PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. FARAUT

Algèbres de Volterra de certains espaces affines symétriques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A11_0>

ALGEBRES DE VOLTERRA DE CERTAINS ESPACES AFFINES SYMETRIQUES

par J. FARAUT

(Université Louis-Pasteur - Strasbourg-1)

Un noyau de Volterra sur l'intervalle $[a,b]$ est une fonction $K(x,y)$ définie sur $[a,b]\times[a,b]$ qui est continue sur le triangle $\Gamma = \{(x,y) \mid y \leqslant x\}$ et qui est nulle pour $y > x$. Le produit de deux noyaux de Volterra K et H est défini par

$$K \# H\,(x,y) = \int_y^x K(x,z)\, H(z,y)\, dz$$

Ce produit a été utilisé par V. Volterra pour résoudre les équations dites de Volterra [4]. Ce produit a été généralisé au cas de plusieurs variables par M. Riesz pour résoudre l'équation des ondes [3].

C'est à la suite de travaux de M. Mizony sur la transformation de Laplace-Jacobi [2] que nous avons été amené à étudier ce produit de Volterra. En effet une propriété fondamentale de la transformation de Laplace est de transformer le produit de convolution de deux fonctions définies sur $[0,\infty[$ en produit simple. La question se posait de savoir si la transformation de Laplace-Jacobi possédait une propriété analogue.

I Algèbres de Volterra

Soit X un espace localement compact muni d'une mesure de Radon positive dx. On considère un ordre sur X noté $y \leqslant x$ tel que les intervalles $I_{x,y} = \{ z \in X \mid y \leqslant z \leqslant x\}$ soient compacts. On suppose aussi que tout compact est majoré et minoré. Soit $\Gamma = \{(x,y) \mid y \leqslant x\}$ le graphe de cette relation d'ordre.

Définition Un noyau de Volterra est une fonction $K(x,y)$ continue sur Γ, nulle dans le complémentaire de Γ.

L'espace des noyaux de Volterra est noté $V(X)$. Le produit de composition de deux noyaux de Volterra K et H est défini par

$$K\# H(x,y) = \int K(x,z)\; H(z,y)\; dz$$

L'intégrale porte sur l'ensemble $I = \{ z \mid y \leqslant z \leqslant x \}$ qui est compact par hypothèse. Du fait que tout compact soit majoré et minoré on déduit que $K\# H$ est continu sur Γ. De plus si (x,y) n'appartient à Γ, c'est à dire si y n'est pas inférieur ou égal à x, les fonctions $z \longmapsto K(x,z)$ et $z \longmapsto H(z,y)$ ont des supports disjoints. Donc $K\# H$ est un noyau de Volterra :

Muni du produit de composition $\#$, $V(X)$ est une algèbre

Nous disons que $V(X)$ est une algèbre de Volterra.

Soit G un groupe transitif d'homéomorphismes de X, croissants. C'est à dire que G est un groupe d'homéomorphismes $g : X \longrightarrow X$, vérifiant $x \leqslant y \iff gx \leqslant gy$. On suppose de plus que la mesure dx est invariante par G. Soit $V(X)^{\natural}$ l'espace des noyaux de Volterra invariants, c'est à dire des noyaux de Volterra K vérifiant $K(gx,gy) = K(x,y)$ pour tout g de G. L'espace $V(X)^{\natural}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Volterra $V(X)$. Nous nous interresserons dans la suite à la question suivante : Sous quelles conditions l'algèbre $V(X)^{\natural}$ est-elle commutative ?

Exemple 1 Soit $X = \mathbb{R}$, muni de l'ordre usuel, dx est la mesure de Lebesgue. Soit G le groupe des translations. Un noyau de Volterra invariant est de la forme $K(x,y) = k(x-y)$, où k est une fonction continue sur $[0,\infty[$ nulle sur $]-\infty, 0[$.

L'algèbre de Volterra $V(X)^{\natural}$ est en fait l'algèbre de convolution usuelle $C([0,\infty[)$ des fonctions continues sur $[0,\infty[$:

$$k * h(x) = \int_0^x k(x-z)\, h(z)\, dz$$

Cette algèbre est évidemment commutative.

Exemple 2 Soit $X = \mathbb{R}^n$ et soit Ω un cône ouvert convexe de sommet 0 ne contenant aucune droite. On associe au cône Ω un ordre sur $\mathbb{R}^n$ par: $x \geqslant y$ si et seulement $x-y \in \overline{\Omega}$. Soit G le groupe des translations. L'algèbre de Volterra $V(X)^{\natural}$ est l'algèbre de convolution usuelle $C(\overline{\Omega})$ des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, qui est bien sûr commutative.

Dans la suite nous noterans $x \succ y$ si $x-y \in \Omega$.

II Commutativité de l'algèbre de Volterra $V(X)^{\natural}$

Théorème 1 Supposons qu'il existe une "symétrie" σ de l'espace X, c'est à dire un homéomorphisme involutif décroissant $\sigma : X \longrightarrow X$, c'est à dire que $y \leqslant x \iff \sigma(x) \leqslant \sigma(y)$ qui préserve la mesure dx, et qui vérifie

(1) Il existe un point x_o de X tel que $\sigma(x_o) = x_o$

(2) Si $x \succ x_o$ il existe une transformation g de G telle que

$$x = g\, x_o \quad \text{et} \quad \sigma(x) = g^{-1} x_o$$

Alors l'algèbre de Volterra $V(X)^{\natural}$ est commutative.

Remarque Si $\{x \geqslant x_o\}$ est égal à l'adhérence de son intérieur, il suffit que la condition (2) soit satisfaite pour les points x intérieurs à $\{x \geqslant x_o\}$.

Démontrons le théorème 1. Pour un noyau de Volterra K nous posons

$$K^{\vee}(x,y) = K(y,x)$$

Le noyau $K^\vee$ est un noyau de Volterra relativement à l'ordre renversé : $K^\vee$ appartient à $V(X,\check{\Gamma})$, où

$$\check{\Gamma} = \{(x,y) \mid y \geqslant x\}$$

et de plus, pour deux noyaux de Volterra K et H

$$K^\vee \# H^\vee = (H \# K)^\vee$$

Posons également

$$K^\sigma(x,y) = K(\sigma(x), \sigma(y))$$

Le noyau K^σ appartient également à $V(X,\check{\Gamma})$ et

$$K^\sigma \# H^\sigma = (K \# H)^\sigma$$

Pour démontrer le théorème il suffit donc de prouver que, si K est un noyau de Volterra invariant, $K^\vee = K^\sigma$.

Nous avons

$$K^\vee(x_o,x) = K(x,x_o)$$

Si $x \geqslant x_o$, il existe une transformation g de G telle que

$$x = g\, x_o, \quad \sigma(x) = g^{-1} x_o$$

nous en déduisons que

$$K(x,x_o) = K(g\, x_o,x_o) = K(x_o,g^{-1}x_o) = K(x_o, \sigma(x))$$

c'est à dire que

$$K^\vee(x_o,x) = K^\sigma(x_o,x)$$

et comme le noyau K est invariant, il en résulte que pour tout x et tout y

$$K^\vee(x,y) = K^\sigma(x,y)$$

III L'espace des matrices symétriques (resp. hermitiennes) de signature (p,q)

Soit $E = \mathcal{H}_n(\mathbb{F})$ l'espace des matrices à coéfficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, symétriques si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ou hermitiennes si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Soit $\Omega = \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ le cône des matrices de E qui sont définies positives. L'espace vectoriel E est ainsi ordonné. Notons G le groupe $SL(n,\mathbb{F})$ qui agit sur E par $\rho(g)\, x = g\, x\, g^*$, où g^* désigne la matrice transposée de g (resp. adjointe). Soient p et q deux entiers positifs tels que $p + q = n$, et soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Considérons l'espace $X = \rho(G)\, J$, c'est l'ensemble des matrices symétriques (resp. hermitiennes) de déterminant $(-1)^q$ et de signature (p,q). Il s'identifie à l'espace homogène G/S avec $S = SU(p,q;\mathbb{F})$.

Théorème 2 L'algèbre de Volterra $V(X)^\natural$ est commutative.

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons une décomposition de Cartan. Soit A le sous-groupe de G des matrices diagonales à coéfficients positifs :

$$a = \begin{pmatrix} e^{t_1} & & & 0 \\ & e^{t_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t_n} \end{pmatrix} \qquad t_1+t_2+\dots+t_n = 0$$

Nous avons

$$\rho(a)\, J = \begin{pmatrix} e^{2t_1} & & & & 0 \\ & \ddots\; e^{2t_p} & & & \\ & & -e^{2t_{p+1}} & & \\ 0 & & & \ddots & -e^{2t_n} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $\rho(a)\, J > J$ si et seulement si $t_1 > 0, \dots, t_p > 0$, $t_{p+1} < 0, \dots, t_n < 0$. On notera A_+ l'ensemble des matrices diagonales de G pour lesquelles $\rho(a)\, J > J$.

Proposition Décomposition de Cartan Soit x un élément de X. Pour que $x > J$ il faut et suffit que $x = \rho(sa)\, J$, avec s dans S et a dans A_+.

a) Si $x = \rho(sa)\, J$ avec s dans S et a dans A_+

$$x - J = \rho(s)\, (\, \rho(a)\, J - J\,) > 0$$

b) On utilise le fait que toute matrice symétrique (resp. hermitienne) est diagonalisable en base orthonormée. Soit $x > J$, c'est à dire $x = J + y$ avec $y > 0$. Il existe g dans $GL(n,\mathbb{F})$ tel que $y = \rho(g)\, I$. La matrice $h = \rho(g^{-1})\, J$ peut être diagonalisée dans une base orthonormée : il existe un élément k de $SU(n,F)$ tel que $h = \rho(k)\, d$, où d désigne une matrice diagonale. La signature de la matrice d est égale à celle de J, il existe donc une matrice diagonale b et un élément k' de $SU(n,\mathbb{F})$ tels que $h = \rho(k'b)\, J$. Ainsi

$$J = \rho(gk'b)\, J$$

donc $s = gk'b$ appartient à S. De plus

$$y = \rho(g)\, I = \rho(g)\rho(k')\, I$$

par suite

$$x = J + y = \rho(s)\, (\, J + \rho(b^{-1})\, I\,)$$

La matrice $z = J + \rho(b^{-1})$ est diagonale, appartient à X et de plus $z > J$, elle s'écrit donc $z = \rho(a)\, J$ avec a dans A_+ .

Démontrons maintenant le théorème 2. Soit σ la "symétrie" de X définie par

$$\sigma(x) = J\, x^{-1} J$$

Soit $x > J$. D'après la décomposition de Cartan

$$x = \rho(sa)\, J = \rho(sas^{-1})\, J$$

et
$$\sigma(x) = \rho(sa^{-1})\, J = \rho(sa^{-1}s^{-1})\, J$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 1 : l'algèbre de Volterra $V(X)^{\natural}$ est commutative.

IV Normes et caractères d'une algèbre de Volterra

Nous supposons qu'il existe une formule d'intégration en "coordonnées polaires" sur l'ensemble $\{x > x_0\}$. Soit S le sous-groupe des éléments de G qui fixent le point x_0. Soit Y l'espace des orbites du sous-groupe S contenues dans l'ensemble $\{x > x_0\}$. Nous supposons qu'il existe une mesure μ sur Y telle que, pour toute fonction f intégrable sur $\{x > x_0\}$

$$\int_{\{x > x_0\}} f(x)\, dx = \int_Y \left[\int_S f(sx)\, ds \right] d\mu(\dot{x})$$

où ds désigne une mesure de Haar sur le sous-groupe S.

Théorème 3 Soit ω une fonction continue positive sur $\{x \geqslant x_0\}$ vérifiant

$$(1) \qquad \int_S \omega(gsy)\, ds \leqslant \omega(gx_0) \int_S \omega(sy)\, ds$$

pour tout $y > x_0$ et tout g dans $G_+ = \{g \in G \mid gx_0 > x_0\}$

Alors, si on pose, pour un noyau de Volterra invariant K

$$\|K\| = \int |K(x,x_0)|\, \omega(x)\, dx$$

nous avons, pour deux noyaux de Volterra invariants K et H,

$$\|K \# H\| \leqslant \|K\|\, \|H\|$$

a) Montrons que si K est un noyau de Volterra invariant

$$\int |K(x,z)|\, \omega(x)\, dx \leqslant \omega(z) \int |K(x,x_0)|\, \omega(x)\, dx$$

Posons $z = g\, x_0$,

$$\int |K(x,gx_0)|\, \omega(x)\, dx = \int |K(g^{-1}x,x_0)|\, \omega(x)\, dx$$

$$= \int |K(y,x_0)|\, \omega(gy)\, dy \qquad = \int_Y |K(\dot{y},x_0)| \left(\int_S \omega(gsy)ds \right) d\mu(\dot{y})$$

$$\leqslant \omega(gx_0) \int_Y |K(\dot{y},x_0)| \left(\int_S \omega(sy)\, ds \right) d\mu(\dot{y})$$

$$= \omega(gx_0) \int |K(y,x_0)|\, \omega(y)\, dy$$

b) Démontrons maintenant le théorème

$$\|K \# H\| = \int |K \# H(x,x_0)|\, \omega(x)\, dx$$

$$\leqslant \iint |K(x,z)|\ |H(z,x_0)|\,\omega(x)\ dx\ dz$$
$$= \int \Big[\int |K(x,z)|\,\omega(x)\ dx\Big]\ |H(z,x_0)|\ dz$$

et d'après le résultat de a)

$$\leqslant \int \omega(z)\Big[\int |K(y,x_0)|\,\omega(y)\ dy\Big]\ |H(z,x_0)|\ dz$$
$$= \|K\|\ \|H\|$$

Ainsi les noyaux de Volterra invariants K tels que

$$\int |K(x,x_0)|\ \omega(x)\,dx < \infty$$

constituent une algèbre normée commutative. Nous notons $V^1(X,\omega)^\natural$ l'algèbre de Banach complétée. La question se pose de savoir quels sont les caractères de l'algèbre de Banach commutative $V^1(X,\omega)^\natural$.

Remarquons que dans le cas de l'exemple 1 la condition (1) s'écrit simplement

$$\omega(x+y) \leqslant \omega(x)\ \omega(y)$$

Nous appelons poids une fonction ω vérifiant les conditions du théorème 3.

<u>Théorème 4</u> <u>Soit</u> ω <u>un poids, et soit</u> P <u>une fonction continue</u> <u>sur</u> $\{x \geqslant x_0\}$ <u>vérifiant</u>

(1) $\quad |P| \leqslant \omega$

(2) $\quad \int_S P(gsy)\ ds = P(gx_0) \int_S P(sy)\ ds$

<u>pour tout</u> $y > x_0$ <u>et pour tout</u> g <u>de</u> G_+. <u>Alors l'application</u>

$$\chi : V^1(X,\omega)^\natural \longrightarrow \mathbb{C}$$

<u>définie par</u>

$$\chi(K) = \int K(x,x_0)\ P(x)\ dx$$

<u>est un caractère de l'algèbre de Banach</u> $V^1(X,\omega)^\natural$, <u>c'est à dire que</u>

$$\chi(K \# H) = \chi(K)\,\chi(H)$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 3.

Dans l'exemple 1 la condition (2) s'écrit simplement

$$P(x+y) = P(x)\ P(y)$$

Remarquons que si P est une fonction vérifiant les conditions (1) et (2) et si s_o est un élément de S, alors $P_o = P \circ s_o$ vérifie aussi les conditions (1) et (2) et définit le même caractère χ. Ceci conduit à poser

$$\varphi(x) = \int_S P(sx)\, ds$$

alors, pour $y > x_o$ et g dans G_+,

$$\int_S \varphi(gsy)\, ds = \varphi(gx_o)\ \varphi(y)$$

et de plus

$$\chi(K) = \int_Y K(\dot{x}, x_o)\ \varphi(\dot{x})\ d\mu(\dot{x})$$

En effet

$$\int_S \varphi(gsy)\, ds = \int_S \left[\int_S P(s'gsy)\, ds \right] ds'$$
$$= \int_S P(s'gx_o)\, ds'\ \varphi(y)$$

Nous appelons fonction sphërique une telle fonction φ. Nous ne savons pas si tous les caractères de l'algèbre de Banach $V^1(X,\omega)^\natural$ sont de ce type.

V Fonctions sphériques sur l'espace des matrices symétriques (resp. hermitiennes) de signature (p,q)

Considérons à nouveau l'espace X des matrices symétriques (resp. hermitiennes) de signature (p,q) et de déterminant $(-1)^q$ (cf § III). D'après la décomposition de Cartan tout élément x de X vérifiant $x > J$ s'écrit $x = \rho(sa)J$ où s appartient à $S = SU(p,q;\mathbb{F})$ et où a appartient à A+, c'est à dire

$$a = a_t = \begin{pmatrix} e^{t_1} & & & 0 \\ & e^{t_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t_n} \end{pmatrix}$$

avec $t_1 > 0, \dots, t_p > 0, t_{p+1} < 0, \dots, t_n < 0$, $t_1 + \dots + t_n = 0$. Dans cette décomposition la mesure invariante dx sur X s'exprime par

$$\int_{\{x>J\}} f(x)\, dx = \int_{A_+} \left[\int_S f\left[\rho(sa)J\right] ds \right] \delta(a)\, da$$

où $da = dt_1 \dots dt_{n-1}$, et

$$\delta(a) = \prod_{i<j} |sh(t_i - t_j)|^\beta$$

avec $\beta = 1$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et $\beta = 2$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Soit N le sous-groupe de $G = SL(n,\mathbb{F})$ constitué des matrices triangulaires inférieures avec des éléments diagonaux égaux à 1. Pour une matrice x on note $\Delta_j(x)$ le déterminant extrait de x constitué des j premières lignes et des j premières colonnes.

Décomposition d'Iwasawa Soit x un élément de X. Pour que $x = \rho(na)J$ avec n dans N et a dans A il faut et suffit que

$$\Delta_1(x) > 0,\ \Delta_2(x) > 0, \dots, \Delta_p(x) > 0$$

L'application $(n,a) \mapsto \rho(na)J$ est un difféomorphisme de $N \times A$ sur l'ouvert Y de X défini par les inégalités précédentes.

De plus si $x = \rho(na_t)\, J$

$$\Delta_1(x) = e^{2t_1}\ ,\ \Delta_2(x) = e^{2(t_2+t_1)}, \ldots,$$
$$\Delta_p(x) = e^{2(t_1+t_2+\ldots+t_p)}$$
$$\Delta_{p+1}(x) = -\, e^{2(t_1+t_2+\ldots+t_{p+1})}$$
$$\ldots$$
$$\Delta_{n-1}(x) = (-1)^{q-1}\, e^{2(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})},$$
$$\Delta_n(x) = (-1)^q$$

Remarquons que l'ouvert Y contient l'ensemble $\{ x \geqslant J \}$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ et soit P_λ la fonction définie sur Y par

$$P_\lambda(x) = \Delta_1(x)^{\lambda_1} \ldots \Delta_p(x)^{\lambda_p} \, |\Delta_{p+1}(x)|^{\lambda_{p+1}} \ldots |\Delta_{n-1}(x)|^{\lambda_{n-1}}$$

Il existe un convexe ouvert Γ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que si $\operatorname{Re}\lambda \in \Gamma$, et si $y > J$, $g \in G_+$

$$\int_S P_\lambda[\rho(gs)y]\,ds = P_\lambda[\rho(g)J] \int_S P_\lambda[\rho(s)y]\,ds$$

les intégrales étant absolument convergentes.

La fonction φ_λ définie pour $x > J$ par

$$\varphi_\lambda(x) = \int_S P_\lambda[\rho(s)x]\,ds$$

est une fonction sphérique, c'est à dire que pour $y > J$, $g \in G_+$

$$\int_S \varphi_\lambda[\rho(gs)y]\,ds = \varphi_\lambda[\rho(g)J]\, \varphi_\lambda(y)$$

Lorsque $n = 2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $p = q = 1$, pour $\operatorname{Re}\lambda < 0$,

$$\varphi_\lambda[\rho(a_t)J] = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{ch}^2\theta\, e^{2t} - \operatorname{sh}^2\theta\, e^{-2t})^\lambda\, d\theta$$

avec $t = t_1 = -t_2$. La fonction φ_λ s'exprime à l'aide de la fonction de Legendre de 2ème espèce :

$$\varphi_\lambda[\rho(a_t)J] = Q_{-1-\lambda}(\operatorname{ch} 2t)$$

Lorsque $n = 2$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $p = q = 1$, pour $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$

$$\varphi_\lambda\,[\rho(a_t)J] = \int_0^\infty (\mathrm{ch}\,\theta^2 e^{2t} - \mathrm{sh}^2\theta\, e^{-2t})^\lambda\ \mathrm{sh}2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{-\lambda-1}\quad \frac{1}{2\mathrm{sh}2t}\quad e^{2\lambda t}$$

Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, p et q quelconques, il est possible de calculer la fonction sphérique φ_λ en suivant une méthode de Guelfand et Naimark [1].

A l'occasion d'un exposé que j'ai fait à Oberwolfach en juillet 1981 concernant la transformation de Laplace sphérique sur certains espaces hyperboliques, R. Howe m'avait suggéré d'étudier des espaces symétriques liés à des cônes convexes homogènes. A la suite de cela j'ai regardé l'espace des matrices symétriques (ou hermitiennes) de signature (p,q). En fait les mêmes méthodes s'appliquent dans le cadre plus général des espaces symétriques liés aux cônes homogènes autoduaux.

1 I.M. Gelfand, M.A. Naimark, Unitäre Darstellungen der Klassischen Gruppen, Akademie Verlag (1957)

2 M. Mizony, Transformation de Laplace-Jacobi, prépublication, Lyon (1980)

3 M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Mathematica, 81 (1949) 1-223

4 V.Volterra et J. Pérès, Théorie générale des fonctionnelles, Gauthier-Villars (1936)