PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

G. BOHNKE

Synthèse spectrale dans les algèbres de Sobolev non isotropes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A4_0>

SYNTHESE SPECTRALE DANS LES ALGEBRES DE SOBOLEV NON ISOTROPES

par G. BOHNKE
(Université de Nancy-1)

Soit N un groupe de Lie nilpotent stratifié au sens de FOLLAND (C'est-à-dire une algèbre de Lie réelle N qui s'écrit $N = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$ où $[V_1, V_m] = V_{k+1}$ $1 \leqslant k \leqslant m-1$ et $[V_1, V_n] = 0$ pour le crochet de Lie, et où la loi de groupe est donnée par la formule de CAMPBELL-HAUSDORFF

$$X.Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\{[X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\} + \ldots ;$$

l'application exponentielle étant, par construction, l'identité.)

On note $Q = \sum_{i=1}^{m} i \dim V_i$ la dimension (homogène) de N par rapport aux automorphismes suivants :

$$\delta_t(X) = t X_1 + \ldots + t^m X_m , \quad X = X_1 + \ldots + X_m , \quad t > 0 .$$

Soit $j = \sum_{j=1}^{\dim V_1} \tilde{X}_j^e$ le sous-laplacien de N ($\tilde{X}_j$ est le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X_j : $\tilde{X}_j(f)\ (x) = \frac{d}{dt} f\ (x.t\ X_j)_{t=o})$) et $h(x,\tau)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$(J - \frac{\partial}{\partial \tau})\ h\ (x,\tau) = \delta \text{ masse de Dirac en } 0 \qquad (x,\tau) \quad N \times \mathbb{R}.$$

On définit les noyaux ce Riesz et de Bessel par le calcul fonctionnel :

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_o^{+\infty} t^{\alpha/2-1} h(x,t)dt \ ;$$

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_o^{+\infty} e^{-t}\ t^{\alpha/2-1}\ h(x,t)dt \text{ pour } \alpha > 0 .$$

L'espace de Sobolev non isotrope est, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,

$$S_{\alpha}^{P}(N) = \{f * J_{\alpha} \;/\; f \in L^{f}(N)\} \quad ,$$

espace de Banach pour la norme $\| f * J_{\alpha} \|_{S_{\alpha}^{P}} = \| f \|_{L^{P}}$.

Son dual est $S_{-\alpha}^{q}(N)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ caractérisé par

$$T \in S_{-\alpha}^{q}(N) \Longleftrightarrow T * J_{\alpha} \in L^{q} \; .$$

<u>J'ai démontré les résultats suivants</u> :

<u>THEOREME 1</u>. - $S_{\alpha}^{P}(N)$ *est une algèbre pour* $\alpha > \frac{Q}{P}$.

<u>THEOREME II</u>. - *Les compacts de* N *ayant la propriété du cône sont de synthèse spectrale dans l'algèbre* S_{α}^{P}

<u>THEOREME III</u>. - *Soit* $\mathbb{H}_n$ *le groupe d'Heisenberg d'ordre* n. *Il y a autant d'idéaux primaires au-dessus de* 0, *dans l'algèbre de Sobolev non isotrope* $S_{\alpha}^{2}(H_n)$, *invariants par le groupe symplectique* $S_p(2n,\mathbb{R})$ *que de suites ordonnées d'entiers*

$$\ell_o \geqslant \ell_1 \geqslant \ldots \geqslant \ell_n \geqslant 0 \quad \text{où} \quad \ell_o > \alpha - (n+1).$$

Deux idéaux $I_{\ell_o,\ell_1,\ldots,\ell_r}$ *et* $I_{\ell'_o,\ell'_1,\ldots,\ell'_r}$, *sont inclus l'un dans l'autre si et seulement si* $r' = r$ *et* $\ell'_j \leqslant {}_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

(Autrement dit, on a un <u>arbre</u> d'idéaux primaires au-dessus de 0, la synthèse spectrale n'étant réalisée, au sens strict, que si et seulement si $n+1 < \alpha \leqslant n+2$.)

INDICATIONS SUR LES DEMONSTRATIONS.

LE THEOREME I se démontre par interpolation. On démontre d'abord la propriété pour α entier en utilisant la formule de LEIBNIZ non commutative et des inclusions de Sobolev entre eux, puis le cas "irréductible", $0 < \alpha < 1$, d'abord localement :

$$S_\alpha^P(K) . S_\alpha^P(K) \subset S_\alpha^P(K),$$

pour $\frac{2Q}{P} < \alpha < 1$, en utilisant la "fonctionnelle" :

$$D_\alpha(f)(x) = \int_N (f(xy^{-1}) - f(x)) J_{-\alpha}(y) dy$$

pour $f \in \mathscr{D}(N) \cap S_\alpha^P$. $(f \in \mathscr{D}(N) \cap S_\alpha^P \iff D_\alpha(f) \in L^P)$.

Le passage du local au global se fait par une partition de l'unité "très disjointe" et n'est pas trivial. (Il m'a été suggéré par Michael COWLING.)

LE THEOREME II est obtenu en définissant les capacités de Riesz et de Bessel non isotropes et en étendant à ces capacités des résultats fins de la théorie du potentiel de $\mathbb{R}$.

LE THEOREME III. Ce théorème utilise la théorie des représentations de $\mathbb{H}_n$ et la caractérisation du dual $S_{-\alpha}^2(\mathbb{H}_n)$ via la formule de Fourier-Plancherel.

$$T \in S_{-\alpha}^2(\mathbb{H}_n) \iff T * J_\alpha \in L^2(N)$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \| \hat{T}(\lambda) \circ \hat{J}_\alpha(\lambda) \|_{H.S(\lambda)}^2 \lambda^n d\lambda ,$$

H. S(λ) désignant la norme de Hilbert-Schmidt dans l'espace $\mathscr{H}_\lambda$ de la représentation d'indice $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour la classification en arbre des idéaux primaires, on a le lemme suivant qui a son intérêt propre :

LEMME . - *Soit $\mathcal{U}$ l'algèbre enveloppante de* N *agissant sur les polynômes* $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{2n},T]$ *par dérivations. Soit* W *un* $\mathcal{U}$*-module de* $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{2n},T]$ *invariant par le groupe* $S_p(2n,\mathbb{R})$. *Il existe une suite décroissante*

$$+\infty \geqslant \ell_o \geqslant \ell_1 \geqslant \dots \geqslant \ell_r > \dots$$

d'entiers $\ell_r \in \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *telle que si*

$$W_r = W \cap (\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{2n}] \oplus T\,\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{2n}] \oplus \dots \oplus T^r\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{2n}] ,$$

r entier $\geqslant 0$, *on a*

$$W_r = \bigoplus_{j=o}^{r} T^j\, \mathbb{C}_{\ell_j}[X_1,\dots,X_{2n}] \quad ,$$

où $\mathbb{C}_{\ell_j}[X_1,\dots,X_{2n}]$ *est l'espace des polynômes de degré* $\leqslant \ell_j$.

DEMONSTRATION.

On utilise essentiellement le lemme de Schur pour les représentations finies de $S_p(2n,\mathbb{R})$ dans les polynômes homogènes.

****