

A. DERIGHETTI

**À propos des convoluteurs d'un groupe quotient**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1982, fascicule 4B  
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1982\\_\\_4B\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__4B_A8_0)

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# A PROPOS DES CONVOLUTEURS D'UN GROUPE QUOTIENT

par A. DERIGHETTI

(Université de Lausanne)

Soient  $G$  un groupe localement compact et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  normal dans  $G$ . On sait que  $T_H f(\dot{x}) = \int_H f(xh) dh$  définit une contraction de  $L^1(G)$  sur  $L^1(G/H)$ , qui admet un prolongement naturel, noté encore  $T_H$ , du Banach  $M^1(G)$ , espace des mesures de Radon bornées sur  $G$ , sur  $M^1(G/H)$ . De plus,  $M^1(G/H)$  est isométrique au quotient de  $M^1(G)$  par le noyau de  $T_H$ .

Soient  $1 < p < \infty$  et  $CV_p(G)$  les  $p$ -convoluteurs de  $L^p(G)$ ;  $M^1(G)$  s'identifie de façon naturelle à un sous-espace de  $CV_p(G)$ . Si  $G$  est moyennable et  $H$  normal dans  $G$ , M. Anker a construit [1] une contraction  $R$  de  $CV_p(G)$  dans  $CV_p(G/H)$  qui sur les convoluteurs associés à des mesures coïncide avec  $T_H$ .

Nous commençons par apporter un additif concernant cette application  $R$ .

THEOREME 1. - *Supposons  $G$  abélien. Pour tout  $T \in CV_p(G)$  dont la transformée de Fourier  $\hat{T}$  est uniformément continue sur  $\hat{G}$   $R(T)^\wedge$  coïncide localement presque partout sur  $H^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(H) = \{1\}\}$  avec la restriction de  $\hat{T}$  à  $H^\perp$ .*

REMARQUE. - Ce résultat a été obtenu en collaboration avec M. Anker (cf. aussi [1]).

Si  $f$  est définie sur  $G$  a,  $x \in G$  on pose  $f_a(x) = f(ax)$  et  $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ . Pour tout  $k \in L^p(G)$   $\ell \in L^{p'}(G)$  la relation  $(M_{k,\ell}(T)\phi, \psi) = \int_G dt (T\phi_{t^{-1}}(\check{k}), \psi_{t^{-1}}(\ell)) dt$  avec  $T \in CV_p(G)$ ,  $\phi \in L^p(G)$ ,  $\psi \in L^{p'}(G)$  définit un  $p$ -convoluteur de  $G$  dont la norme satisfait à la condition  $\| \| M_{k,\ell}(T) \| \| \|_p < \| \| T \| \| \|_p \| \| k \| \|_p \| \| \ell \| \|_p$ .

Si  $G$  est moyennable,  $T$  est limite faible, avec contrôle des normes, d'opérateurs du type  $M_{k,\ell}(T)$ . Au surplus,  $M_{k,\ell}(T)$  est dans l'adhérence normique dans  $CV_p(G)$  de l'ensemble des convolutes à support compact. Notons cet espace  $cv_p(G)$ .

Soient  $\beta$  une fonction de Bruhat associée à la paire  $(H,G)$ ,  $k \in L^p(G)$  et  $\ell \in L^{p'}(G)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ). La relation

$$(\Omega_{k,\ell}(T)\phi, \psi) = \int_G dt (T T_H[\phi_t^{-1}(k \beta^{1/p'})], T_H[\psi_t^{-1}(\ell \beta^{1/p})]),$$

où  $T \in CV_p(G)$ ,  $\phi \in L^p(G)$ ,  $\psi \in L^{p'}(G)$  définit un convoluteur  $\Omega_{k,\ell}(T)$  de  $G$ . On a en fait  $\Omega_{k,\ell}(T) \in cv_p(G)$ .

THEOREME 2. - Supposons  $G$  moyennable et  $H$  sous-groupe fermé de  $G$  normal dans  $G$ .

Pour tout  $k \in L^p(G)$  et  $\ell \in L^{p'}(G)$ , on a  $R \circ \Omega_{k,\ell} = M_{k,\ell}$  avec

$$\check{k} = \Delta_{G/H}^{1/p} T_H(\Delta_G^{1/p} k \beta^{1/p'}) \quad \text{et} \quad \check{\ell} = \Delta_{G/H}^{1/p'} T_H(\Delta_G^{1/p'} \ell \beta^{1/p}).$$

COROLLAIRE. - Supposons en outre  $G/H$  compact. On a  $R(\Omega_{k,\ell}(T)) = T$  pour tout

$T \in CV_p(G/H)$ , où  $\check{k} = (\Delta_G \beta)^{1/p}$  et  $\check{\ell} = (\Delta_G \beta)^{1/p'}$ ;  $\Omega_{k,\ell}$  est une isométrie de  $CV_p(G/H)$  dans  $cv_p(G)$ .

REMARQUE. - Si  $G$  est de plus abélien, on retrouve un résultat de Figà-Talamanca et Gaudry [2] et de N. Lohoué [3].

EXEMPLE. - Le Banach  $cv_p(T)$  est isométrique, par une application explicite, au quotient de  $cv_p(M(2))$ , où  $M(2)$  est le groupe des déplacements de plan, par le noyau de  $R$  dans  $cv_p(M(2))$ .

THEOREME 3. - Supposons  $G$  moyennable et  $H$  sous-groupe fermé de  $G$  normal dans  $G$ ,  
Alors  $cv_p(G/H)$  est isométrique au quotient de  $cv_p(G)$  par le noyau de  $R$   
dans  $cv_p(G)$ .

EXEMPLE. Le Banach  $cv_p(\mathbb{R}^\times)$  est isométrique à un quotient de  $cv_p(G)$ , où  $G$  est  
le groupe affine de  $\mathbb{R}$ .

REMARQUE. - Les preuves des résultats contenus dans ce texte feront l'objet d'une  
publication séparée.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. PH. ANKER, *Aspects de la p-induction en Analyse Harmonique*, Thèse, Lausanne 1982.
- [2] A. FIGA-TALAMANCA, G.I. AUDRY, *Extensions of Multipliers*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 3, 1003-1014 (1970).
- [3] N. LOHOUE, *Algèbres  $A_p(G)$  et convoluteurs de  $L^p(G)$* , Thèse, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1971.

\*\*\*\*\*