

A. GUICHARDET

**Extensions de plusieurs représentations des groupes  
produits semi-directs**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 4B  
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1982\\_\\_4B\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__4B_A12_0)

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXTENSIONS DE PLUSIEURS REPRESENTATIONS  
DES GROUPES PRODUITS SEMI-DIRECTS

par A. GUICHARDET  
(Ecole Polytechnique)

§ 1. DONNEES ET POSITION DU PROBLEME.

On se donne un groupe de Lie  $G$ , produit semi-direct d'un sous-groupe distingué  $B$ , isomorphe à un groupe  $\mathbb{R}^{\vee}$ , par un sous-groupe  $A$  ; on écrit  $G = B \rtimes A$  et on note ses éléments  $g = (b, a)$ , avec la loi de composition

$$(b, a) \cdot (b', a') = (b + a \cdot b', aa')$$

où  $(a, b) \mapsto a \cdot b$  désigne l'action de  $A$  dans  $B$  ;

on note  $B^*$  l'espace vectoriel dual de  $B$  avec la dualité  $\langle b, x \rangle$  pour  $b \in B$ ,  $x \in B^*$ , et l'action duale de  $A$  :  $(a, x) \mapsto a \cdot x$ .

Rappelons la construction des représentations unitaires irréductibles de  $G$  suivant Mackey : on se donne un point  $x_0 \in B^*$ , on note  $\mathcal{K} = A \cdot x_0$  son orbite sous  $A$ ,  $S$  son stabilisateur dans  $A$ ,  $(E, \sigma)$  une représentation unitaire irréductible de  $S$ ,  $(E, \rho)$  la représentation de  $B \rtimes S$  telle que

$$\rho(b, s) = e^{i\langle b, x_0 \rangle} \sigma(s) ;$$

enfin  $(F, \pi)$  la représentation de  $G$  induite au sens unitaire par  $(E, \rho)$ .

Les représentations considérées ici seront un peu différentes :

$(E, \sigma)$  sera une représentation  $C^\infty$  de  $S$ , irréductible, dans un espace localement convexe complet  $E$  ;

$(E, \rho)$  sera définie comme ci-dessus ;

$(F, \pi)$  sera induite au sens  $C^\infty$  par  $(E, \rho)$ , i.e.

$$F = \{ \phi \in C^\infty(A, E) \mid \phi(as) = \sigma(s)^{-1} \cdot \phi(a) \}$$

$$(\pi(b, a) \cdot \phi)(a') = e^{i \langle b, a' \cdot u_0 \rangle} \cdot \phi(a^{-1} a') .$$

Donnons-nous maintenant  $u_0$  comme ci-dessus (d'où  $\mathfrak{X}$  et  $S$ ) et un nombre fini de  $S$ -modules  $(E_1, \sigma_1), \dots, (E_n, \sigma_n)$  comme plus haut ; il en résulte des  $G$ -modules  $(F_1, \pi_1), \dots, (F_n, \pi_n)$ . On cherche à décrire les "extensions de  $(F_1, \dots, F_n)$ ", notion qui est définie comme suit.

DEFINITION. - *Considérons un groupe de Lie  $G$  et des  $G$ -modules  $C^\infty F_1, \dots, F_n$  ;*

*un  $G$ -module  $C^\infty F$  est une extension de  $(F_1, \dots, F_n)$  s'il contient des sous- $G$ -modules fermés*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = F$$

*vérifiant*

$$(i) V_i / V_{i-1} \sim F_i ;$$

*(ii)  $V_i$  admet un supplémentaire topologique dans  $V_{i+1}$ , autrement dit  $F$  est, en tant qu'E.V.T. la somme directe  $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ .*

On note  $\text{Ext}(G, (F_1, \dots, F_n))$  l'ensemble des (classes d'équivalence de)  $G$ -modules  $C^\infty$  qui sont des extensions de  $(F_1, \dots, F_n)$  ; et  $\text{Ext}_i(G, (F_1, \dots, F_n))$  le sous-ensemble des  $G$ -modules indécomposables.

REMARQUE 1. Lorsque  $n=2$ , un  $G$ -module  $F$  est une extension de  $(F_1, F_2)$  s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F_2 \longrightarrow 0$$

qui est scindée en tant que suite exacte d'E.V.T., i.e.  $v$  admet une section linéaire continue ; on dit habituellement qu'une telle suite exacte est une

"extension de  $F_2$  par  $F_1$ " ; on note  $\text{Ext}_G^1(F_2, F_1)$  le quotient de l'ensemble de suites exactes par une certaine relation d'équivalence, qui entraîne l'équivalence des  $G$ -modules  $F$  ; de sorte que  $\text{Ext}(G, (F_1, F_2))$  est un quotient de  $\text{Ext}_G^1(F_2, F_1)$ .

REMARQUE 2. On a considéré un seul point  $x_0$  (ou, mieux, une seule orbite  $\mathfrak{x}$ ) parce que, dans le cas contraire, on démontre que  $\text{Ext}_i(G, (F_1, \dots, F_n))$  est vide.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS.

On note  $T = T_{x_0}(\mathfrak{x})$  le sous-espace vectoriel de  $B^*$  parallèle au sous-espace tangent à  $\mathfrak{x}$  en  $x_0$  ;  $N$  le sous-espace vectoriel de  $B$  orthogonal  $T$  ; pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $(E_j, \tau_j)$  le  $N \times S$ -module, restriction de  $B \times S$ -module  $(E_j, b_j)$ , c'est-à-dire

$$\tau_j(n, s) = e^{i\langle n, x_0 \rangle} \cdot \sigma_j(s).$$

THEOREME 1 . - On suppose que  $T$  admet un sous-espace supplémentaire  $S$ -invariant dans  $B^*$  ; par dualité,  $N$  admet un supplémentaire  $S$ -invariant dans  $B$  ; donc il existe un projecteur  $S$ -invariant  $\rho$  de  $B$  sur  $N$ . Partons d'un  $N \times S$ -module

$$(E, \tau) \in \text{Ext}(N \times S, ((E_1, \tau_1), \dots, (E_n, \tau_n))) ;$$

relevons-le en un  $B \times S$ -module  $(E, \rho)$  comme suit :

$$\rho(b, s) = e^{i\langle b - \rho(b), u_0 \rangle} \cdot \tau(\rho(b), s).$$

induisons (au sens  $C^\infty$ ) le  $B \times S$ -module  $(E, \rho)$  en un  $G$ -module  $(F, \pi)$

Alors  $(F, \pi) \in \text{Ext}(G, ((F_1, \pi_1), \dots, (F_n, \pi_n)))$ ,

de sorte qu'on obtient une application

$$\text{Ext}(N \times S, ((E_1, \tau_1), \dots, (E_n, \tau_n))) \rightarrow \text{Ext}(G, ((F_1, \pi_1), \dots, (F_n, \pi_n))).$$

Cette application est bijective et conserve l'indécomposabilité dans les deux sens

Le principe de la démonstration est exposé dans [2] ; elle repose sur divers résultats cohomologiques de [1] et [4] .

COROLLAIRE. - Toute extension des  $C$ -modules  $((F_1, \pi_1), \dots, (F_n, \pi_n))$  est induite au sens  $C^\infty$  par une extension des  $B \times S$ -modules  $((E_1, \rho_1), \dots, (E_n, \rho_n))$  ; en particulier elle admet un système d'imprimitarité basé sur  $\mathfrak{X}$ .

§ 3. EXEMPLES.

Exemple 1. (Groupe affine de  $\mathbb{R}$  ou des  $ax+b$ ). Ici  $A = \mathbb{R}_+^*$ ,  $B = \mathbb{R}$  et  $a \cdot b = ab$  ; prenons  $x_0 \neq 0$  ; alors  $T = B\$, S$  et  $N$  sont triviaux, tous les  $(F_j, \pi_j)$  sont identiques à l'un d'eux soit  $(F_1, \pi_1)$ , et toute extension de  $((F_1, \pi_1), \dots, (F_1, \pi_1))$   $n$ -fois est somme directe  $(F_1, \pi_1) \oplus \dots \oplus (F_1, \pi_1)$ .

Exemple 2. (Groupe euclidien). Ici  $A = \text{So}(m)$ ,  $B = \mathbb{R}^m$  ; on prend  $x_0 = (0, \dots, 0, 1) \in B^* = \mathbb{R}^m$  ;  $\mathfrak{X}$  est la sphère  $S^{m-1}$ ,  $T$  admet un supplémentaire  $S$ -invariant ;  $N$  est l'ensemble des  $b = (0, \dots, 0, b_m)$ , isomorphe à  $\mathbb{R}$  avec action triviale de  $S$ , donc  $N \rtimes S = N \times S$  ;  $\text{Ext}_i(N \times S, ((E_1, \tau_1) \dots (E_n, \tau_n)))$  est vide si les  $\sigma_j$  ne sont pas toutes identiques ; si elles le sont,  $\text{Ext}_i(N \times S, ((E_1, \tau_1), \dots, (E_1, \tau_1)))$  est réduit à un élément, donc  $\text{Ext}_i(G, ((F_1, \pi_1), \dots, (F_1, \pi_1)))$  est réduit à un élément  $(F, \pi)$ , qu'on peut décrire comme suit sous forme infinitésimale : on note encore  $\pi_1$  la différentielle de  $\pi_1$ ,  $(Y, X)$  un élément quelconque de  $\mathfrak{G} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$ , algèbre de Lie de  $G$  ; un élément de  $F_1$  est une section d'un certain fibré de base ; un élément de  $F$  est un  $n$ -uplet de telles sections, soit  $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  ;

on a

$$(\pi(Y, X) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix})(x) = \begin{pmatrix} (\pi_1(Y, X) \cdot f_1)(x) + \langle Y, x \rangle \cdot f_2(x) \\ (\pi_1(Y, X) \cdot f_2)(x) + \langle Y, x \rangle \cdot f_3(x) \\ \vdots \\ (\pi_1(Y, X) \cdot f_n)(x) \end{pmatrix} ;$$

ou encore, sous forme matricielle

$$\pi(Y,X) = \begin{pmatrix} \pi_1(Y,X) & \langle Y, \cdot \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_1(Y,X) & \langle Y, \cdot \rangle & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pi_1(Y,X) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pi_1(Y,X) \end{pmatrix}$$

où  $\langle Y, \cdot \rangle$  désigne l'opérateur de multiplication par la fonction  $x \mapsto \langle Y, x \rangle$ .

Exemple 3 . (Groupe de Poincaré). Pour les orbites qui sont les nappes d'hyperboloïdes à deux nappes ou les hyperboloïdes à une nappe, le théorème 1 s'applique parce que  $S$  est semi-simple, et les résultats sont très semblables à ceux de l'exemple 2. Par contre pour les orbites coniques,  $T$  n'a pas de supplémentaire  $S$ -invariant ; il existe des extensions de  $(\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n)$  qui ne sont pas induites à partir de  $B \times S$  ; par exemple prenant  $n = 2$  et  $(\mathbb{F}_1, \pi_1) = (\mathbb{F}_2, \pi_2) =$  représentation d'hélicité nulle, on obtient des extensions représentées par les matrices

$$\pi(Y,X) = \begin{pmatrix} \pi_1(Y,X) & \phi(Y,X) \\ 0 & \pi_1(Y,X) \end{pmatrix}$$

où  $\phi(Y,X)$  est un opérateur différentiel, et non plus un opérateur de multiplication comme à l'exemple 2. On trouvera d'autres résultats concernant cet exemple dans [3], qui a d'ailleurs largement motivé le présent travail.

Exemple 4 . (Groupe de Heisenberg). Ici  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R}^2$ , avec l'action de  $A$  sur  $B$  définie par

$$a \cdot (b_1, b_2) = (b_1 + ab_2, b_2) ;$$

Le théorème 1 s'applique ; en réalité, il est plus naturel de remplacer la représentation induite au sens  $C^\infty$  (qui opère dans  $C^\infty(\mathbb{R})$ ) par la représentation analogue opérant dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , puisque cette dernière est la représentation différentiable associée à la représentation induite unitaire. Les résultats restent en tout point semblables à ceux des exemples précédents. Ajoutons, que pour des groupes nilpotents plus généraux la situation est infiniment plus compliquée ...

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. GUICHARDET, *Extensions des représentations induites des produits semi-directs*. J. für reine angew. Math., t. 310, 1979, p. 7-32.
- [2] A. GUICHARDET, *Sur les extensions de plusieurs représentations d'un groupe* (Preprint, Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 1982).
- [3] G. RIDEAU, Cours donné à LOUVAIN en 1980 sur les *extensions des représentations du groupe de Poincaré*.
- [4] F. DUCLOUX, *Sur les n-extensions des représentations induites les produits semi-directs*, Thèse de 3e cycle, Paris-Sud, 1980).

\*\*\*\*\*