E. Angelopoulos

Unitarisabilité des modules de Harish-Chandra et produits tensoriels de $\mathfrak{k}$-modules. le cas de $\mathfrak{So}(p,q)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A1_0>

UNITARISABILITE DES MODULES DE HARISH-CHANDRA ET PRODUITS TENSORIELS DE $\mathfrak{k}$-MODULES. LE CAS DE $\mathfrak{so}(p,q)$

par E. ANGELOPOULOS

(Université de Dijon)

On décrit les principaux outils utilisés dans une approche algébrique du problème de la détermination du dual unitaire d'une algèbre de Lie semi-simple (ou réductive) réelle ; l'étude des propriétés des objets introduits ici conduit à des résultats (encore partiels) pour le cas de $\mathfrak{so}(p,q)$.

1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive réelle, $\mathfrak{k}$ sa sous-algèbre compacte maximale, $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{k})$ les algèbres enveloppantes, $Z(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{k})$ les centres, $C^{\mathfrak{k}}$ le commutant de $\mathfrak{k}$ dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan, $\hat{\mathfrak{k}}$ le dual unitaire de $\mathfrak{k}$ (on identifiera un élément de $\hat{\mathfrak{k}}$ et son poids dominant).

Soit $\mathscr{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}\, \vec{e}_i$ (somme algébrique, I dénombrable) un $\mathfrak{g}$-module simple muni d'une forme sesquilinéaire non dégénérée $\mathfrak{g}$-invariante : $(X\phi|\psi)+(\phi|X\psi) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On dira que $\mathscr{E}$ est un module de Harish-Chandra <u>unitarisable</u> ssi la f.s. est définie positive

$$(\phi|\phi) > 0 \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{E} - \{0\} \tag{o}$$

(définition qui évacue toute considération non algébrique). On a la condition équivalente :

<u>PROPOSITION 0.</u> - *$\mathscr{E}$ est métrisable, ssi toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de la forme* X^*X ($X \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$) *est (représentée par) une application linéaire positive de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.*

REMARQUE. On peut se restreindre à $X \in \mathfrak{g}$ (alors $X^* = -X$).

2. Soit $\mathscr{E} = \oplus_{\lambda \in \hat{\mathfrak{k}}} \mathscr{E}_\lambda$ la réduction sur $\mathfrak{k}$ de $\mathscr{E}$, la composante isotypique $\mathscr{E}_\lambda$ étant isomorphe à $\mathscr{M}_\lambda \otimes V_\lambda$, $\mathscr{M}_\lambda$ multiplicité, V_λ représentant de λ. On notera $R_{\mathfrak{g}_{\mathscr{E}}}(\lambda)$, ou $R_{\mathfrak{g}}(\lambda)$, le rang de λ (c.à.d. $\mathscr{M}_\lambda \neq \{0\}$). L'étude de la positivité de la f.s. se ramène à

PROPOSITION 1. - *$\mathscr{E}$ est unitarisable ssi tout élément de* E *est une application linéaire positive de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, avec, indifféremment :*

a) $E = \{X^*X \; ; \; X \in \mathfrak{p}\}$,

b) $E = \{X^*zX \; ; \; X \in \mathfrak{p} \; , \; z \in Z(\mathfrak{k}) \; , \; z \geqslant 0\}$.

En considérant $\mathfrak{p}$ comme un $\mathfrak{k}$-module unitaire grâce à la forme de Killing, introduisons une base $\{X_n\}$ orthonormée ; on peut affirmer :

PROPOSITION 2. - *Soit, $\forall \lambda \in \hat{\mathfrak{k}}$, Z_λ^+ le sous-ensemble de $Z(\mathfrak{k})$ représenté par des a.l. positives sur le $\mathfrak{k}$-module $\mathfrak{p} \otimes V_\lambda$. Supposons que tout facteur simple de $\mathfrak{p} \otimes V_\lambda$ est de multiplicité 1. (Hypothèse pas trop restrictive en pratique et techniquement agréable). Alors $\mathscr{E}$ est métrisable, ssi $\forall \lambda \in R_{\mathfrak{g}_{\mathscr{E}}}(\lambda)$ $\forall z \in Z_\lambda^+$, l'élément $\sum_h (-X_h \, z \, X_h)$ est une application linéaire positive de $\mathscr{M}_\lambda$ sur $\mathscr{M}_\lambda$.*

COROLLAIRE. - *Soit $\oplus_{\mu \in \Omega} V_\mu = \mathfrak{p} \otimes V_\lambda$ la décomposition du produit tensoriel en modules simples, et soit $\forall_\mu \in \Omega$, $z_{\mu\lambda} \in Z(\mathfrak{k})$ tel que $z_{\mu\lambda} V_\mu \neq \{0\}$, $z_{\mu\lambda} V_{\mu'} = \{0\}$ pour $\mu' \in \Omega$, $\mu' \neq \mu$. Alors $\mathscr{E}$ est unitarisable ssi tous les $\sum_h (-X_h \, z_{\mu\lambda}^* \, z_{\mu\lambda} \, X_h)$ sont des a.l. positives.*

3. Pour réaliser la réduction du produit tensoriel on introduit les polynômes caractéristiques de $\mathfrak{k}$.

DEFINITION. - *Soit* W *le groupe de Weyl de* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan* $H \in \mathfrak{h}$ $\bar{H} = \{H' \in \mathfrak{h}\ ;\ \exists w,\ H' = Hw\} = \{H_1,\dots,H_n\}$ *et*, $\forall_\lambda \in \mathfrak{h}$, $\lambda_i = \lambda(H_i)$; *Soit* $P(t) = \prod_i (t-\lambda_i - \delta_i)$, *avec* $\delta \in \mathfrak{h}'$. *L'image réciproque* C(t) *de* P(t) *dans* $Z(\mathfrak{k})[t]$ *par l'isomorphisme de Harish-Chandra sera appelée un polynôme caractéristique (à une variable, relatif à* $\bar{H}$,δ*) de* $\mathfrak{k}$.

Par des choix appropriés de δ, de $\bar{H}$, et de la variable t, on peur construire des éléments $z^{\mu\lambda}$ du corollaire.

4. En utilisant des formules du type

(1) $$\Sigma_h X_h\, C(t)\, X_h = \sum_{h,\ell} X_h X_\ell\, T^{(t)}_{\ell;h} \quad \text{avec} \quad T^{(t)}_{\ell;h} \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}),$$

(2) $$\sum_{\ell,h} [X_h, X_\ell]\, T^{(t)}_{\ell;h} \in Z(\mathfrak{k})\ ,$$

on aboutit à des relations linéaires entre des éléments de $C^{\mathfrak{k}}$ (plus exactement leurs images dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{M}_\lambda)$). Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ la connaissance de ces relations permet une caractérisation complète des $\mathfrak{g}$-modules unitarisables pour q = 1 (où l'on retrouve les résultats de Thieleker, [1]) et q = 2, déjà amorcée dans [2] ; pour q > h il semble nécessaire de considérer des produits tensoriels de $\mathfrak{k}$-modules de la forme $\mathfrak{p}^{\wedge k} \otimes V_\lambda$. Bien que l'étude des propriétés des éléments de $C^{\mathfrak{k}}$ correspondants ne soit pas encore suffisamment approfondie, on peut espérer aboutir à des résultats du type suivant :

a) Il existe une relation d'ordre partiel sur $\hat{\mathfrak{k}}$, suffisamment fine, telle que, lorsque $(\phi|\phi) > 0$ pour $0 \neq \phi \in \mathcal{E}_\lambda$ et λ minimal dans $R_{\mathfrak{g}\,\mathcal{E}}(\lambda)$, alors $\mathcal{E}$ est unirarisable ;

b) Les racines du polynôme caractéristique de $\mathfrak{g}$ (défini à l'aide de celui de la forme jumelle compacte de $\mathfrak{g}$) se trouvent dans une partie algébrique de $\mathbb{C}^{\mathrm{rang}(\mathfrak{g})}$ entièrement déterminée par la donnée des λ minimaux.

REFERENCES.

[1] E. THIELEKER, Trans. Amer. Math. Soc. 179, 1973, p. 465.
199, 1974, p. 327.
230, 1977, p. 1.

[2] E. ANGELOPOULOS, C. R. Acad. Sc. Paris, I, 192, 1981, p. 469.

****