc à O_m^+, de la manière suivante :

$$X \mapsto \dot{X} = XK \mapsto X.(me_\circ)$$

(l'homéomorphisme entre H et G/K est canonique, celui entre G/K et O_m^+ résulte du choix d'un point de O_m^+, ici $me_\circ$, dont le stabilisateur soit K). L'homéomorphisme inverse fournit la section continue cherchée, notons la $\xi \mapsto \rho_\xi$. Il suffit de calculer, pour tout $\xi \in O_m^+$, l'unique matrice $X = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ o & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in H$ telle que $X.(me_\circ) = \xi$ c-à-d :

$$mXX^* = \begin{pmatrix} \xi^\circ + \xi^3 & \xi' - i\xi^2 \\ \xi' + i\xi^2 & \xi^\circ - \xi^3 \end{pmatrix} = h(\xi) \text{ ce qui donne :}$$

$$m \begin{pmatrix} \alpha^2 + |b|^2 & b\alpha^{-1} \\ \alpha^{-1}\bar{b} & \alpha^{-2} \end{pmatrix} = h(\xi) \qquad \text{d'où}$$

$$\alpha = m^{1/2}(\xi^\circ - \xi^3)^{-1/2} \qquad b = m^{1/2}(\xi^\circ - \xi^3)^{-1/2}(\xi' - i\xi^2)$$

$$\text{et} \quad \rho_\xi = \begin{pmatrix} m^{1/2}(\xi^\circ - \xi^3)^{-1/2} & m^{1/2}(\xi^\circ - \xi^3)^{-1/2}(\xi' - i\xi^2) \\ 0 & m^{-1/2}(\xi^\circ - \xi^3)^{1/2} \end{pmatrix}$$

8.20) Cas de O_{im} :

On définit une section σ'_ξ par les mêmes méthodes :

Soit $\xi \in O_{im}$ et $\vec{\nu} = \vec{\xi}/_{|\vec{\xi}|}$, de sorte que $A_{\vec{\nu}}(e_3) = \vec{\xi}/_{|\vec{\xi}|}$ et $A_{\vec{\nu}}(|\vec{\xi}|\ e_3) = \vec{\xi}$.

Soit ℓ une transformation de Lorentz pure dans le plan $(e_\circ, e_3)$ telle que $\ell(me_3) = (\xi^\circ, |\vec{\xi}|\ e_3)$. Ceci impose que $\ell = \ell(e_3, \chi)$ avec

$$\xi^\circ = m \text{ sh } \chi \quad \text{et} \quad |\vec{\xi}| = m \text{ ch } \chi,$$

donc $\chi = \text{Arg sh } \xi^\circ/_m$ est bien déterminé et $A_{\vec{\nu}} \circ \ell(me_3) = (\xi^\circ, \vec{\xi}) = \xi$. On choisit pour σ'_ξ une matrice représentative dans $SL(2, \mathbb{C})$ de $A_{\vec{\nu}} \circ \ell$, ce qui donne la même formule qu'en 8.13 sauf que $\chi = \text{Arg sh}\xi^\circ/_m$:

$$\sigma'_\xi = \begin{pmatrix} \cos\theta/2\ e^{\chi/2} & -\sin\theta/2\ e^{-i\varphi}\ e^{-\frac{\chi}{2}} \\ \sin\theta/2\ e^{i\varphi}\ e^{\chi/2} & \cos\theta/2\ e^{-\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}$$

où θ et φ sont donc définis par :

$$\sin\theta(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) + \cos\theta\ e_3 = \vec{\nu} = \vec{\xi}/_{|\vec{\xi}|} \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

9) Récapitulation pour le groupe de Poincaré.

1) Toute r. u. c. irréductible du groupe de Poincaré est du type $\pi_{\hat{n},\omega}$ où $\hat{n}$ est un point de $\mathbb{R}^4$ d'orbite $O_{\hat{n}}$, et ω une représentation irréductible du stabilisateur $H_{\hat{n}}$ de $\hat{n}$, et $\pi_{\hat{n}\omega}$ est définie par la formule 8.4 ; dans cette formule, l'espace $L^2(O_{\hat{n}}, V_\omega)$ est relatif à la mesure invariante sur $O_{\hat{n}}$ calculée au Ch. V, § 6, et θ est associée, comme en 6.7 et 8.3 à une section σ de l'application $X \mapsto X.\hat{n}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $O_{\hat{n}}$. Ces sections ont été calculées explicitement, pour les orbites du type $O^{\pm}_m$ et $O^{\pm}_o$, en (8.13), (8.16), (8.17), (8.18) et 8.20. On sait de plus (8.5) que :

$$\theta(X^{-1}\sigma_\xi)^{-1} = \sigma_\xi^{-1} \; X \; \sigma_{X^{-1}.\,\xi} \quad .$$

2) En fixant un point $\hat{n}$ et un seul dans chaque orbite, et une représentation ω dans chaque classe de représentations irréductibles de $H_{\hat{n}}$, on obtient un représentant et un seul de chaque classe de représentations irréductibles du groupe de Poincaré. Pour $\hat{n}$, on choisit, en général : dans O^+_m le point $me_\circ$, dans O^-_m le point $-me_\circ$, dans $O^+_\circ$ le point $e_\circ + e_3$, dans O_{im} le point me_3.

3) Les représentations ayant un sens physique correspondent aux orbites autres que O_{im} et $O_\circ^\circ$.

Dans le cas de O^+_m et O^-_m, le petit groupe est $SU(2)$, et les représentations ω ont été décrites au Ch. III, on obtient ainsi une famille de représentations paramétrée par $m \in \mathbb{R}^+ - \{o\}$, $\varepsilon = \pm$ et $\ell \in \mathbb{N}/2$.

Dans le cas de $O^+_\circ$ et $O^-_\circ$, le petit groupe est $ST(2)$, et les représentations ω ont été décrites au § 6.11, en fait, du point de vue physique, seules ont de l'intérêt les représentations de dimension 1 de $ST(2)$ paramétrées par

$n \in \mathbb{Z}$ ou $j = n/_2 \in \mathbb{Z}/_2$. Elles donnent naissance à deux familles de représentations du groupe de Poincaré, une pour chaque nappe du cône.

10) Ecriture explicite des représentations ayant une interprétation physique.

1) Masse positive.

Il s'agit des représentations associées à une orbite O_m^+ et à une représentation $\pi_\ell (\ell \in \mathbb{Z}/_2)$ de SU(2), stabilisateur de $me_o \in O_m^+$. A une telle représentation déterminée par (m,ℓ) est associée une particule de masse m, de spin ℓ.

L'écriture explicite de la représentation se fait le plus souvent (pas toujours !) au moyen de la formule 8.4 rappelée ci-dessous :

$$[\pi_{\hat{n}\omega}(x,X)g](k) = \langle x,k\rangle\, \omega(\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1})g(X^{-1}.k)$$

où $x \in \mathbb{R}^4$, $X \in SL(2,\mathbb{C})$, $g \in L^2(O_{\hat{n}},V_\omega)$ et $\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1} X \sigma_{X^{-1}.k}$.

Ici, $O_{\hat{n}} = O_{m^+}$ muni de la mesure invariante μ calculée au chapitre V, 6.1, d) définie par :

$$\int_{O_{m^+}} g(k)d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^3} g((|\vec{\xi}|^2 + m^2)^{1/2},\xi_1,\xi_2,\xi_3)(|\vec{\xi}|^2 + m^2)^{-1/2} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

où $|\vec{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$.

D'autre part, $\omega = \pi_\ell, \ell \in \mathbb{Z}/_2$, et $V_\omega = V_{2\ell}$ est l'espace des polynômes de $\mathbb{C}[Z]$ de degré au plus égal à 2ℓ. Par définition :

$$\pi_\ell\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\right)[P(Z)] = (bZ + \bar{a})^{2\ell}\; P\left(\frac{aZ-\bar{b}}{bZ+\bar{a}}\right).$$

La section σ de l'action de SL(2,C) sur O_{m^+} considéré comme orbite de me_o a été définie dans ce même chapitre en 8.13 (plusieurs choix sont possibles).

Enfin, $<x,k> = e^{iB(x,k)}$. Au total :

$$[\pi(x,X)g](k) = e^{iB(x,k)}\ \pi_{\ell}(\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1})g(X^{-1}.k)$$
$$\text{avec}\quad x \in \mathbb{R}^4,\ X \in SL(2,\mathbb{C}),\ g \in L^2(O_m^+,\ d\mu,\ V_{2\ell}).$$

2) Masse nulle.

Il s'agit des représentations associées à la nappe supérieure $O_\circ^+ = C^+$ du cône de lumière et à une représentation de dimension 1, α_j, $j \in \mathbb{Z}/_2$, du stabilisateur $ST(2)$ de $e_\circ + e_3 \in C^+$. A une telle représentation est associée une particule de masse nulle, d'hélicité j.

L'écriture explicite se fait souvent (pas toujours !) au moyen de la formule 8.4 où:

-) $O_{\hat{n}} = C^+$ muni de la mesure invariante μ calculée au chapitre V, 6.3, définie par :

$$\int_{C^+} g(k)\ d\mu(k) = \int_{\mathbb{R}^3} g(|\vec{\xi}|,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\ \frac{d\xi_1\ d\xi_2\ d\xi_3}{|\vec{\xi}|}$$

où $|\vec{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, et $|\vec{\xi}| = \xi^\circ$ lorsque $\xi = (\xi^\circ,\vec{\xi}) \in C^+$.

-) la représentation ω est le caractère $\alpha_j : \begin{pmatrix} u & z \\ o & \bar{u} \end{pmatrix} \mapsto u^{2j}$ de $ST(2)$, ainsi $V_\omega = \mathbb{C}$.

-) La section σ' de l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur C^+ considéré comme orbite de $e_\circ + e_3$ a été définie dans ce même chapitre en 8.17. Au total :

$$[\pi(x,X)g]\ (k) = e^{iB(x,k)}\ \alpha_j(\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1})g(X^{-1}.k)$$
$$\text{avec}\quad x \in \mathbb{R}^4,\ X \in SL(2,\mathbb{C}),\ g \in L^2(C^+,\ d\mu).$$

Dans ce cas, il est possible de simplifier l'expression du multiplicateur $\alpha_j\,[\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1}]$. Pour cela, introduisons les paramètres suivants : si $K \in C^+$, soit

$$\alpha = 2^{-1/2}(k^\circ + k^3)^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{1}{2\alpha}(k^1 + ik^2) = -\frac{k^1 + ik^2}{2^{1/2}(k^\circ + k^3)^{1/2}} .$$

On vérifie que l'on a la formule :

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\gamma}/k^\circ \\ -\gamma & \alpha/k^\circ \end{pmatrix} .$$

On pose enfin $\zeta = \gamma/_\alpha = -\dfrac{k^1 + ik^2}{k^\circ + k^3} = -\dfrac{k^1 + ik^2}{2\alpha^2}$.

Alors un simple calcul conduit à :

$$\alpha_j[\theta(X^{-1}\sigma_k)^{-1}] = \left(\frac{d + b\zeta}{|d + b\zeta|}\right)^{-2j},$$

où $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad-bc = 1$,

et donc a :

$$[\pi(x,X)g](k) = e^{iB(x,k)}\left(\frac{d + b\zeta}{|d + b\zeta|}\right)^{-2j} g[X^{-1}.k]$$

où $x \in \mathbb{R}^4$, $g \in L^2(C^+, d\mu)$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,C)$.

Interprétation géométrique de ζ.

Par l'application $\xi = (\xi^\circ, \vec{\xi}) \mapsto \vec{\xi}$ qui constitue une carte globale, la variété C^+ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3 - \{o\}$, donc, par passage en coordonnées polaires à $(\mathbb{R}^+ - \{o\}) \times S^2$. Explicitement, ce difféomorphisme s'écrit :

$$k = (k^\circ, \vec{k}) \in C^+ \mapsto (k^\circ, \vec{k}/_{k^\circ}) \in \mathbb{R}^{+*} \times S^2 .$$

Les projections stéréographiques de pôles $-e_3$ et $+e_3$ sont des cartes usuelles de S^2 et le calcul montre que $-\zeta$ n'est autre que l'affixe de la projection stéréographique de $\vec{k}/_{k^\circ}$ à partir de $-e_3$.

-:-:-:-:-