GUY PATISSIER

1 Structure de contact et équations aux dérivées partielles d'après V. V. Lychagin

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___3B_A1_0>

STRUCTURE DE CONTACT ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES D'APRES V.V. LYCHAGIN

par Guy PATISSIER

0) Introduction. On se propose d'étudier les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles et la géométrie du contact. D'un point de vue général ces questions ont été abordées par OLVER [3] et VINOGRADOV [4] .

La structure géométrique adaptée à l'étude des e.d.p. du $k^{è}$-ordre est celle du fibré des k-jets sur M, cependant en se limitant aux équations du premier ordre et à un type particulier d'équation du second ordre on peut ne considérer que le fibré des 1-jets (LYCHAGIN, [1] , [2]) ; c'est ce point de vue que nous adoptons.

Le plan est le suivant :

1) Fibré des 1-jets $J^1(M)$, structure de contact sur $J^1(M)$, sous-variétés de LEGENDRE de $J^1(M)$, champs de contact et difféomorphismes de contact.

2) Equations du 1er ordre, solutions généralisées des équations du 1er ordre.

3) Théorie de HODGE, formes différentielles sur $J^1(M)$, équations du second ordre de MONGE-AMPERE, symétries.

1) LE FIBRE des 1-JETS $J^1(M)$

Dans toute la suite M désigne une variété de classe C^∞, de dimension n, connexe et sans bord, $q=(q_1,\dots,q_n)$ est un système de coordonnées locales dans M et $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ à valeurs réelles.

1.1) Si q est un point de M, on note $\mathscr{E}(q)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des germes de fonction C^∞ en q et m(q) l'idéal maximal des germes qui s'annulent en q. On pose $J^1(M) = \dfrac{\mathscr{E}(q)}{m^2(q)}$, où $m^2(q) = \{f.g \ / \ f, g \in m(q)\}$ est l'idéal des germes qui s'annulent à l'ordre 2 en q, $J^1(M)$ est un espace vectoriel de dimension n+1 (c'est une conséquence de la formule de TAYLOR). On pose $J^1(M) = \bigcup\limits_{q\in M} J^1(M)_q$.

1.1.0) PROPOSITION. $J^1(M)$ *est un fibré vectoriel de rang* n+1.

On note $(q_1,\dots,q_n, u, p_1,\dots,p_n)$ les coordonnées locales de $J^1(M)$ associées à $(q_1,\dots,q_n)$ *et* $\pi_1 : J^1(M) \to M$ la projection canonique.

1.2) Comme $\mathscr{E}(q) = \mathbb{R} \oplus \mathscr{M}(q) \simeq \mathbb{R}\times\mathscr{M}(q)$ on a

$$J^1(M)_q = \frac{\mathbb{R}\times\mathscr{M}(q)}{\mathscr{M}(q)^2} \simeq \mathbb{R}\times\frac{\mathscr{M}(q)}{\mathscr{M}(q)^2} \quad \text{d'où}$$

$$J^1(M) \simeq \Big(\bigcup_{q\in M} \frac{\mathscr{M}(q)}{\mathscr{M}(q)^2} \Big) \times \mathbb{R}\,, \quad \text{or} \quad \bigcup_{q\in M} \frac{\mathscr{M}(q)}{\mathscr{M}(q)^2} \simeq T(M)^*$$

(c'est d'ailleurs une des constructions classiques du fibré cotangent).

donc $\boxed{J^1(M) \cong T(M)^* \times R.}$ (1.2.0)

La relation $\cong$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels qui en coordonnées locales s'écrit $\cong (q,u,p) = ((q,p)\ ;\ u)$.

1.3) Si $F \in C^\infty(M)$, on note F_q le germe de F en q et $j^1(F)(q)$ la classe d'équivalence de F_q dans $\dfrac{\mathscr{E}(q)}{\mathscr{M}(q)^2}$. On définit ainsi une section $j^1(F): M \to J^1(M)$.

1.3.0) <u>PROPOSITION</u>. $j^1(F) : M \to J^1(M)$ *est une section de classe* C^∞ *du fibré des* 1-jets *qui s'écrit localement*

$$j^1(F)\ (q_1,\ldots,q_n) = \left(q_1,\ldots,q_n,\ F(q_1,\ldots,q_n), \frac{\partial F}{\partial q_1}(q_1,\ldots,q_n),\ldots,\frac{\partial F}{\partial q_n}(q_1,\ldots,q_n)\right).$$

1.3.1) Notons : $\alpha : J^1(M) \to T^*(M)$ la projection naturelle définie à partir de la relation 1.2.0. (localement on a $\alpha(q,u,p) = (q,p)$ où $q = (q_1,\ldots,q_n)$, $p = (p_1,\ldots,p_n)$).

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
J^1(M) \arrow[rr, "\alpha"] & & T(M)^* \\
& M \arrow[ul, "j^1(F)"] \arrow[ur, "d(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

1.4) Soient M_1 et M_2 deux variétés et $F = M_1 \to M_2$ une fonction de classe C^∞, on définit une application $J^1(F)_{m_2}$

$$J^1(F)_{m_2} \; : \; J^1(M_2)_{m_2} \longrightarrow J^1(M_1)_{m_1} \quad \text{en posant}$$

$$\left[J^1(F)_{m_2}\right]\left(j^1(f)(m_2)\right) = j^1\left(F^*(f)\right)(m_1)$$. Si F est un difféomorphisme $J^1(F)$ est un difféomorphisme de $J^1(M_2)$ dans $J^1(M_1)$.

On a les relations $J^k(G\circ F) = J^k(F) \circ J^k(G)$

$$J^k(I) = I$$

2) <u>STRUCTURE de CONTACT SUR $J^1(M)$</u>.

Soient $\alpha : J^1(M) \to T^*(M)$, $\beta : J^1(M) \to \mathbb{R}$ les projections. Si $\bar{\omega}$ est la 1-forme de LIOUVILLE de $T^*(M)$, on pose $U_1 = \beta^*(du) - \alpha^*(\bar{\omega})$ où u est la coordonnée relative à $\mathbb{R}$.

Rappelons que la 1-forme de LIOUVILLE est définie par

$$< \bar{\omega}_{\xi_q} \; , \; X_{\xi_q} > = < \xi_q / T_{\xi_q}(\pi) . X_{\xi_q} > .$$

où $\qquad \xi_q \in T_q^*(M)$, $X_{\xi_q} \in T_{\xi_q}(T^*(M))$, et où $\pi : T^*(M) \to M$

est la projection canonique.

L'expression de $\bar{\omega}$ en coordonnées locales est

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i ,$$

on en déduit l'expression de U_1 en coordonnées locales

$$\boxed{U_1 = du - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i}$$

d'où
$$\boxed{dU_1 = -\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i}$$

On remarque que $dU_1 = -\ \alpha^*(\sigma)$ où $\sigma = d\bar{\omega}$ est la 2-forme symplectique canonique de $T^*(M)$.

2.0) PROPOSITION. *Pour* $\xi = (q,u,p) \in J^1(M)$ *notons* E_ξ *le noyaux de* $U_{1,\xi}$. E_ξ *est un sous-espace vectoriel de dimension* $2n$ *de* $T_\xi\,(J^1(M))$ *et la restriction de* $dU_{1,\xi}$ *à* $E_\xi \times E_\xi$ *définit sur* E_ξ *une 2-forme symplectique.*

PREUVE.

Soit $\left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$ la base de $T(J^1(M))$ associée à $(q_1,\ldots,q_n,\ u,\ p_1,\ldots,p_n)$, un vecteur tangent en $\xi = (q_1,\ldots q_n,u,p_1,\ldots p_n)$ à $J^1(M)$ s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + U \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

et l'équation de E_ξ est
$$\boxed{U - \sum_{i=1}^{n} p_i\, Q_i = 0}$$

On déduit facilement de la non dégénérescence de $\sigma = d\bar{\omega}$ que dU_1 est une 2-forme non dégénérée sur E_ξ .

2.1) PROPOSITION. *On a* $U_1 \wedge (dU_1)^n \neq 0$ *et localement*
$\frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} U_1 \wedge (dU_1)^n = du \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge \dots dp_n \wedge dq_1 \dots dq_n \neq 0$
(on a une structure pfaffienne sur $J^1(M)$ *).*

2.2) REMARQUES.

i) On considère dans $J^1(M)$ la distribution de 2n-plans définie par $\xi \to E_\xi$. Un application immédiate du théorème de FROBENIUS prouve que cette distribution est non intégrable c'est même une distribution non-intégrable de rang maximal dans la variété de dimension impaire $J^1(M)$. Dans une telle situation on dit que $J^1(M)$ est muni d'une structure de contact, la 1-forme U_1 étant la 1-forme de contact de $J^1(M)$.

ii) On peut définir U_1 sans recourir au fibré cotangent ([1]).

2.3) Variété symplectique exacte associée à $J^1(M)$. Soit $(W, \alpha, d\alpha)$ une variété de contact de type pfaffien.

Sur $\widetilde{W} = W \times \mathbb{R}$ notons z la coordonnée relative à $\mathbb{R}$ et $\pi : W \times \mathbb{R} \to W$ la projection canonique. On pose $\widetilde{\omega} = e^z \pi^*(\alpha)$. La 1-forme $\widetilde{\omega}$ définit sur $\widetilde{W}$ la 2-forme exacte $\widetilde{F} = d\widetilde{\omega} = e^z(dz \wedge \pi^*\alpha + \pi^* d\alpha)$.
Alors $\widetilde{F}^{n+1} = (n+1)\, e^{(n+1)z}\, dz \wedge \pi^*\, (\alpha \wedge (d\,\alpha)^n)$ est partout non nul sur $\widetilde{W}$, donc $(\widetilde{W}, \widetilde{F})$ est une variété symplectique exacte, on dit qu'elle est associée à $J^1(M)$.

2.4) Fibré des co-sphères de $T^*(M)/0$

Sur $T^*(M)/0$ on considère la relation d'équivalence qui consiste à identifier ξ_x et $\lambda\xi_x$ $(\lambda > 0)$, la variété quotient notée W(M) est un espace fibré sur M appelée fibré des co-sphères. Soit $\gamma : T^*(M)/_0 \to W(M)$ la surjection canonique. On peut munir W(M) d'une structure de contact. Nous donnons l'exemple de la construction pour $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2-\{0\}) = T^*(\mathbb{R}^2)/_0$. On écrit $T^*(\mathbb{R}^2)/_0 = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^{+*}$ en passant aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$, $T^*(\mathbb{R}^2)/_0 = \{(x,y,e^{i\theta}, e^{\lambda})\}$. La 1-forme de LIOUVILLE S'écrit $\omega = e^{\lambda}\left[\cos\theta \ dx + \sin\theta \ dy\right]$.

Sur $W(M) \simeq \mathbb{R}^2 \times S^1 = \{(x,y,e^{i\theta})\}$. On pose $\alpha = \cos\theta \ dx + \sin\theta \ dy$, alors $\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge d\theta \wedge dy$ et $(\alpha, d\alpha)$ définit une structure de contact sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$ dont la variété symplectique "associée" est $T^*(\mathbb{R}^2)/_0$.

2.5) On a la suite

$$\underbrace{J^1(M) \times \mathbb{R}}_{\text{symplectique}} \to \underbrace{J^1(M)}_{\text{contact}} \to \underbrace{T^*M \to T^*(M)/_0}_{\text{symplectique}} \xrightarrow{\gamma} \underbrace{W(M)}_{\text{contact}}$$

3) SOUS-VARIETES de LEGENDRE de $J^1(M)$ ([1]).

3.0) Définition. Une sous-variété $i : L \hookrightarrow J^1(M)$ est une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$ si L est une sous-variété (immergée) telle que $i^*(U_1) = 0$ et L de dimension maximale pour cette relation (donc de dimension n).

3.1) Exemple. Soit $F \in C^\infty(M)$ alors $j^1(F) : M \to J^1(M)$ est un plongement tel que $j^1(F)^*(U_1) = 0$ (évident car cette relation s'écrit en coordonnées locales $dF(q) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(q)\, dq_i = 0$). Donc, $L = j^1(F)(M)$ est une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$.

3.2) PROPOSITION. *Soit* $\theta : M \to J^1(M)$ *une section du fibré des 1-jets, alors* θ *est de la forme* $\theta = j^1(F)$ avec $F \in C^\infty(M)$ *si et seulement si* $\theta^*(U_1)=0$.

PREUVE.

La condition nécessaire provient de l'exemple (3.1), réciproquement si $\theta^*(U_1) = 0$ posons $F = \beta \circ \theta$, θ s'écrit localement sous la forme $\theta(q) = (q, f(q), p(q))$ et la relation $\theta^*(U_1) = 0$ signifie que $df(q) = \sum_{i=1}^{n} p_i(q)\, dq_i$, d'où la conclusion : $\theta = j^1(f)$.

3.3) PROPOSITION. *Soit* L *une sous-variété de LEGENDRE de* $J^1(M)$ *et* $\xi_o \in L$. *On suppose que la restriction* $\pi_1/_L : L \to M$ *de la projection canonique à* L *est de rang* n *en* $\xi_o = (q_o, u_o, p_o)$. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* q_o *dans* M, *une fonction* $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ *un voisinage ouvert* V *de* ξ_o *dans* $J^1(M)$ *tels que* $j^1(f)(U) = L \cap V$.

PREUVE.

D'après le théorème d'inversion locale il existe une section locale $\theta : U \to J^1(M)$ telle que $\theta(U) = L \cap V$ comme $\theta(U) \subset L$ on a $\theta^*(U_1) = 0$ et la conclusion résulte de la proposition 3.2 en remarquant que si U est un ouvert de M on a une injection canonique de $J^1(U)$ dans $J^1(M)$

3.4) REMARQUE. La condition $rg(\pi_{1/L}(\xi_o)) = \dim M$ est équivalente au fait que la variété L est au point ξ_o transverse à la fibre $\pi_1^{-1}(q_o)$.

Les rapports entre les notions de variété de LEGENDRE et celle de variété lagrangienne sont explicités dans la proposition suivante.

3.5) PROPOSITION.

a) *Soit* $i : L \hookrightarrow J^1(M)$ *une sous-variété de LEGENDRE. Alors pour chaque point* $x \in L$ *il existe un voisinage ouvert* $0 \subset L$, $x \in 0$ *dont* *la projection* $\alpha \circ i : O \to T^*(M)$ *est une sous-variété lagrangienne sur laquelle* $\bar{\omega}$ *est une 1-forme exacte.*

b) Pour chaque sous-variété lagrangienne connexe $i_1 : L_1 \hookrightarrow T^*(M)$ *il existe une sous-variété de LEGENDRE* $i = L \hookrightarrow J^1(M)$ *telle que l'application* $\alpha \circ i : L \to L_1$ *soit un revêtement.*

<u>*PREUVE*</u>.

a) La restriction de $\alpha_{*,\xi} : T_\xi\ (J^1(M) \longrightarrow T_{\alpha(\xi)}\ (T^*M)$ à E_ξ est une transformation symplectique de $(E_\xi\ ,\ dU_1)$ sur $(T_{\alpha\ (\xi)}\ (T^*M),\ -\sigma)$ on en déduit que $\alpha_{*\xi}\ :\ T_\xi(L) \to T_{\alpha(\xi)}(T^*M)$ est injectif ce qui donne l'existence de σ . L'exactitude de $\bar{\omega}$ provient de

$$(\pi \circ i^*)\ (\bar{\omega}) = i^*\ (du).$$

b) Soit $\ell_o \in L_1$ un point fixé alors pour chaque point $x \in L_1$ et chaque chemin $\gamma = \{x(t),\ x(0) = \ell_o\ ,\ x(1) = x\}$ on définit la fonction $S(\gamma\ ,\ x) = \int_\gamma i_1^*\ (\bar{\omega})$ qui, puisque la variété L_1 est lagrangienne (i.e. $dp/_{L_1} = 0$), ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (Théorème de STOCKES). On prend $L = \bigcup_{([\gamma],x)} \{x,\ S(\gamma,x)\},\ (x,S(\gamma,x)) \in J^1(M)\ \}$.

3.6) <u>Exemple</u>. Soit $M = \mathbb{R}$, $L_1 = \{(q,p) \in T^*(\mathbb{R})\ /\ q^2 + p^2 = 1\ \}$ alors $L = \{(\cos\theta\ ,\ \frac{1}{2}\ (\sin\theta\ \cos\theta - \theta), \sin\theta\ ), \theta \in \mathbb{R}\}$.
On remarque que la projection de L sur M possède des singularités pour $\theta = k\pi$.

4) DIFFEOMORPHISMES DE CONTACT.

4,0) Définition. Un C^∞-difféomorphisme $F : J^1(M) \to J^1(M)$ est dit de contact si $F^*(U_1) = f\, U_1$ ou f est une fonction définie sur $J^1(M)$ à valeurs réelles.

4,1) PROPOSITION. *Un difféomorphisme* $F : J^1(M) \to J^1(M)$ *est un difféomorphisme de contact si et seulement si* $F_{*x}(E_x) = E_{F(x)}$

PREUVE.

La condition est evidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Pour cela considérons le champ de vecteurs X_1 défini localement par $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$ dans chaque système de coordonnées locales de $J^1(M)$: $(q_1,..,q_n,u,p_1,...,p_n)$ où $(q_1,..,q_n)$ sont des coordonnées locales de M, on a $X_1 \lrcorner\, U_1 = 1$, $X_1 \lrcorner\, dU_1 = 0$. On pose $f = X_1 \lrcorner\, F^*(U_1)$. En remarquant que $T_x(J^1(M) = E_x \oplus \mathbb{R}X_1$

on obtient $F^*(U_1) - fU_1 = 0$.

4.2) REMARQUES.

a) Si F est un difféomorphisme de contact et L une variété de LEGENDRE alors F(L) est une variété de LEGENDRE.

b) Tout ce qui précède peut s'adapter au cas où F est un difféomorphisme local.

4.4) Exemples. Soit M un ouvert de $\mathbb{R}$ alors $J^1(M) \simeq M \times \mathbb{R}^2 = \{(q,u,p)\}$ à toute fonction f de classe C^∞, $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on associe la transformation de $J^1(M)$ définie par $F(q,u,p) = (q, f(q,u), \frac{\partial f}{\partial u}(q,u)\, p + \frac{\partial f}{\partial q}(q,u))$, on a $F^*(U_1) = \frac{\partial f}{\partial u} U_1$, la fonction F est dont une transformation de contact et c'est un difféomorphisme local si $\frac{\partial f}{\partial u}(q,u)$ est non nul.

Ce type de transformation de contact est introduit en théorie des équations différentielles quand on fait un changement de fonction inconnue. Par exemple si $\frac{\partial u}{\partial q} = \varphi(\frac{u}{q})$ est une équation homogène on pose $f(q,u) = \frac{u}{q}$.

5) EQUATIONS DU 1^{er} ORDRE.

5.0) Définition. Un système de k équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre est défini par la donnée d'une sous-variété E_k de codimension k dans $J^1(M)$. Une solution de E_k est une sous-variété de LEGENDRE contenue dans E_k.

5.1) REMARQUES.

a) Pour que E_k ait des solutions il faut nécessairement que $k \leqslant n+1$, si $k > 1$ on dit que le système est surdéterminé.

b) Soit $F : J^1(M) \to \mathbb{R}^k$ une submersion de classe C^∞ sur $F^{-1}(0)$, on peut dans ce cas prendre $E_k = F^{-1}(0)$

5.2) Comparaison avec la théorie lagrangienne.

a) Soit $F : T^*M \to \mathbb{R}$ une équation aux dérivées partielles du premier ordre définie sur le fibré cotangent. A F on associe la fonction $\bar{F} = F \circ \alpha$ où α est la projection canonique de $J^1(M)$ sur $T^*(M)$.

$$\begin{tikzcd} J^1(M) \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\bar{F}"] & \\ T^*(M) \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

On a $\bar{F}\ (q,u,p) = F\ (q,p)$ et on dit que les équations obtenues à partir de $\bar{F}$ ne "contiennent pas la fonction inconnue"

b) Si $L \subset \bar{F}^{-1}(0)$ est une solution de LEGENDRE de l'équation $\bar{F} = 0$ alors en utilisant la proposition 3.5 $L' = \alpha(L)$ est une sous-variété Lagrangienne solution de $F = 0$.

c) Prenons par exemple $M = \mathbb{R}$, alors $T^*(M) \simeq \mathbb{R}^2$, $J^1(M) \simeq \mathbb{R}^3$ on considère la fonction $F(q,p) = q^2 + p^2 - 1 = \bar{F}(q,u,p)$

i) Dans le fibré cotangent on lui associe l'équation différentielle $F(q,p) = 0$ (ou avec d'autres notations $X^2 + y'^2 = 1$). la solution (maximale) de cette équation est $S^1 = \{(\cos\theta\ ,\ \sin\theta\ ),\ \theta \in \mathbb{R}\ \}$.

ii) Dans $J^1(M)$ l'équation associée à $\bar{F}$ est $\bar{F}(q,u,p) = 0$ (équation qui ne contient pas u) et une solution de LEGENDRE de cette équation est (cf ex.3.6).

$$L = \{(\cos\theta\ ,\ \frac{1}{2}\ (\sin\theta\ \cos\theta\ -\theta),\ \sin\theta\ ),\quad \theta \in \mathbb{R}\}$$

d) Si $F : J^1(M) \to \mathbb{R}$ est une équation du 1er ordre on lui associe une équation $G : J^1(M) \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$G\ (q,u,p,z) = F\ (q,u,\frac{-p}{z}) \qquad (z \neq 0)$$

Si $v(q,u)$ est une solution de $G = 0$, les solutions de $F = 0$ s'obtiennent en résolvant implicitement l'équation $v(q,u) = 0$.

6) CHAMPS DE VECTEURS DE CONTACT.

6.0) Définition. Un champ de vecteurs X sur $J^1(M)$ est dit "de contact" s'il existe une fonction $g : J^1(M) \to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{L}_X(U_1) = g\, U_1$.

6.1) Exemple. Dans chaque carte canonique (q, u, p) de $J^1(M)$ on considère le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial u}$ ce champ peut être défini globalement sur $J^1(M)$, on le note X_1 ; on vérifie facilement que $\mathcal{L}_{X_1}(U_1) = 0$. (en remarquant que $X_1 \lrcorner U_1 = 1$ on a :

$$\mathcal{L}_{X_1}(U_1) = X_1 \lrcorner dU_1 + d(X_1 \lrcorner U_1) = X_1 \lrcorner dU_1 + d(1) = 0\ ).$$

6.2) REMARQUES.

i) La fonction g de la définition (6.0) est nécessairement de classe C^∞ car $g = g.\, X_1 \lrcorner U_1 = X_1 \lrcorner gU_1 = X_1 \lrcorner \mathcal{L}_{X_1}(U_1)$

ii) La fonction f de la définition (4.0) est de classe C^∞ pour une raison similaire.

6.3) PROPOSITION. *Un champ de vecteurs* X *sur* $J^1(M)$ *est de contact si et seulement si le flot de* X *définit un groupe* (φ_t) *de difféomorphisme de contact.*

PREUVE.

i) Si $\mathcal{L}_X(U_1) = g\, U_1$ alors par définition de la dérivée de LIE

$$\frac{d}{dt}\, \varphi_t^* U_1 \,/_{t=0} = g.U_1. \qquad \text{Or}$$

$$\frac{d}{ds}\ \varphi^*_s(U_1) = \frac{d}{dt}\ .\varphi^*_{s+t}(U_1)/_{t=0} = \varphi^*_s \left\{ \frac{d}{dt}\ \varphi^*_t(U_1)/_{t=0} \right\}$$

$$= \varphi^*_s\ [\mathcal{L}_X\ U_1] = \varphi^*_s\ [\ g\circ U_1\ ] = \varphi^*_s(g)\ \varphi^*_s\ (U_1)$$

Par suite $\varphi^*_s\ (U_1)$ vérifie l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d}{ds}\ \varphi^*_s\ (U_1) = \varphi^*_s(g).\ \varphi^*_s\ (U_1)$$

Soit $X \in \ker U_{1,x}$ en utilisant la dernière relation on obtient

$$\frac{d}{ds}\ [< U_{1\ \varphi_s(x)} / \varphi_{s*x}(X) >] = \varphi^*_s(g)(x) < U_{1,\varphi_s(x)} / \varphi_{s*x}\ (X) >$$

Posons $\mu(s) = < U_{1,\ \varphi_s(x)} / \varphi_{s*x}(X) >$ et $\lambda(s) = \varphi^*_s(g)(x)$,
la fonction μ vérifie l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\mu}{ds} = \lambda.\mu$$

avec $\mu(0) = < U_{1,x}/X\ > = 0$, d'où $\mu = 0$.

Donc pour tout $X \in \ker U_{1,x}$, $< \varphi^*_s(U_1)X\ /\ X > = 0$

ce qui prouve que φ_s est de contact d'après la proposition 4.1.

ii) Réciproquement si $\varphi^*_t\ (U_1) = \lambda(t)\ U_1$ il vient

$$\frac{d}{dt}\ \varphi^*_t(U_1)\ /_{t=0} = \lambda'(0)\ U_1 = \mathcal{L}_X\ (U_1).$$

6.4) <u>PROPOSITION</u>. ([1]) *Tout champ de vecteurs de contact sur* $J^1(M)$ *est uniquement déterminé par la fonction* $F = U_1(X)$. *A chaque fonction* $F \in C^\infty(J^1(M))$ *correspond un unique champ de vecteurs de contact* X_F *tel que*

6.4.0) $U_1(X_F) = F.$

6.4.1) $L_{X_F}(U_1) = X_1(F)\, U_1.$

6.4.2) $X_{\lambda F+\mu G} = \lambda X_F + \mu X_G$, $G \in C^\infty(J^1(M))$; $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

6.4.3) $X_F(F) = X_1(F).F.$

<u>*PREUVE.*</u>

Soit X un champ de vecteurs de contact sur $J^1(M)$ ($\mathscr{L}_X(U_1) = hU_1$) où $h \in C^\infty(J^1(M))$. On a

6.4.4) $X = FX_1 + Y$ où $F \in C^\infty(J^1(M))$ et $U_1(Y) = 0$

Or $\mathscr{L}_X(U_1) = X \lrcorner\, dU_1 + d(X \lrcorner\, U_1) = hU_1.$

En utilisant 6.5.4) on trouve

6.4.5) $Y \lrcorner\, dU_1 = hU_1 - dF$ d'où

$$X_1 \lrcorner\, (Y \lrcorner\, dU_1) = - Y \lrcorner\, (X_1 \lrcorner\, dU_1) = h - X_1(F) = 0$$

(car $X_1 \lrcorner\, dU_1 = 0$) d'où $h = X_1(F)$ $(= \frac{\partial F}{\partial u})$.

Pour conclure il suffit de remarquer que la relation (6.5.5) détermine Y de manière unique car la forme dU_1 définit un isomorphisme $Y \to Y \lrcorner\, dU_1$ entre les champs de vecteurs sur lesquels U_1 s'annule (champs horizontaux) et les 1-formes qui s'annulent sur X_1 (formes semi-basiques). Les autres relations se déduisent des propriétés de la dérivée de LIE.

6.5) Définition. La fonction $F = U_1(X)$ est l'hamiltonien du champ de vecteurs de contact X. Un tel champ sera noté X_F.

6.6) Dans un système "spécial" de coordonnées locales sur $J^1(M)$ X_F s'écrit :

$$6.6.0)\quad X_F = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}.\frac{\partial}{\partial q_i} + (F - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}).\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u}).\frac{\partial}{\partial p_i}$$

6.7) Exemple. Toute fonction $H \in C^\infty(T^* M)$ peut être considérée comme étant une fonction sur $J^1(M)$ par l'intermédiaire de la projection $\alpha : J^1(M) \to T^*(M)$. On pose $F = \alpha^*(H)$, alors $\alpha_*(X_F)$ est le champ hamiltonien sur T^*M (au sens lagrangien) défini par la fonction H comme on le voit facilement en considérant la relation 6.6.0.

6.8) PROPOSITION.

i) *Soient* f *et* g *dans* $C^\infty(J^1(M))$ *et soient* X_f *et* X_g *leurs champs de vecteurs de contact, alors* $[X_f, X_g]$ *est aussi un champ de vecteurs de contact, on note h l'hamiltonien associé* $[X_f, X_g] = X_h$

ii) *On pose* $h = [f, g]$, *on définit ainsi un crochet de LIE sur* $J^1(M)$ *appelé crochet de JACOBI.*

iii) *L'expression du crochet de JACOBI en coordonnées locales est :*

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial q_i}.\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}.\frac{\partial g}{\partial q_i}) + \sum_{i=1}^{n} p_i (\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial p_i}) + \circ\frac{\partial g}{\partial u} - g\frac{\partial f}{\partial u}.$$

7) LE PROBLEME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS DU 1er ORDRE.

On considère les équations aux dérivées partielles de la forme

$E_F = \{x \in J^1(M) \;/\; F(x) = 0\}$ où $F \in C^\infty(J^1(M))$ est une submersion sur E_F .

7.0) PROPOSITION

Soit L *une variété de Legendre contenue dans* E_F, L *est invariante par* X_F.

PREUVE.

Soit $x \in L$, il faut prouver que $X_F(x) \in T_x(L)$. Pour cela soit V le sous-espace vectoriel de $T_x\,(J^1(M))$ engendré par $T_x(L)$ et $X_F(x)$, $V = T_x\,(L) + \mathbb{R}\; X_F(x)$. Alors

i) $U_{1,x}\,(Y) = 0$ pour tout Y dans V, ce qui est évident avec la définition des variétés de LEGENDRE.

ii) $d\,U_{1,x}\,(Y_1, Y_2) = 0$ pour $Y_1, Y_2 \in V$. En effet, si $Y_1\; Y_2 \in T_x(L)$ cela est évident puisque $U_1/_L = 0$ implique $dU_1/_L = 0$. Il suffit donc de considérer $Y_1 = X_{f,x}$, $Y_2 \in T_x(L)$. Alors

$$dU_{1,x}\,(X_{F,x}, Y_2) = (\mathscr{L}_{X_F}\, U_1)(Y_2) - \mathscr{L}_{Y_2}(U_1)(X_{F,x}) \quad \text{(en prolongeant } Y_2 \text{ de telle sorte que } [X_F, Y_2]^2 = 0)$$

$$\begin{aligned} dU_{1,x}\,(X_{F,x}, Y_2) &= X_1(F)\; U_{1,x}(Y_2) - (Y_2 \lrcorner\, dU_1 + d(Y_2 \lrcorner\, U_1))\;(X_F) \\ &= X_1(F)\; U_{1,x}(Y_2) - X_F \lrcorner\, (Y_2\; dU_{1,x}) \\ &= X_1(F)\; U_{1,x}(Y_2) - dF_x(Y_2) = 0 \end{aligned}$$

puisque $X_1(F)\; U_{1,x}(Y_2) = 0$ car $Y_2 \in T_x(L) \subset \ker(U_{1x})$ et que $dF_x(Y_2) = 0$ car $Y_2 \in \ker dF(x)$.

Ainsi V est contenu dans $\ker U_{1,x}$ et c'est un sous-espace lagrangien par rapport à $dU_{1,x}$, donc $\dim V \leqslant n$, or $\dim T_x(L) = n$ donc $X_{F,x} \in T_x(L)$.

7.1) Corollaire. Les trajectoires de X_F issues d'un point x de L sont contenues dans E_F.

7.2) REMARQUE.

Le champ $Y = X_F - FX_1$ s'appelle le champ de vecteurs caractéristique de l'équation E_F c'est celui qui intervient dans la théorie classique des équations du 1^{er} ordre. On peut remplacer Y par X_F car les trajectoires de Y et X issues d'un point $x \in E_F$ sont les mêmes (les trajectoires de Y sont les bandes bicaractéristiques).

7.3) Définition. Un problème de CAUCHY est défini par la donnée d'une sous-variété $L' \xrightarrow{i} J^1(M)$ telle que :

i) $\dim L' = n - 1$, $i^*(U_1) = 0$ et $L' \subset E_F$.

ii) $X_{F,x_o} \notin T_x(L')$ pour un point $x_o \in L'$.

7.4) PROPOSITION.

Un problème de CAUCHY a une unique solution. C'est-à-dire qu'il existe une sous-variété de LEGENDRE L *contenue dans* E_F *telle que* $L \supset L' \cap U$ *où* U *est un voisinage de* x_o. *Deux telles solutions sont uniques dans un voisinage de* x_o.

PREUVE.

i) Soit U un voisinage de x_o dans $J^1(M)$ tel que $X_{F,x}$ soit transverse à $T_x(L')$ pour tout $x \in U \cap L'$ et tel que le flot φ_t de X_F soit défini sur $U \times]-\varepsilon,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

ii) Soit $i_1 : L' \cap U \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[\to J^1(M)$

$$(x, t) \longrightarrow \varphi_t(x)$$

alors $$T_{(x_o,0)} i_1(X,T) = \varphi_{o*x_o}(X) + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x_o) \Big/_{t=o} T$$

$$= \varphi_{o*x_o} X + X_f(x_o).T$$

d'où $$T_{(x_o,0)} i_1(X,T) = X + T.\, X_F(x_o) \quad (7.5.0)$$

Soit $X \in T_{x_o}(L')$ tel que $T_{(x_o,0)}(i_1)(X,T) = 0$ (c'est-à-dire $X + T\, X_F(x_o) = 0$)

En utilisant l'hypothèse de transversalité ii on obtient $X = 0$ et $T = 0$, Donc i_1 est une immersion en $(x_o, 0)$ et on peut choisir U et ε assez petit pour que i_1 soit un plongement.

iii) On pose $L = i_1\,(L' \cap U \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[\,)$, L est une sous-variété de $J^1(M)$ qui contient $L' \cap U = i_1\,(L' \cap U \times \{0\})$.

iv) Soit $x \in E_F$, on a d'après (6.5.3),

$$< dF(x) \,/\, X_F(x) > = X_1(F)\,(x).\, F(x) = 0 \quad \text{donc}$$

$X_F(x) \in T_x(E_p)$ par suite la trajectoire $t \to \varphi_t(x)$ de X_F issue de x est contenue dans E_F.

donc $F(\varphi_t(x)) = 0$ sur $L' \cap U \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[$.

v) On montre maintenant que L est une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$. On a pour $(x,t) \in L' \cap U \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$T_{(x,t)}(i_1)\;(X,T) = \varphi_{t*x}(X) + T\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x)$$

$$= \varphi_{t*x}(X) + T\, X_F(\varphi_t(x)).$$

Or $\varphi_{t*x}(X) \in \ker U_{1,\varphi_t(x)}$ car $X \in U_{1,x}$ (puisque $i_1^*(U_1) = 0$) et φ_t est un difféomorphisme de contact (cf. prop. 4.1 et 6.3). Par ailleurs d'après (6.4.0) $< U_{1,\varphi_t(x)} / X_F(\varphi_t(x))> = F(\varphi_t(x)) = 0$ (avec iv), d'où la conclusion.

vi) Soit L_1 une autre solution du problème de CAUCHY telle que $L_1 \supset L' \cap U$, la variété L_1 est invariante par X_F, en utilisant le corollaire 7.1 (et en diminuant eventuellement U et ε) on voit que $L \subset L_1$ avec $\dim L = \dim L_1$, d'où la conclusion.

8) <u>OPERATEURS NON LINEAIRES DU SECOND ORDRE DE MONGE-AMPERE</u>

8.0) <u>Définition</u>. A toute n-forme différentielle $\omega \in \overset{n}{\Lambda}(J^1(M))$ on associe un opérateur différentiel (non linéaire) Δ_ω

$\Delta_\omega : C^\infty(M) \longrightarrow \overset{n}{\Lambda}(M)$ suivant la règle $\Delta_\omega(f) = j^1(f)^*\omega$ (Δ_ω est un opérateur de MONGE-AMPERE).

8.1) <u>Exemples</u>.

8.1.0) Soit $(q_1,..,q_n, u, p_1,...,p_n)$ des coordonnées locales sur $J^1(M)$ on a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_i dq_j}\, dq_1 \wedge ...\wedge dq_n = j^1(h)^* [dq_1 \wedge..\wedge dq_{i-1} \wedge dp_j \wedge dq_{i+1} \wedge ...\wedge dq_n]$$

$$\frac{\partial h}{\partial q_i}\, dq_1 \wedge ... \wedge dq_n = j^1(h)^* [p_i\, dq_1 \wedge ...\wedge dq_n] .$$

8.1.1.) Soit $P = C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre $\leqslant 2$, et soit $\Omega_o \in \overset{n}{\Lambda}(M)$, on définit l'opérateur $\bar{\Delta} = C^\infty(M) \longrightarrow \overset{n}{\Lambda}(M)$ par $\bar{\Delta}(h) = P(h)\, \Omega_o$.

Alors il existe une forme différentielle $\omega \in \Lambda^n(J^1 M))$ telle que

$$\bar{\Delta} = \Delta_\omega .$$

Si $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est un atlas de M, on définit ω_i sur la carte vectorielle de $J^1(M)$ associée à (U_i, φ_i) à l'aide des relations (8.1.0) puis on recolle à l'aide d'une partition de l'unité sur M.

8.1.2) Soit (M,g) une variété riemanienne orientable, Ω_g l'orientation définie par g et $H \in C^\infty(T^*M)$ l'hamiltonnien de la métrique. La forme $\omega = d\, i_H(\alpha^* \Omega_g)$ où $\alpha : J^1(m) \to T^*(M)$ est la projection canonique, détermine le Laplacien Δ car

$$\Delta_\omega(h) = \Delta(h) \quad \Omega_g$$

8.2) <u>Solutions de LEGENDRE d'une équation de MONGE-AMPERE</u>.

Soit f une solution de l'équation $\Delta_\omega = 0$, alors $\Delta_\omega(f) = 0$ équivaut à $\omega_{/L} = 0$ où $L = j^1(f)(M)$, d'où une généralisation de la notion de solution pour les opérateurs de <u>MONGE-AMPERE</u>.

8.2.0) <u>Définition</u>. i) Une sous-variété de LEGENDRE $i : L \to J^1(M)$ est une solution de $\Delta_\omega = 0$ si $i^*(\omega) = 0$.

ii) Soit L une solution de LEGENDRE de $\Delta_\omega = 0$, notons $\Sigma(L)$ l'ensemble des points de L qui sont singuliers pour la projection canonique $\Gamma_1/_L : L \longrightarrow M$ (où $\Gamma_1 : J^1(M) \to M$ est la projection canonique), $\Sigma(L)$ est le "front d'onde" de L.

8.2.1) <u>Exemple</u>. Soit M un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $J^1(M) = M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

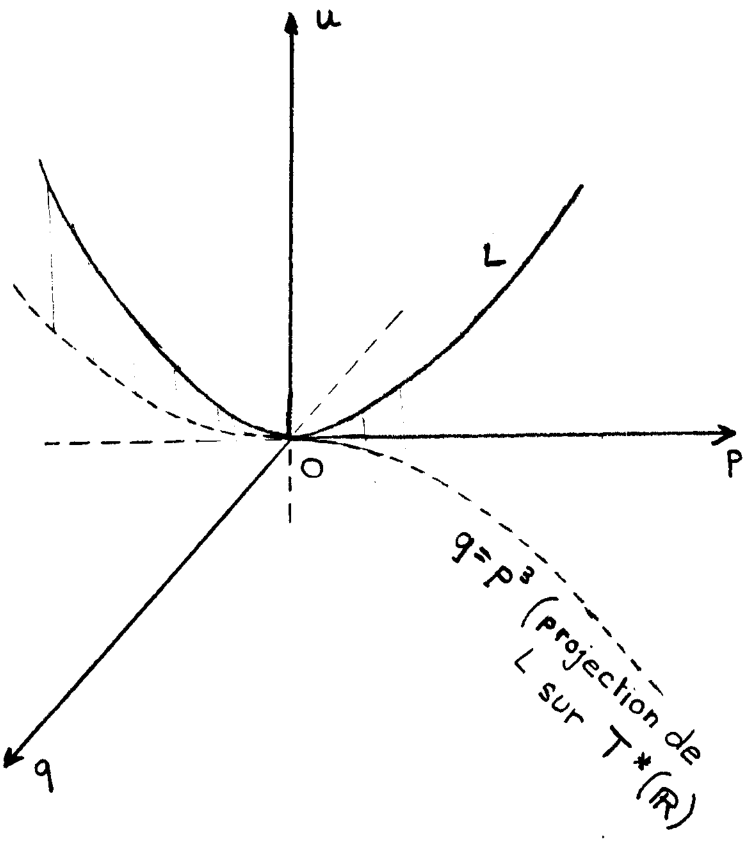
On pose $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_{i-1} \wedge dp_i \wedge dq_{i+1} \wedge \ldots \wedge dq_n$

alors $\Delta_\omega(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} \cdot dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n$ représente l'opérateur de LAPLACE habituel pour $f \in C^\infty(M)$.

Posons $L = \{x_o\} \times \{o\} \times \mathbb{R}^n \subset J^1(M)$ où $x_o \in M$, L est une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$ telle que $\Sigma(L) = L$ et $\Delta_\omega/_L = 0$. (résultat d'ailleurs vrai pour n'importe quel opérateur linéaire).

8.2.2) <u>Exemple</u>. $M = \mathbb{R}$, $J^1(M) = \mathbb{R}^3 = \{(q,u,p)\}$, on pose $\omega = 3\,p^2 dp - dq$, alors si $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $j^1(f)^*\omega = \left[3(\frac{df}{dq})^2 . (\frac{d^2 f}{dq^2}) - 1\right]$ (autrement dit l'équation $\Delta_\omega = 0$ est équivalente à l'équation différentielle $3(f')^2 . f'' - 1 = 0$).

On pose $L = \{(p^3, \frac{3}{4} p^4, p) \;/\; p \in \mathbb{R}\}$ c'est une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$ solution $\Delta_\omega = 0$ et telle que $\Sigma(L) = \{(0, 0, 0)\}$



(En se plaçant sur $T^*(M)$ on peut faire une théorie Lagrangienne des opérateurs de MONGE-AMPERE ne contenant pas la variable u).

8.3) <u>Transformation des équations par difféomorphismes de contact</u>

Soit $\omega \in \overset{n}{\Lambda} J^1(M)$ et $\varphi : J^1(M) \to J^1(M)$ une transformation de contact, on se propose de comparer Δ_ω et $\Delta_{\varphi^*\omega}$.

8.3.0) <u>PROPOSITION.</u> L *est une solution de LEGENDRE de l'équation* $\Delta_{\varphi^*\omega} = 0$ *si et seulement si* $\varphi(L)$ *est une solution de LEGENDRE de* $\Delta_\omega = 0$.

8.3.1) Bien remarquer que le front d'onde $\Sigma(L)$ d'une variété de LEGENDRE L n'est pas (en général) conservé par les transformations de contact et donc que partant d'une solution de LEGENDRE L de $\Delta_{\varphi^*\omega} = 0$ telle que $\Sigma(L) = \emptyset$ (solution régulière), on peut obtenir une solution $\varphi(L)$ de $\Delta_\omega = 0$ telle que $\Sigma(\varphi(L)) \neq \emptyset$ (solution singulière) et réciproquement.

8.3.2) <u>Equation de MONGE-AMPERE classique.</u>
On prend $M = \mathbb{R}^2$ donc $J^1(M) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, les équations de MONGE-AMPERE classiques sont de la forme

$$(A) \quad a.\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} + 2b.\frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} + c\frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} + g\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} . \frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2}\right) + h = 0$$

où a, b, c, g, $h \in C^\infty(J^1(M)$. (dans la relation A ces fonctions contiennent F et les dérivées partielles premières de f.)

Nous nous interessons au cas $a = b = c = 0$, $g = 1$, $h = -1$, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} . \frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} - 1 = 0$$

Elle est associée à la 2-forme

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 - dq_1 \wedge dq_2 \in \overset{2}{\Lambda} (J^1(\mathbb{R}^2))$$

On considère l'application $\alpha : J^1(M) \to J^1(M)$ définie par $\alpha\,(q_1, q_2, u_1, p_1, p_2) = (p_1, q_2, u - p_1\, q_1, -q_1, q_2)$, on a $\alpha^*(U_1) = U_1$, α est donc un difféomorphisme de contact.

Par ailleurs on a $\alpha^*\omega = - dq_1 \wedge dp_2 - dp_1 \wedge dq_2$, alors (cf. ex. 8.2.1)

$$j^1(f)^*(\alpha^*\omega) = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}\right) dq_1 \wedge dq_2$$

et l'équation associée à $\alpha^*\omega$ n'est autre que l'équation de LAPLACE.

d'où :

PROPOSITION. *IL existe une correspondance bijective entre les solutions (de LEGENDRE) de l'équation de MONGE-AMPERE et celles de l'équation de LAPLACE.*

On remarque que dans ce cas on a transformé un opérateur non linéaire en un opérateur linéaire.

PROPOSITION. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une solution non singulière de l'équation de MONGE-AMPERE et soit* $L = j^1(F)(\mathbb{R}^2)$ *on a* $\Sigma(L) = \emptyset$. *Alors* $\alpha^{-1}(L)$ *est une solution de l'équation de LAPLACE telle que* $\Sigma\alpha^{-1}(L) = \emptyset$. *Si* h *est la fonction harmonique telle que* $j^1(h)(\mathbb{R}^2) = \alpha^{-1}(L)$, *alors* $\frac{\partial^2 h}{\partial q_1{}^2}$ *et* $\frac{\partial^2 h}{\partial q_2{}^2}$ *sont partout non nuls.*

Corollaire. Soit h une fonction harmonique telle que $\frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2}$ ou $\frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2}$ possède des 0, alors $\alpha(J^1(h)(\mathbb{R}^2))$ est une solution singulière de l'équation de MONGE-AMPERE.

Remarque. On peut démontrer (th. de JÖRGENS) que les fonctions solutions de l'équation de MONGE-AMPERE définies dans $\mathbb{R}^2$ tout entier sont des polynômes du second degré.

8.4) Formes différentielles sur $J^1(M)$.

On rappelle que sur $J^1(M)$ on a une 1-forme $U_1 = du - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i$ telle que $(J^1(M), U_1)$ soit une variété de contact. Alors si $E_x = \ker U_{1,x}$, $(E_x, dU_{1,x})$ est un espace symplectique. On note X_1 le champ de REEB de la structure de contact, on a $X_1 \lrcorner U_1 = 1$ et $X_1 \lrcorner dU_1 = 0$, localement $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$. L'espace tangent $T_x(J^1(M))$ s'écrit

$$T_x(J^1(M)) = E_x \oplus \mathbb{R}\, X_{1,x}.$$

8.4.0) Définition. Une forme différentielle $\omega \in \overset{s}{\Lambda}(J^1(M))$ est dite semi-basique si $X_1 \lrcorner\, \omega = 0$.

8.4.1) PROPOSITION. *Une forme différentielle* $\omega \in \overset{s}{\Lambda}(J^1(M))$ *s'écrit de manière unique* $\omega = \omega_o + U_1 \wedge \omega_1$ *où* ω_o *et* ω_1 *sont semi-basiques.*

PREUVE. On pose $\omega_1 = X_1 \lrcorner\, \omega$ et $\omega_o = \omega - U_1 \wedge \omega_1$.

8.4.1) On note $\overset{s}{\Lambda}(E^*)$ l'espace des s-formes différentielles semi-basiques, $\overset{s}{\Lambda}_x(E^*)$ s'identifie naturellement à $\overset{s}{\Lambda}(E_x^*)$.

8.4.2) Définition. Un champ de vecteurs X sur $J^1(M)$ est horizontal si $\omega(X) = 0$, autrement dit pour tout $x \in J^1(M)$, $X_x \in E_x$. (La composante suivant X_1 est nulle). (Par exemple le champ caractéristique d'une équation du premier ordre est horizontal).

8.4.2) Soit $\mu_x = E_x \longrightarrow E_x{}^*$ l'isomorphisme linéaire défini par $\mu_x(X) = - X \lrcorner dU_{1,x}$, à μ_x on associe $\tilde{\mu}_x$, $\tilde{\mu}_x : E_x \longrightarrow T_x(J^1(M))^*$

tel que $\tilde{\mu}_x\,(X) = \begin{cases} \mu_x(X) \text{ sur } E_x \\ 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}\, X_1 \end{cases}$.

On en déduit une application $\tilde{\mu}$ définie sur l'espace des champs horizontaux à valeur dans l'espace des formes semi-basiques définie par $\tilde{\mu}(X)_x = \tilde{\mu}_x(X_x)$, de plus $\tilde{\mu}$ est un isomorphisme linéaire. On étend $\tilde{\mu}$ aux puissances extérieures.

8.4.3) On note C^* l'idéal engendré par U_1 et dU_1 dans $\Lambda^* J^1(M)$. On a $C^* = \bigoplus_{s=0}^{2n} C^s$ et C^s est l'ensemble des s-formes ω de la forme $\omega = U_1 \wedge \omega_1 + dU_1 \wedge \omega_2$ (Rq.$C^\circ = 0$).

8.4.4) <u>PROPOSITION</u>. *Toute forme* $\omega \in C^s$ *possède une décomposition* $\omega = U_1 \wedge \omega_1 + dU_1 \wedge \omega_2$ *où* ω_1 *est une (s-1)-forme semi basique uniquement déterminée et où* ω_2 *est une (s-2)-forme semi-basique et est uniquement déterminée si* $s < n+2$. *(cf.* [2] *)*

8.4.5) <u>THEOREME</u> (HODGE) C^s est l'ensemble des s-formes différentielles ω telles que $\omega/_L = 0$ pour toute sous-variété de LEGENDRE $L \subset J^1(M)$

8.4.6) <u>Corollaire</u>. Pour $s \geqslant n+1$ $C^s = \Lambda^s(J^1(M))$.

8.5) Définition.

une n-forme différentielle semi-basique ω est effective si $dU_1 \wedge \omega = 0$, on note Λ^n_ε l'espace des s-formes effectives.

8.6) PROPOSITION. $\Lambda^n(J^1(M)) = \Lambda^n_\varepsilon \oplus C^n$.

8.7) Application

Soient ω et ω' deux n-formes sur $J^1(M)$ telles que $\Delta_\omega = \Delta_{\omega'}$, alors pour toute sous-variété de LEGENDRE L de $J^1(M)$ on a $(\omega - \omega')_{/L} = 0$.
Donc d'après le théorème de HODGE $\omega - \omega' = U_1 \wedge \alpha + dU_1 \wedge \beta \in \dfrac{\Lambda^n(J^1(M))}{\Lambda^n_\varepsilon} \simeq C^n$
On en déduit que l'opérateur Δ_ω est uniquement déterminé par la partie effective de ω et qu'il existe une unique forme effective ω_o telle que $\Delta_\omega = \Delta_{\omega_o}$.

A partir de maintenant on suppose que Δ_ω est défini par une forme effective.

9) SYMETRIES DES EQUATIONS DE MONGE AMPERE

9.0) Définition. Soient α un difféomorphisme de contact et $\omega \in \Lambda^n(J^1(M))$.

i) α est une symétrie de l'opérateur Δ_ω si $\Delta_{\alpha^*\omega} = \Delta_\omega$ et l'ensemble de ces symétries constitue un groupe noté sym (Δ_ω).

ii) α est une symétrie de l'équation $\Delta_\omega = 0$ si $\Delta_{\alpha^*\omega} = h\,\Delta_\omega$ où $h \in C^\infty(J^1(M))$ et l'ensemble de ces symétries constitue un groupe noté symc (Δ_ω).

9.1) <u>Rappel</u> Soit G un groupe de LIE de difféomorphismes d'une variété X, tout élément g appartenant à l'algèbre de LIE g de G on associe un champ de vecteurs $\tilde{X}_g$ sur X par la relation $\tilde{X}_g(x) = \frac{d}{dt}(\exp t\, g).x_{/t=o}$.

Le groupe à un paramètre associé à X_g est $\varphi_t(x) = (\exp t.g).x$, d'où

9.2) <u>PROPOSITION</u> *soit* G *un groupe de LIE de difféomorphismes de contact sur* $J^1(M)$. *Alors* $\tilde{X}_g$ *est un champ de vecteurs de contact.*

9.3) <u>PROPOSITION</u> *soit* G *un groupe de LIE de symétries de l'opérateur* Δ_ω *, alors pour tout* $g \in G$ *on a*

$$\mathscr{L}_{\tilde{X}_g}(\omega) \in C^n \qquad \textit{autrement dit} \quad \Delta_{\mathscr{L}_{\tilde{X}_g}(\omega)} = 0 \qquad (\text{cf. } 8.7)$$

<u>PREUVE</u>

Notons $\varphi_t(x) = (\exp t.g).x$ le groupe à un paramètre associé à $\tilde{X}_g$ par hypothèse $x \longrightarrow \varphi_t(x)$ est une symétrie de l'opérateur Δ_ω donc $\varphi_t^*\omega - \omega \in C^s$. Soit L une sous-variété de LEGENDRE de $J^1(M)$ et Y un vecteur tangent à L . On a $Y \lrcorner \left(\frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t}\right) = 0$ pour tout t et à la limite $Y \lrcorner (\mathscr{L}_{\tilde{X}_g}\omega) = 0$, on en déduit (th. 8.4.5.) que

$$\mathscr{L}_{\tilde{X}_g}(\omega) \in C^n \quad \text{d'où } \Delta_{\mathscr{L}_{\tilde{X}_g}(\omega)} = 0$$

9.4) <u>Définition</u> D'après la proposition 6.5 il existe un isomorphisme entre $C^\infty(J^1(M))$ et l'algèbre de LIE des champs de vecteurs de contact, notons L_f la dérivée de LIE associée au champ de vecteurs de contact **définie par** l'hamiltonien f. La proposition précédente nous conduit à la définition suivante :

- Une fonction $f \in C^{\infty}(J^1(M))$ est une symétrie (infinitésimale) de l'opérateur Δ_{ω} si $\Delta_{L_f(\omega)} = 0$, on note sym (Δ_{ω}) l'algèbre des symétries infinitésimale de l'opérateur .

$$\mathrm{Sym}\,(\Delta_{\omega}) = \{\ f \in C^{\infty}(J^1(M))\ / L_f(\omega) \in C^n\ \}\ .$$

9.5 PROPOSITION *Soit* G *un groupe LIE de symétries de l'équation* Δ_{ω} *, alors pour tout* $g \in G$ *il existe une fonction* $k \in C^{\infty}(J^1(M))$ *telle que* $\mathcal{L}_{\tilde{X}_g}(\omega) - k\omega \in C^n$ *, autrement dit* $\Delta_{\mathcal{L}_{\tilde{X}_g}(\omega)} = k \circ \Delta_{\omega}$.

PREUVE

Soit $\varphi_t(x) = \exp(tg)x$ le groupe à un paramètre associé à $\tilde{X}_g$ par hypothèse il existe une fonction $h_t \in C^{\infty}(J^1(M))$ telle que $\varphi_t^{*}\omega - h_t\omega \in C^s$, en particulier $(1-h_o)\omega \in C^s$ et puisque ω est effective la proposition 8.6 implique que $h_o = 1$, par ailleurs on voit facilement que h_t est de classe C^{∞} par rapport à t, d'où $\dfrac{\varphi_t^{*}\,\omega - \omega}{t} + \dfrac{(1-h_t)\,\omega}{t} \in C^s$

alors $\mathcal{L}_{\tilde{X}_g}(\omega) + (\frac{d}{dt} h_{t/_{t=o}})\omega \in C^s$, d'où la conclusion

9.6) Définition Une fonction $f \in C^{\infty}(J^1(M))$ définit une symétrie (infinitésimale) de l'équation $\Delta_{\omega} = 0$ s'il existe une fonction $k \in C^{\infty}(J^1(M))$ telle que $\Delta_{L_f(\omega)} = k\ \ \Delta_{\omega}$. On pose

$$\mathrm{symc}\,(\Delta_{\omega}) = \{\ f \in C^{\infty}(J^1(M)),\ \exists k \in C^{\infty}(J^1(M)),\ L_f\omega - k\omega \in C^n\}\ .$$

Donc, dans la recherche des symétries des équations de MONGE-AMPERE on est naturellement conduit à la recherche des symétries infinitésimales dont l'ensemble constitue une algèbre de LIE. Le calcul des symétries infinitésimales apparaît plus facile que celui des symétries. Ce calcul est en fait plus général car les groupes de transformation associées à ces symétries sont souvent des groupes locaux de transformation. Par ailleurs, l'algèbre (de LIE) des symétries d'une équation peut être de dimension infinie et donc le groupe des symétries d'une équation peut ne pas être un groupe de LIE.

9.7) Exemple 1 : $M = R$, $J^1(M) = \mathbb{R}^3 = \{(q,u,p) \in \mathbb{R}^3\}$.
On considère $\omega = dp$, $\Delta_\omega(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial q2} . dq$.

Soit $F : J^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(q,u,p) = x + up$, elle a pour champ de contact associé

$$H_F(q,u,p) = - u \frac{\partial}{\partial q} + q \frac{\partial}{\partial u} + (1+p^2) \frac{\partial}{\partial p}$$

Par ailleurs : $\mathcal{L}_{H_F}(\omega) = H_F \lrcorner\, d\omega + d(H_F \lrcorner\, \omega)$

$$= d(1+p^2) = 2p.dp = 2p.\omega \quad \text{d'où}$$

$$\Delta_{\mathcal{L}_{H_F}}(\omega) = 2p.\ \Delta_\omega$$

donc $F \in \text{symc}\ (\Delta_\omega)$.

Le groupe à un paramètre de transformations de contact associé est noté $\varphi_t(q,u,p)$ avec

$$\varphi_t(q,u,p) = (q\ \text{cost} - u\ \text{sint},\ q\ \text{sint} + u\text{cost},\ \frac{\text{sint} + p\ \text{cost}}{\text{cost} - p\ \text{sint}})$$

On remarque que ce groupe est un groupe de transformations locales et que c'est l'extension à $J^1(M) = \mathbb{R}^3$ de l'action de $O(2)$ sur $M \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

9.8) Exemple 2 : L'équation de la chaleur.

On prend $M = \mathbb{R}^2$ donc $J^1(M) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(q_1, q_2, u, p_1, p_2)\}$.

Soit $\omega = p_1 \, dq_1 \wedge dq_2 - dq_1 \wedge dp_2$ alors,

$$\Delta_\omega(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} \right) dq_1 \wedge dq_2$$

Dans ce cas (cf. [5]) l'algèbre symc (Δ_ω) est engendrée par $\{p_1, p_2, u, 2\, q_1 p_1 - p_2 q_2, 2\, q_1 p_2 - q_2 u, 4\, q_1 \,(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \frac{u}{2}) + u q_2^2,$

$B(q_1, q_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}$.

Et grâce à $B(q_1,q_2)$ l'algèbre de LIE symc (Δ_ω) est de dimension infinie.

REFERENCES

[1] V.V. LYCHAGIN Contact geometry and non linear second order differential equations. Russian Math Surveys 34 : 1 (1979), 149-180.

[2] V.V. LYCHAGIN The local classification of non linear differential equations in first order partial derivatives. Russian Math Surveys 30.1 (1975), 105-175.

[3] P.T. OLVER Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations. Journal of differential geometry 14(1979), 497-542.

[4] A.M VINOGRADOV Many-valued solutions and classification principle of non linear differential equations. Soviet Math Dokl. 14 (1973), 661-665.

[5] D.H. SATTINGER Les symétries des équations et leurs applications dans la mécanique et la physique. Publications mathématiques d'Orsay.