PIERRE EYMARD

Transfert des fonctions harmoniques en fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A10_0>

TRANSFERT DES FONCTIONS HARMONIQUES EN FONCTIONS PROPRES DE L'OPERATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI

par Pierre EYMARD

(Université de Nancy-1)

Soient $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n , |x| < 1\}$ et $S^{n-1} = \partial B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$. Soit $G_n = SO_\circ(n,1)$ le groupe des matrices $g = (g_{ij})_{o\leqslant i,j\leqslant n}$ qui conservent la forme quadratique $-x_o^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, et telles que $g_{oo} \geqslant 1$ et dét$(g) = 1$. Dans le cas particulier où $n = 2$, on a $B_2 \simeq X = \{z \in \mathbb{C} , |z| < 1\}$; on a $S^1 \simeq \Gamma = \{|z| = 1\}$; et $G_2 \simeq SU(1,1)/\{\pm e\}$, où $G = SU(1,1)$ est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 = |b|^2 = 1$.

Le groupe G_n opère sur B_n, et sur S^{n-1}, par la formule $y = g\,x$, où

$$y_p = \frac{g_{po}\frac{1+|x|^2}{2} + g_{p1}x_1 + \ldots + g_{pn}x_n}{\frac{1-|x|^2}{2} + g_{oo}\frac{1+|x|^2}{2} + g_{o1}x_1 + \ldots + g_{on}x_n} \qquad (p = 1,2,\ldots,n)$$

si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$. Si $n=2$, cette action correspond à celle de $G = SU(1,1)$ sur X et sur Γ par $g_\circ z = \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$.

I. LES DEUX NOYAUX DE POISSON DE LA BOULE B_n.

Soit dv la mesure de masse 1 sur S^{n-1} invariante par les rotations autour de O. On a la formule, pour $g \in G_n$ et $f \in L^1(S^{n-1},dv)$,

$$\int_{S^{n-1}} f(g_\circ v)dv = \int_{S^{n-1}} P(ru,v)\ f(v)\ dv ,$$

où

$$P(ru,v) = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2ru_\circ v}\right)^{n-1} ,$$

si $g_\circ 0 = ru$, avec $o \leqslant r < 1$ et $u \in S^{n-1}$. Le noyau $P : B_n \times S^{n-1} \to \mathbb{R}_+^*$ ainsi défini est le noyau de Poisson hyperbolique (ou lobstchevskien). Mais on a d'autre part le noyau de Poisson euclidien

$$P_e(ru,v) = \frac{1-r^2}{(1+r^2-2ru_\circ v)^{n/2}} \qquad ,$$

c'est-à-dire celui qui résoud le classique problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques euclidiennes (i.e. telles que $\Delta F \equiv o$) dans la boule B_n. Si n=2, il se trouve par hasard que ces deux noyaux coïncident :

$$P(re^{i\phi},e^{i\theta}) = P_e(re^{i\phi},e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)} \quad .$$

II. <u>LE THEOREME DE REPRESENTATION INTEGRALE DE HELGASON-MINEMURA.</u>

Dans B_n, l'opérateur de Laplace-Beltrami, invariant par G_n, est

$$D = \frac{(1-r^2)^2}{4}\,\Delta + \frac{(n-r)}{2}\,(1-r^2)\sum_{i=1}^{n} x_i\,\frac{\partial}{\partial n_i} \qquad ,$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien euclidien. Si n = 2, on a $D = \frac{(1-r^2)^2}{4}\,\Delta$ et les fonctions harmoniques euclidiennes et lobatchevskiennes coïncident (car $DF \equiv 0 \Leftrightarrow \Delta F \equiv 0$) ; ceci n'est plus vrai si $n > 2$.

Pour tout nombre complexe μ, soit $\mathcal{E}_\mu(B_n) = \mathcal{E}_{1-\mu}(B_n)$ l'espace de toutes les fonctions propres de D dans B_n, de valeur propre $\mu(\mu-1)(n-1)^2$.

Soit $\mathcal{E}(B_n)$ l'espace de toutes les fonctions harmoniques euclidiennes dans B_n.

Soit $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ l'espace de toutes les fonctionnelles analytiques (ou hyperfonctions sur S^{n-1}).Par exemple $\mathcal{H}'(\Gamma) = \{ T = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell e^{i\ell\theta}$, où, pour tout $0 \leqslant r < 1$, on a $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |f_\ell| r^{|\ell|} < + \infty\}$.

THEOREME. - *Si* $\mu(n-1) \notin -\mathbb{N}$ *, la transformation de Poisson d'exposant* μ

$$P^{\mu}T(ru) = \int_{S^{n-1}} P^{\mu}(ru,v)\,dT(v) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1 \ , \ u \in S^{n-1})$$

est une bijection de $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ *sur* $\mathcal{E}_{\mu}(B_n)$.

D'autre part, on sait que la transformation de Poisson classique euclidienne

$$P_e T(ru) = \int_{S^{n-1}} P_e(ru,v)\,dT(v)$$

est une bijection de $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ sur $\mathcal{E}(B_n)$.

III. LA FORMULE DU TRANSFERT DES FONCTIONS HARMONIQUES EUCLIDIENNES EN FONCTIONS PROPRES DE D.

Si $\mu(n-1) \notin -\mathbb{N}$, il existe donc formellement une application τ_{μ} telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}'(S^{n-1}) \arrow[dl, "P_e"'] \arrow[dr, "P^{\mu}"] & \\ \mathcal{E}(B_n) \arrow[rr, dashed, "\tau_{\mu}"'] & & \mathcal{E}_{\mu}(B_n) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Proposée par le conférencier pour n = 2, la formule suivante a été démontrée par H. Samii pour n quelconque :

THEOREME. - *Supposons* $0 < \mathcal{R}e\mu < \frac{n}{2(n-1)}$. *Alors :*

$$\tau_{\mu}F(ru) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\mu(n-1))\Gamma(n/2-\mu(n-1))}(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^1 F(tru) \left(\frac{t(1-r)^2}{(1-t)(1-r^2t)}\right)^{\mu(n-1)-\frac{n-2}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{4-n}{2}}} .$$

MOTIVATION. - Les propriétés des fonctions harmoniques euclidiennes sont classiques ou faciles à démontrer. Par la formule du transfert on peut espérer en déduire des propriétés cachées, ou plus difficiles à démontrer directement, des fonctions propres de D. Nous allons en donner un exemple.

IV. LES INEGALITES DE SAMII. -

Les fonctions sphériques de la boule hyperbolique sont, pour $\mu \in \mathbb{C}$,

$$Z_\mu(r) = P^\mu(1)(r) = (1-r^2)^{\mu(n-1)} \; {}_2F_1\left(\mu(n-1) - \frac{n-2}{2} \, , \, \mu(n-1) \, ; \frac{n}{2} \, ; r^2\right).$$

Si F est une fonction définie dans B_n , pour tout $o \leq r < 1$, notons F_r la fonction définie sur S^{n-1} par $F_r(u) = F(ru)$. Si F est harmonique euclidienne, on on sait que la fonction

$$r \longmapsto \| F_r \|_p = \left(\int_{S^{n-1}} |F(ru)|^p du \right)^{1/p}$$

est croissante pour $r \in [o,1[$. Par transfert, Samii en déduit :

THEOREME. - *Supposons* $0 < \mu$ réel $< \dfrac{n}{2(n-1)}$; p réel ≥ 1 et $o \leq r < 1$.

Alors $\| (\tau_\mu F)_r \|_p \leq Z_\mu(r) \| F_r \|_p$.

En particulier :

$$Z_{\mu p}(r) \leq (1-r^2)^{\frac{2-n}{2}} [Z_\mu(r)]^p \; Z_{\frac{pn}{2(n-1)}}(r).$$

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] S. HELGASON, J. Functional Analysis, 17 (1974), p. 328-353 ;

[2] K. MINEMURA, J. Math. Japan 27 (1975) ;

[3] H. SAMII, Thèse de 3-ème cycle, Nancy 1982.

****