

D. SONDAZ

3 Classification des plongements isotropes d'après A. Weinstein

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983__3B_A3_0

© Université de Lyon, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES PLONGEMENTS ISOTROPES
D'APRES A. WEINSTEIN

par D. SONDAZ

I. LE THEOREME DE DARBOUX-WEINSTEIN

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS. - On considère les paires (M, N) où M est une variété de classe \mathcal{C}^∞ et N une sous-variété propre de M . Dans l'ensemble de ces paires on définit une relation d'équivalence en disant que $(M_1, N_1) \sim (M_2, N_2)$ si et seulement si $N_1 = N_2 = N$ et s'il existe une paire (M, N) où M est une sous-variété ouverte de M_1 et de M_2 . On notera $[M, N]$ la classe de (M, N) .

Une application f d'une paire (M, N) dans une paire (P, Q) est une application $f : M \rightarrow P$ telle que $f(N) \subset Q$. Deux applications $f_i : (M_i, N) \rightarrow (P_i, Q)$, $i = 1, 2$, sont dites équivalentes si et seulement s'il existe une sous-variété ouverte M de M_1 et M_2 contenant N , une sous-variété ouverte P de P_1 et P_2 contenant Q et une application $f : (M, N) \rightarrow (P, Q)$ telle que $f_1|_M = f_2|_M = f$. On notera $[f]$ la classe de f .

Une p -forme différentielle sur $[M, N]$ est une classe d'équivalence de p -formes différentielles sur M pour la relation d'égalité au voisinage de N . Soit $\mathcal{F}^p(M, N)$ l'ensemble de ces p -formes. Pour $\omega \in \mathcal{F}^p(M, N)$ on désignera par $\omega|_N$ la forme $\omega|_N : N \rightarrow \bigwedge^p T_N^* M$ (on pose $T_N^* M = j^{-1}(T^*M)$ si $j : N \rightarrow M$ est l'injection canonique) et par ω_N la forme $j^*\omega$.

La paire $[TM, TN]$ joue le rôle de fibré tangent à la paire $[M, N]$ et un champ de vecteurs sur $[M, N]$ est une classe d'équivalence de champs de vecteurs $\xi : (M, N) \rightarrow (TM, TN)$ (donc tels que $\xi(x) \in T_x N$, $\forall x \in N$).

Une famille $\mathcal{Y} = \{\xi_t\}_{t \in [0, 1]}$ de champs de vecteurs sur $[M, N]$ dépendant du temps sera dite intégrable s'il existe une famille à un paramètre $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ de difféomorphismes de $[M, N]$ telle que

$$f_0 = \text{id}_N \quad \text{et} \quad \frac{df_t}{dt} = \xi_t \circ f_t \quad .$$

2. THEOREME DE DARBOUX-WEINSTEIN. -

a) Soient P une variété, N une sous-variété propre de P , Ω_0 et Ω_1 deux formes symplectiques sur P dont les restrictions à $T_N P$ sont égales. Alors il existe des voisinages ouverts U et V de N dans P et un difféomorphisme $f : (U, \Omega_0) \rightarrow (V, \Omega_1)$ tels que $f^* \Omega_1 = \Omega_0$ et $f|_N = \text{id}_N$.

b) Soient P une variété, N une sous-variété propre de P . Si Ω est une forme différentielle sur $T_N P$ dont la restriction à TN est fermée, Ω se prolonge en une forme fermée sur un voisinage de N dans P . Si Ω est symplectique, son prolongement l'est aussi.

PREUVE. - Elle repose sur deux lemmes.

LEMME. - Si $\mathcal{Y} = \{\xi_t\}_{t \in [0,1]}$ est une famille de champs de vecteurs sur $[M, N]$ dépendant du temps, \mathcal{Y} est intégrable si et seulement si $\mathcal{Y}|_N = \{\xi_t|_N\}_{t \in [0,1]}$ est intégrable.

PREUVE DU LEMME. - Voir [5].

COROLLAIRE. - Si $\mathcal{Y}|_N = 0$, \mathcal{Y} est intégrable.

LEMME DE POINCARÉ-WEINSTEIN. - Si $\omega \in \mathcal{F}^p(M, N)$, si $\omega_N = 0$ et $d\omega = 0$, alors il existe $\omega' \in \mathcal{F}^{p-1}(M, N)$ telle que $\omega = d\omega'$.

PREUVE DU LEMME. - N étant une sous-variété propre de M , N admet un voisinage tubulaire ([4] p. 58), c'est-à-dire : il existe un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow N$, un voisinage ouvert Z de $\zeta(N)$ (ζ désignant la section nulle de π), un ouvert U de M contenant N et un difféomorphisme f de Z sur U tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E \supset Z & & \\
 \uparrow \zeta & \searrow f & \\
 N \subset & \xrightarrow{j} & U \subset M
 \end{array}$$

soit commutatif. Comme $[Z, N] = [M, N]$, nous pourrions supposer que M est fibré vectoriel sur N et nous désignerons par $\pi : M \rightarrow N$ la projection canonique.

Cela nous autorise à envisager, pour $t \in [0, 1]$, la multiplication par t , $\mu_t : (M, N) \rightarrow (M, N)$. En particulier $\mu_1 = \text{id}_M$ et, $\forall x \in N$, $\mu_0(x) = 0x$, donc $\mu_0|_N$ s'identifie à j (si l'on identifie N et $\zeta(N)$).

Soit $X_t = \left(\frac{d\mu_s}{ds}\right)_{s=t}$ le champ de vecteurs tangent à la courbe de M , $t \rightarrow \mu_t(x)$.

Si $\omega \in \mathcal{F}^p(M, N)$, on a $\frac{d(\mu_s^* \omega)}{ds} \Big|_{s=t} = \mu_t^* (i_{X_t} d\omega) + d(\mu_t^* (i_{X_t} \omega))$

Intégrons entre 0 et 1 :

$$\omega - \mu_0^* \omega = \int_0^1 [\mu_t^* (i_{X_t} d\omega) + d(\mu_t^* (i_{X_t} \omega))] dt .$$

Posons $I(\omega) = \int_0^1 \mu_t^* (i_{X_t} \omega) dt$.

Il vient $\omega - \mu_0^* \omega = I(d\omega) + d(I\omega)$.

Si $\omega|_N = 0$, on a $\mu_0^* \omega = 0$ et si $d\omega = 0$, $I(d\omega) = 0$, donc

$$\omega = d(I\omega) \quad \text{c.q.f.d.}$$

PREUVE DU THEOREME. - Soient Ω_0 et Ω_1 deux formes symplectiques sur P telles que Ω_0 et Ω_1 coïncident sur $T_N P$.

Soient $\omega = \Omega_0 - \Omega_1$ et $\Omega_t = \Omega_0 + t\omega$, $t \in [0, 1]$.

On désignera par $\tilde{\Omega}_t$ l'application $TP \rightarrow T^*P$ définie par

$$\tilde{\Omega}_t(p)(X) = (i_X \Omega_t)(p) \quad , \quad \forall p \in P, \forall X \in T_p P.$$

Comme $d\omega = 0$, on a $d\Omega_t = 0$ et, comme $\Omega_0|_N = \Omega_1|_N$, on a $\omega|_N = 0$.

Donc $\Omega_t|_N = \Omega_0|_N$ et $\tilde{\Omega}_t|_N = \tilde{\Omega}_0|_N$. Par conséquent $\tilde{\Omega}_t|_N$ est un isomorphisme

et Ω_t est une forme symplectique au voisinage de N .

Comme $d\omega = 0$ et $\omega_N = 0$, il résulte du lemme de Poincaré-Weinstein qu'il existe une 1-forme ϕ telle que $\omega = d\phi$.

Soit alors $\{Y_t\}_t \in [0,1]$ le champ de vecteurs dépendant du temps défini par

$$Y_t(p) = - (\Omega_t(p))^{-1}(\phi(p)).$$

Comme $\phi|_N = 0$, on a $Y_t|_N = 0$, donc d'après le corollaire du premier lemme, $\{Y_t\}$ est intégrable en une famille à un paramètre de difféomorphismes $\{f_t\}_t \in [0,1]$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (f_s^* \Omega_s) \Big|_{s=t} &= f_t^* \left[\mathcal{L}_{Y_t} \Omega_t + \left(\frac{d\Omega}{ds} \right)_{s=t} \right] \\ &= f_t^* \left[d(i_{Y_t} \Omega_t) + i_{Y_t} d\Omega_t + \omega \right] \\ &= f_t^* \left[d(\tilde{\Omega}_t(Y_t)) + \omega \right] = f_t^* [d(-\phi) + \omega] = 0. \end{aligned}$$

Donc si $f = f_1 : f^* \Omega_1 = f_1^* \Omega_1 = f_0^* \Omega_0 = \Omega_0$.

Comme $Y_t|_N = 0$, on a $f_t|_N = \text{id}_N$ et $f|_N = \text{id}_N$, ce qui achève de prouver la partie a) du théorème.

Quant à la partie b), un théorème (par exemple [6] p. 85) affirme que Ω , application différentiable de N dans $\bigwedge^2 T_N^*P$, donc dans $\bigwedge^2 T^*P$, se prolonge en une application différentiable de P dans $\bigwedge^2 T^*P$. Si Ω est fermée, son prolongement l'est aussi (comme on le voit par passage au voisinage tubulaire). Si Ω est symplectique, $\tilde{\Omega}$ est un isomorphisme de $T_N P$ sur T_N^*P ; comme les isomorphismes d'un espace vectoriel dans un autre forment un ouvert de l'espace des applications linéaires, $\tilde{\Omega}$ sera un isomorphisme sur un voisinage de N .

COROLLAIRE. - Comme conséquence du théorème précédent on retrouve le théorème de Darboux classique : si (P, Ω) est une variété symplectique, si $p \in P$, il existe une carte (U, ϕ) de P en p telle que si

$(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ sont les coordonnées associées à cette carte

$$\text{on a } \Omega|_U = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i .$$

PREUVE. - On prend une base symplectique de T^*P , $\{e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$:

$$\Omega(p) = e_1 \wedge \varepsilon_1 + \dots + e_n \wedge \varepsilon_n .$$

En composant une carte quelconque en p avec un élément convenable de $GL(2n, \mathbb{R})$, on peut considérer une carte en p telle que $(dx_i)_p = e_i$,

$(d\xi_i)_p = \varepsilon_i$. On pose $\Omega_1 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$. On a $\Omega(p) = \Omega_1(p)$, donc il

existe des voisinages ouverts U et V de p et difféomorphisme f de U sur V tels que $f^*\Omega_1 = \Omega$ et $f(p) = p$.

II. CLASSIFICATION DES PLONGEMENTS ISOTROPES

1. FIBRE NORMAL SYMPLECTIQUE D'UN PLONGEMENT ISOTROPE. - Soient M une variété et (P, Ω) une variété symplectique. Un plongement isotrope de M dans P est un plongement $e : M \rightarrow P$ tel que $e^*\Omega = 0$.

On définit le fibré normal symplectique $SN(e)$ d'un plongement isotrope $e : M \rightarrow P$ comme étant le fibré vectoriel de base M dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est $(T_x e(T_x M))^\Omega / T_x e(T_x M)$. On le notera de façon simplifiée TM^Ω / TM .

La 2-forme Ω passe au quotient en posant $\dot{\Omega}(\dot{X}, \dot{Y}) = \Omega(X, Y)$ puisque $\Omega(X, Y)$ ne dépend pas de \dot{X} et \dot{Y} choisis dans \dot{X} et \dot{Y} . Alors $(SN(e), \dot{\Omega})$ est un fibré symplectique.

Remarquons que $e^{-1}(TP)/TM^\Omega$ est isomorphe à T^*M (à \dot{Y} on associe $X \rightarrow \Omega(X, Y)$). De la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow TM^\Omega / TM \rightarrow e^{-1}(TP)/TM \rightarrow e^{-1}(TP)/TM^\Omega \rightarrow 0$$

on déduit la suivante, où νM désigne le fibré normal usuel à M :

$$0 \rightarrow SN(e) \rightarrow \nu M \rightarrow T^*M \rightarrow 0$$

Par conséquent

$$\nu M \simeq T^*M \oplus SN(e)$$

et
$$e^{-1}(TP) \simeq TM \oplus T^*M \oplus SN(e) .$$

2. EQUIVALENCE DE PLONGEMENTS ISOTROPES. - Une équivalence entre deux plongements isotropes $e_i : M_i \rightarrow (P_i, \Omega_i), i = 1, 2$, est la donnée :

d'un difféomorphisme $g : M_1 \rightarrow M_2$;

de voisinages ouverts U_i de $e_i(M_i)$ dans $P_i, i = 1, 2$;

d'un symplectomorphisme $f : U_1 \rightarrow U_2$ tel que $f \circ e_1 = e_2 \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} P_1 \supset U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \subset P_2 \\ \uparrow e_1 & & \uparrow e_2 \\ M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 \end{array}$$

Toute équivalence de plongements isotropes f entre e_1 et e_2 induit un isomorphisme de $SN(e_1)$ sur $SN(e_2)$ que l'on notera $SN(f)$ (on peut identifier M_1 et M_2 au moyen de g et $(T_x e_1 (T_x M))^\Omega_1$ est isomorphe à $(T_{f(x)} e_2 (T_x f(T_x M)))^\Omega_2$ puisque f est un symplectomorphisme).

Les plongements isotropes et les équivalences de plongements isotropes forment une catégorie \mathcal{E} . Les fibrés symplectiques et les isomorphismes de fibrés au-dessus d'un difféomorphisme forment une catégorie \mathcal{F} . Nous venons d'obtenir un foncteur SN de \mathcal{E} dans \mathcal{F} .

3. THEOREME . - (Weinstein). - Si ϕ est un isomorphisme de fibrés de $SN(e_1)$ sur $SN(e_2)$ au-dessus d'un difféomorphisme g de M_1 sur M_2 , il existe une équivalence de plongements isotropes f entre e_1 et e_2 telle que $SN(f) = \phi$.

PREUVE. - On peut d'abord identifier M_1 et M_2 au moyen de g et l'on notera M cette variété. On a vu que le fibré normal usuel $\nu_i M = e_i^{-1}(TP_i)/TM$, $i = 1, 2$, était isomorphe à $T^*M \oplus SN(e_i)$. Nous noterons H le fibré $SN(e_1) \simeq SN(e_2)$. L'existence d'un voisinage tubulaire de $e_i(M)$ nous donne l'existence d'un voisinage ouvert U_i de $e_i(M)$ dans P_i , identifiable à un ouvert de $\nu_i M \simeq T^*M \oplus H$ contenant la section nulle identifiée à M . Les formes symplectiques $\Omega_1|_{U_1}$ et $\Omega_2|_{U_2}$ apparaissent alors comme deux formes symplectiques définies respectivement sur U_1 et U_2 et dont les restrictions à M coïncident. Du théorème de Darboux-Weinstein résulte alors l'existence d'un symplectomorphisme f de $(U_1, \Omega_1|_{U_1})$ sur $(U_2, \Omega_2|_{U_2})$ dont la restriction à M est l'identité et qui répond à la question.

4. THEOREME (Weinstein). - Si $E \rightarrow M$ est un fibré symplectique, il existe un plongement isotrope $e : M \rightarrow P$ tel que $SN(e)$ soit isomorphe à E .

La preuve de ce résultat va occuper toute la suite de l'exposé.

i) Rappels de définitions. - Si un groupe de Lie G agit sur une variété symplectique (V, σ) , si pour tout $g \in G$, Φ_g désigne le difféomorphisme de V , $x \rightarrow gx$, on dit que l'action de G sur V est symplectique si

$$\Phi_g^* \sigma = \sigma, \quad \forall g \in G$$

Supposons que l'action de G sur V soit symplectique. Soit \underline{G} l'algèbre de Lie de G . A tout $X \in \underline{G}$ on associe le champ de vecteurs (champ de Killing) $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(V)$ défini par

$$\tilde{X}(x) = \left. \frac{d}{dt} \exp(-tX).x \right|_{t=0}$$

Un moment du groupe G est une application $J : V \rightarrow \underline{G}^*$ telle que si l'on pose, pour tout $X \in \underline{G}$, $\langle J, X \rangle(x) = J(x).X$, $\forall x \in V$, on ait

$$d\langle J, X \rangle = -i_{\tilde{X}} \sigma$$

ou, ce qui revient au même, $\sigma(\tilde{X}, Y) = -TJ(Y).X$, $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\infty}(V)$.

Un tel moment sera dit équivariant si $J(gx) = J(x) \circ \text{ad}_{-1}^g$

(i.e. $J(gx) = \text{ad}_g^*(J(x))$), $\forall g \in G, \forall x \in V$.

ii) LEMME. - Si un groupe de Lie G agit à droite sur une variété V , alors G agit à droite sur T^*V . De plus cette action préserve la 1-forme de Liouville λ_V de T^*V , donc est une action symplectique sur T^*V muni de la forme symplectique canonique.

PREUVE. - Posons, pour $x \in V$ et $g \in G$, $\varphi_g(x) = xg$. Maintenant si $\alpha \in T_x^*V$, posons

$$\alpha g = \varphi_{g^{-1}, xg}^*(\alpha) \quad (\varphi_{g^{-1}, xg}^* = {}^t_{T_{xg}} \varphi_{g^{-1}})$$

On vérifie que l'on définit ainsi une action à droite de G sur T^*V et que, si $\pi : T^*V \rightarrow V$ est la projection canonique, on a $\pi(\alpha g) = xg = \pi(\alpha)g$, i.e. cette action est équivariante.

Posons $\Phi_g(\alpha) = \alpha g$ et montrons que $\Phi_g^* \lambda_V = \lambda_V$.

$$\begin{aligned} \Phi_g^* \lambda_V(\alpha) &= \lambda_V(\Phi_g(\alpha)) \circ T_{\alpha} \Phi_g = \Phi_g(\alpha) \circ T_{\Phi_g(\alpha)} \pi \circ T_{\alpha} \Phi_g \\ &= \Phi_g(\alpha) \circ T_{\alpha} (\pi \circ \Phi_g) = \Phi_g(\alpha) \circ T_{\alpha} (\varphi_g \circ \pi) = \varphi_{g^{-1}, \pi(\alpha)g}^*(\alpha) \circ T_{\alpha} (\varphi_g \circ \pi) \\ &= \alpha \circ T_{\pi(\alpha)g} \varphi_{g^{-1}} \circ T_{\alpha} (\varphi_g \circ \pi) = \alpha \circ T_{\alpha} \pi = \lambda_V(\alpha) \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

iii) Donnons-nous un fibré symplectique $E \rightarrow M$ de rang $2n$.

On définit le groupe $\text{Sp}(n)$ par

$$\text{Sp}(n) = \{A \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) ; {}^t_A J A = J\}$$

Son algèbre de Lie est $\text{sp}(n) = \{H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) ; JH + {}^t_H J = 0\}$.

Rappelons que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$Sp(n)$ agit à gauche sur \mathbb{R}^{2n} en conservant la forme symplectique canonique Ω_0 .

Définissons $\mu_0 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow sp(n)^*$ par

$$\mu_0(x).X = \frac{1}{2} {}^t(Xx)Jx, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, X \in sp(n)$$

Il est facile de voir que μ_0 est un moment, que $\mu_0^{-1}(0) = \{0\}$ et que $\mu_0(gx) = \mu_0(x) \circ \text{ad}_g^{-1}$.

Au fibré vectoriel symplectique $E \rightarrow M$, on associe son $Sp(n)$ -fibré principal $B \rightarrow M$.

De l'action à droite de $Sp(n)$ sur B ($g \in Sp(n)$, $b \in B : bg = b \circ g$), on déduit, grâce au lemme précédent, une action à droite équivariante de $Sp(n)$ sur T^*B . Toujours d'après le lemme, cette action est symplectique lorsqu'on munit T^*B de la forme symplectique canonique $\Omega_B = d\lambda_B$.

Si $X \in sp(n)$, désignons par $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(T^*B)$ le champ de Killing associé sur T^*B . Posons alors pour $X \in sp(n)$ et $\beta \in T^*B$

$$\mu_B(\beta).X = i_{\tilde{X}} \lambda_B(\beta) \quad .$$

Si $\langle \mu_B, X \rangle$ désigne la fonction $\beta \rightarrow \mu_B(\beta).X$, on a

$$d\langle \mu_B, X \rangle = d i_{\tilde{X}} \lambda_B = -i_{\tilde{X}} d\lambda_B \quad (\text{parce que } \lambda_B \text{ étant } Sp(n)\text{-invariante, } \mathcal{L}_{\tilde{X}} \lambda_B = 0).$$

μ_B est donc un moment. On peut encore écrire ce moment d'une autre façon.

Comme $B \rightarrow M$ est un $Sp(n)$ -fibré principal, un résultat classique affirme que $sp(n)$ est isomorphe au sous-espace vertical V_b de $T_b B$ en tout point $b \in B$. Si $X \in sp(n)$, on désigne par $X_B \in \mathfrak{X}^\infty(B)$ le champ de Killing

associé sur B ; alors $X_B(b) \in V_b$ et l'application $X \rightarrow X_B(b)$, que nous noterons v_b , est un homomorphisme injectif de $\mathfrak{sp}(n)$ dans $T_b B$ et un isomorphisme de $\mathfrak{sp}(n)$ sur V_b . Un calcul facile, utilisant les formules donnant explicitement \tilde{X}, X_B et λ_B montre que

$$\mu_B(\beta) = {}^t v_b(\beta) = \beta \circ v_b, \quad \forall \beta \in T^*B, \text{ si } b = \pi(\beta).$$

Un autre calcul facile montre que

$$\mu_B(\beta g) = \mu_B(\beta) \circ \text{ad}_g.$$

iv) $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ munie de la forme symplectique $\text{pr}_1^* \Omega_B - \text{pr}_2^* \Omega_0$, notée abusivement $\Omega_B - \Omega_0$, est une variété symplectique sur laquelle $\text{Sp}(n)$ agit à droite par $(\beta, y)g = (\beta g, g^{-1}y)$ en conservant la forme symplectique, $\mu_B \circ \text{pr}_1 - \mu_0 \circ \text{pr}_2$, notée abusivement $\mu_B - \mu_0$ est un moment pour cette action.

$(T^*B \times \mathbb{R}^{2n})/\text{Sp}(n)$ est le fibré de fibre type \mathbb{R}^{2n} associé au fibré $T^*B \rightarrow M$.

Posons $\Sigma = \{(\beta, y) \in T^*B \times \mathbb{R}^{2n} ; \mu_B(\beta) = \mu_0(y)\}$.

Si $b \in B$, $(\beta, y) \rightarrow \mu_B(\beta) = {}^t v_b(\beta)$ est une submersion de $T_b^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathfrak{sp}(n)$; c'est a fortiori une submersion de $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathfrak{sp}(n)$, donc aussi $(\beta, y) \rightarrow \mu_B(\beta) - \mu_0(y)$. Par conséquent Σ est une sous-variété de $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$. L'équivariance des moments μ_B et μ_0 fait que Σ est invariante par $\text{Sp}(n)$.

On peut donc munir $P = \Sigma/\text{Sp}(n)$ d'une structure de variété. La 2-forme $\Omega = \Omega_B - \Omega_0$, étant $\text{Sp}(n)$ -invariante, passe au quotient et munit P d'une forme symplectique $\tilde{\Omega}$.

v) P est une variété fibrée sur M de fibre \mathbb{R}^{2n} . Nous voudrions en faire une variété fibrée sur T^*M : cela sera possible quand nous saurons définir une projection $T^*B \rightarrow T^*M$ constante sur les $\text{Sp}(n)$ -orbites (nous la composerons avec la projection naturelle $T^*B \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T^*B$).

Soit $\Pi : B \rightarrow M$ la projection canonique ; soit $b \in B$ au-dessus de $x \in M$; on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{sp}(n) \xrightarrow{v_b} T_b B \xrightarrow{T_b \Pi} T_x M \longrightarrow 0 \quad (1)$$

et par dualité

$$0 \longleftarrow \text{sp}(n)^* \xleftarrow{t_{v_b}} T_b^* B \xleftarrow{\Pi_b^*} T_x^* M \longleftarrow 0 \quad (2)$$

Si maintenant on se donne une connexion sur $\Pi : B \rightarrow M$, on a, si H_b est le sous-espace horizontal de $T_b B$, $T_b B = V_b \oplus H_b$, ce qui nous donne une scission de la suite exacte (1) et, par conséquent, de la suite exacte (2) :

$$0 \longleftarrow \text{sp}(n)^* \longleftarrow V_b^* \oplus H_b^* \longleftarrow T_x^* M \longleftarrow 0 \quad (3)$$

On peut ainsi définir une application linéaire $T_b^* B \rightarrow T_x^* M$ d'où l'on déduit une application de T^*B dans T^*M .

On a finalement fait de $(P, \tilde{\Omega})$ une variété symplectique fibrée sur T^*M et de fibre \mathbb{R}^{2n} .

vi) Maintenant on remarque que $\Sigma \supset \mu_B^{-1}(0) \times \mu_0^{-1}(0) = \mu_B^{-1}(0) \times \{0\}$. Ce dernier sous-ensemble est une sous-variété de Σ puisque nous avons remarqué que μ_B est une submersion.

$\mu_B^{-1}(0)$ est l'ensemble des vecteurs cotangents à B s'annulant sur les vecteurs verticaux ($\mu_B(\beta) = 0 \iff \beta \circ v_b = 0$ d'où le résultat puisque v_b est un isomorphisme de $\text{sp}(n)$ sur V_b). La fibre $\mu_B^{-1}(0)_b$ est donc isomorphe à H_b^* lui-même isomorphe à $T_x^* M$

$\mu_B^{-1}(0)$ s'identifie donc au fibré $\Pi^{-1} T^*M$

$$\begin{array}{ccc} T^*B \supset \mu_B^{-1}(0) & & T^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\Pi} & M \end{array}$$

$\Pi^{-1} T^*M$ s'injecte dans T^*B par l'application qui à $\alpha \in (\Pi^{-1} T^*M)_b$ associe $\alpha \circ T_b \Pi \in T_b^* B$.

De plus on a

$$\lambda_B \Big|_{\Pi^{-1}T^*M} = p^* \lambda_M$$

si $p : \Pi^{-1}T^*M \rightarrow T^*M$ est l'homomorphisme de $\Pi^{-1}T^*M \rightarrow B$ dans $T^*M \rightarrow M$ au-dessus de Π (si $(b, \alpha) \in (\Pi^{-1}T^*M)_b$, $\alpha \in T^*_{\Pi(b)}M$, $p(b, \alpha) = \alpha$)

$$\begin{array}{ccc} T^*B \supset \Pi^{-1}T^*M & \xrightarrow{p} & T^*M \\ \downarrow \varpi & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\Pi} & M \end{array}$$

En effet soit $\varpi : \Pi^{-1}T^*M \rightarrow B$ la projection canonique et soit $X \in T^*_{\tilde{\alpha}}\Pi^{-1}T^*M$, $\tilde{\alpha} = (b, \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Par définition } \lambda_B(\tilde{\alpha})(X) &= \tilde{\alpha} \circ T^*_{\tilde{\alpha}}\varpi(X) = \alpha \circ T^*_b \pi \circ T^*_{\tilde{\alpha}}\varpi(X) \\ &= \alpha \circ T^*_{\tilde{\alpha}}(\pi \circ \varpi)(X) = \alpha \circ T^*_{\tilde{\alpha}}(\pi \circ p)(X) = \alpha \circ T^*_{\tilde{\alpha}}\pi \circ T^*_{\tilde{\alpha}}p(X) \\ &= \lambda_M(\alpha)(T^*_{\tilde{\alpha}}p(X)) = \lambda_M(p(\tilde{\alpha}))(T^*_{\tilde{\alpha}}p(X)) = (p^*\lambda_M)(\tilde{\alpha})(X). \end{aligned}$$

vii) Soit 0_B l'image de B par la section nulle de $T^*B \rightarrow B$. On a la suite de plongements :

$$0_B \times \{0\} \hookrightarrow \Pi^{-1}T^*M \times \{0\} \simeq \mu_B^{-1}(0) \times \{0\} \hookrightarrow \Sigma$$

Par passage au quotient elle donne la suite de plongements

$$M \hookrightarrow T^*M \simeq \Pi^{-1}T^*M/Sp(n) \hookrightarrow \Sigma/Sp(n) = P$$

Le premier de ces plongements est la section nulle 0_M ; il est lagrangien.

Le second est symplectique ($\Omega_B \Big|_{\Pi^{-1}T^*M} = p^*\Omega_M$)

Le composé des deux, $e : M \rightarrow P$ est isotrope.

Déterminons son fibré normal. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} T(0_B \times \{0\})^{\Omega} &= T0_B^{\Omega} \times T\{0\}^{\Omega} = T0_B^{\Omega} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{2n} \\ &= T0_B \times \{0\} \times \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{la section nulle est un plongement lagrangien}). \end{aligned}$$

