D. SONDAZ

3 Classification des plongements isotropes d’après A. Weinstein

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___3B_A3_0>

CLASSIFICATION DES PLONGEMENTS ISOTROPES D'APRES A. WEINSTEIN

par D. SONDAZ

I. LE THEOREME DE DARBOUX-WEINSTEIN

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS. - On considère les paires (M,N) où M est une variété de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ et N une sous-variété propre de N. Dans l'ensemble de ces paires on définit une relation d'équivalence en disant que $(M_1,N_1) \sim (M_2,N_2)$ si et seulement si $N_1 = N_2 = N$ et s'il existe une paire (M,N) où M est une sous-variété ouverte de M_1 et de M_2. On notera [M,N] la classe de (M,N).

Une application f d'une paire (M,N) dans une paire (P,Q) est une application $f : M \to P$ telle que $f(N) \subset Q$. Deux applications $f_i : (M_i,N) \to (P_i,Q)$, $i = 1,2$, sont dites équivalentes si et seulement s'il existe une sous-vériété ouverte M de M_1 et M_2 contenant N, une sous-variété ouverte P de P_1 et P_2 contenant Q et une application $f : (M,N) \to (P,Q)$ telle que $f_1|_M = f_2|_M = f$. On notera [f] la classe de f.

Une p-forme différentielle sur [M,N] est une classe d'équivalence de p-formes différentielles sur M pour la relation d'égalité au voisinage de N. Soit $\mathscr{F}^p(M,N)$ l'ensemble de ces p-formes. Pour $\omega \in \mathscr{F}^p(M,N)$ on désignera par $\omega|_N$ la forme $\omega|_N : N \to \overset{p}{\wedge} T^*_N M$ (on pose $T^*_N M = j^{-1}(T^*M)$ si $j : N \to M$ est l'injection canonique) et par ω_N la forme $j^*\omega$.

La paire [TM,TN] joue le rôle de fibré tangent à la paire [M,N] et un champ de vecteurs sur [M,N] est une classe d'équivalence de champs de vecteurs $\xi : (M,N) \to (TM,TN)$ (donc tels que $\xi(x) \in T_xN$, $\forall x \in N$).

Une famille $\mathscr{Y} = \{\xi_t\}_{t \in [o,1]}$ de champs de vecteurs sur [M,N] dépendant du temps sera dite intégrable s'il existe une famille à un paramètre $\{f_t\}_{t \in [o,1]}$ de difféomorphismes de [M,N] telle que

$$f_\circ = id_N \quad \text{et} \quad \frac{df_t}{dt} = \xi_t \circ f_t .$$

2. THEOREME DE DARBOUX-WEINSTEIN. -

a) Soient P *une variété,* N *une sous-variété propre de* P, Ω_o *et* Ω_1 *deux formes symplectiques sur* P *dont les restrictions à* $T_N P$ *sont égales. Alors il existe des voisinages ouverts* U *et* V *de* N *dans* P *et un difféomorphisme* $f : (U,\Omega_o) \to (V,\Omega_1)$ *tels que* $f^*\Omega_1 = \Omega_o$ *et* $f|_N = id_N$.

b) Soient P *une variété,* N *une sous-variété propre de* P. *Si* Ω *est une forme différentielle sur* $T_N P$ *dont la restriction à* TN *est fermée,* Ω *se prolonge en une forme fermée sur un voisinage de* N *dans* P . *Si* Ω *est symplectique, son prolongement l'est aussi.*

PREUVE. - Elle repose sur deux lemmes.

LEMME. - *Si* $\mathcal{Y} = \{\xi_t\}_{t \in [o,1]}$ *est une famille de champs de vecteurs sur* [M,N] *dépendant du temps,* $\mathcal{Y}$ *est intégrable si et seulement si* $\mathcal{Y}|_N = \{\xi_t|_N\}_{t \in [o,1]}$ *est intégrable.*

PREUVE DU LEMME. - Voir [5].

COROLLAIRE. - *Si* $\mathcal{Y}|_N = 0$, $\mathcal{Y}$ *est intégrable.*

LEMME DE POINCARE-WEINSTEIN. - *Si* $\omega \in \mathcal{F}^p(M,N)$, *si* $\omega_N = 0$ *et* $d\omega = 0$, *alors il existe* $\omega' \in \mathcal{F}^{p-1}(M,N)$ *telle que* $\omega = d\omega'$.

PREUVE DU LEMME. - N étant une sous-variété propre de M, N admet un voisinage tubulaire ([4] p. 58), c'est-à-dire : il existe un fibré vectoriel $\pi : E \to N$, un voisinage ouvert Z de $\zeta(N)$ (ζ désignant la section nulle de π), un ouvert U de M contenant N et un difféomorphisme f de Z sur U tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \supset Z \arrow[dr, "f"] & \\ N \arrow[u, "\zeta"] \arrow[r, hook, "j"'] & U \subset M \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme $[Z,N] = [M,N]$, nous pourrons supposer que M est fibré vectoriel sur N et nous désignerons par $\pi : M \to N$ la projection canonique.

Cela nous autorise à envisager, pour $t \in [o,1]$, la multiplication par t, $\mu_t : (M,N) \to (M,N)$. En particulier $\mu_1 = id_M$ et, $\forall x \in N$, $\mu_o(x) = 0x$, donc $\mu_o|_N$ s'identifie à j (si l'on identifie N et ζ (N)).

Soit $X_t = (\frac{d\mu_s}{ds})_{s=t}$ le champ de vecteurs tangent à la courbe de M, $t \to \mu_t(x)$.

Si $\omega \in \mathscr{F}^p(M,N)$, on a $\frac{d(\mu_s^* \omega)}{ds}\Big|_{s=t} = \mu_t^* \, (i_{X_t} d\omega) + d(\mu_t^*(i_{X_t} \omega))$

Intégrons entre 0 et 1 :

$$\omega - \mu_o^* \omega = \int_o^1 [\mu_t^*(i_{X_t} d\omega) + d(\mu_t^*(i_{X_t} \omega))] dt \ .$$

Posons $I(\omega) = \int_o^1 \mu_t^*(i_{X_t} \omega) dt$.

Il vient $\omega - \mu_o^* \omega = I(d\omega) + d(I\omega)$.

Si $\omega_N = 0$, on a $\mu_o^* \omega = 0$ et si $d\omega = 0$, $I(d\omega) = 0$, donc

$$\omega = d(I\omega) \quad \text{c.q.f.d.}$$

<u>PREUVE DU THEOREME</u>. - Soient Ω_o et Ω_1 deux formes symplectiques sur P telles que Ω_o et Ω_1 coïncident sur $T_N P$.

Soient $\omega = \Omega_o - \Omega_1$ et $\Omega_t = \Omega_o + t\omega$, $t \in [o,1]$.

On désignera par $\tilde{\Omega}_t$ l'application $TP \to T^*P$ définie par

$$\tilde{\Omega}_t(p)(X) = (i_X \Omega_t)(p) \quad , \forall p \in P, \forall X \in T_p P.$$

Comme $d\omega = 0$, on a $d\Omega_t = 0$ et, comme $\Omega_o|_N = \Omega_1|_N$, on a $\omega|_N = 0$.

Donc $\Omega_t|_N = \Omega_o|_N$ et $\tilde{\Omega}_t|_N = \tilde{\Omega}_o|_N$. Par conséquent $\tilde{\Omega}_t|_N$ est un isomorphisme

et Ω_t est une forme symplectique au voisinage de N.

Comme $d\omega = 0$ et $\omega_N = 0$, il résulte du lemme de Poincaré-Weinstein qu'il existe une 1-forme ϕ telle que $\omega = d\phi$.

Soit alors $\{Y_t\}_{t \in [o,1]}$ le champ de vecteurs dépendant du temps défini par

$$Y_t(p) = -(\Omega_t(p))^{-1}(\phi(p)).$$

Comme $\Phi|_N = 0$, on a $Y_t|_N = 0$, donc d'après le corollaire du premier lemme, $\{Y_t\}$ est intégrable en une famille à un paramètre de difféomorphismes $\{f_t\}_{t \in [o,1]}$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(f_s^* \Omega_s)|_{s=t} &= f_t^* [\mathscr{L}_{Y_t} \Omega_t + (\frac{d\Omega_s}{ds})_{s=t}] \\ &= f_t^* [d(i_{Y_t} \Omega_t) + i_{Y_t} d\Omega_t + \omega] \\ &= f_t^* [d(\tilde{\Omega}_t(Y_t)) + \omega] = f^*[d(-\Phi) + \omega] = 0. \end{aligned}$$

Donc si $f = f_1$: $f^*\Omega_1 = f_1^*\Omega_1 = f_o^*\Omega_o = \Omega_o$.

Comme $Y_t|_N = 0$, on a $f_t|_N = id_N$ et $f|_N = id_N$, ce qui achève de prouver la partie a) du théorème.

Quant à la partie b), un théorème (par exemple [6] p. 85) affirme que Ω, application différentiable de N dans $\overset{2}{\wedge} T_N^*P$, donc dans $\overset{2}{\wedge} T^*P$, se prolonge en une application différentiable de P dans $\overset{2}{\wedge} T^*P$. Si Ω est fermée, son prolongement l'est aussi (comme on le voit par passage au voisinage tubulaire). Si Ω est symplectique, $\tilde{\Omega}$ est un isomorphisme de T_NP sur T_N^*P ; comme les isomorphismes d'un espace vectoriel dans un autre forment un ouvert de l'espace des applications linéaires, $\tilde{\Omega}$ sera un isomorphisme sur un voisinage de N.

<u>COROLLAIRE</u>. - *Comme conséquence du théorème précédent on retrouve le théorème de Darboux classique : si* (P,Ω) *est une variété symplectique, si* $p \in P$, *il existe une carte* (U,ϕ) *de* P *en* p *telle que si*

$(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ *sont les coordonnées associées à cette carte on a* $\Omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$.

PREUVE. - On prend une base symplectique de T^*_pP , $\{e_1,\dots,e_n,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$: $\Omega(p) = e_1 \wedge \varepsilon_1 + \dots + e_n \wedge \varepsilon_n$.

En composant une carte quelconque en p avec un élément convenable de $GL(2n,\mathbb{R})$, on peut considérer une carte en p telle que $(dx_i)_p = e_i$, $(d\xi_i)_p = \varepsilon_i$. On pose $\Omega_1 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$. On a $\Omega(p) = \Omega_1(p)$, donc il existe des voisinages ouverts U et V de p et difféomorphisme f de U sur V tels que $f^*\Omega_1 = \Omega$ et $f(p) = p$.

II. CLASSIFICATION DES PLONGEMENTS ISOTROPES

1. FIBRE NORMAL SYMPLECTIQUE D'UN PLONGEMENT ISOTROPE. - Soient M une variété et (P,Ω) une variété symplectique. Un plongement isotrope de M dans P est un plongement $e : M \to P$ tel que $e^*\Omega = 0$.

On définit le fibré normal symplectique SN(e) d'un plongement isotrope $e : M \to P$ comme étant le fibré vectoriel de base M dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est $(T_x e(T_x M))^{\Omega}/T_x\, e(T_x M)$. On le notera de façon simplifiée TM^{Ω}/TM.

La 2-forme Ω passe au quotient en posant $\dot\Omega(\dot X,\dot Y) = \Omega(X,Y)$ puisque $\Omega(X,Y)$ ne dépend pas de X et Y choisis dans $\dot X$ et $\dot Y$. Alors $(SN(e),\dot\Omega)$ est un fibré symplectique.

Remarquons que $e^{-1}(TP)/TM^{\Omega}$ est isomorphe à T^*M (à $\dot Y$ on associe $X \to \Omega(X,Y)$). De la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to TM^{\Omega}/TM \to e^{-1}(TP)/TM \to e^{-1}(TP)/TM^{\Omega} \to 0$$

on déduit la suivante, où νM désigne le fibré normal usuel à M :

$$0 \to SN(e) \to \nu M \to T^*M \to 0$$

Par conséquent $\qquad \nu M \simeq T^*M \oplus SN(e)$

et $\qquad e^{-1}(TP) \simeq TM \oplus T^*M \oplus SN(e)$.

2. <u>EQUIVALENCE DE PLONGEMENTS ISOTROPES</u>. - Une équivalence entre deux plongements isotropes $e_i : M_i \to (P_i,\Omega_i), i = 1,2$, est la donnée :

d'un difféomorphisme $g : M_1 \to M_2$;
de voisinages ouverts U_i de $e_i(M_i)$ dans P_i, $i = 1,2$;
d'un symplectomorphisme $f : U_1 \to U_2$ tel que $f \circ e_1 = e_2 \circ g$.

$$\begin{tikzcd} P_1 \supset U_1 \arrow[r, "f"] & U_2 \subset P_2 \\ M_1 \arrow[u, "e_1"] \arrow[r, "g"'] & M_2 \arrow[u, "e_2"'] \end{tikzcd}$$

Toute équivalence de plongements isotropes f entre e_1 et e_2 induit un isomorphisme de $SN(e_1)$ sur $SN(e_2)$ que l'on notera $SN(f)$ (on peut identifier M_1 et M_2 au moyen de g et $(T_x e_1 (T_xM))^{\Omega_1}$ est isomorphe à $(T_{f(x)} e_2(T_xf(T_xM)))^{\Omega_2}$ puisque f est un symplectomorphisme).

Les plongements isotropes et les équivalences de plongements isotropes forment une catégorie $\mathcal{E}$. Les fibrés symplectiques et les isomorphismes de fibrés au-dessus d'un difféomorphisme forment une catégorie $\mathcal{S}$. Nous venons d'obtenir un foncteur SN de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{S}$.

3. <u>THEOREME</u> . - (Weinstein). - *Si Φ est un isomorphisme de fibrés de* $SN(e_1)$ *sur* $SN(e_2)$ *au-dessus d'un difféomorphisme* g *de* M_1 *sur* M_2, *il existe une équivalence de plongements isotropes* f *entre* e_1 *et* e_2 *telle que* $SN(f) = \Phi$.

PREUVE. - On peut d'abord identifier M_1 et M_2 au moyen de g et l'on notera M cette variété. On a vu que le fibré normal usuel $\nu_i M = e_i^{-1}(TP_i)/TM$, i = 1,2, était isomorphe à $T^*M \oplus SN(e_i)$. Nous noterons H le fibré $SN(e_1) \simeq SN(e_2)$. L'existence d'un voisinage tubulaire de $e_i(M)$ nous donne l'existence d'un voisinage ouvert U_i de $e_i(M)$ dans P_i, identifiable à un ouvert de $\nu_i M \simeq T^*M \oplus H$ contenant la section nulle identifiée à M. Les formes symplectiques $\Omega_{1|U_1}$ et $\Omega_{2|U_2}$ apparaissent alors comme deux formes symplectiques définies respectivement sur U_1 et U_2 et dont les restrictions à M coïncident. Du théorème de Darboux-Weinstein résulte alors l'existence d'un symplectomorphisme f de $(U_1,\Omega_{1|U_1})$ sur $(U_2,\Omega_{2|U_2})$ dont la restriction à M est l'identité et qui répond à la question.

4. THEOREME (Weinstein). - *Si* $E \to M$ *est un fibré symplectique, il existe un plongement isotrope* $e : M \to P$ *tel que* SN(e) *soit isomorphe à* E.

La preuve de ce résultat va occuper toute la suite de l'exposé.

i) Rappels de définitions. - Si un groupe de Lie G agit sur une variété symplectique (V,σ), si pour tout $g \in G$, φ_g désigne le difféomorphisme de V, $x \to gx$, on dit que l'action de G sur V est symplectique si

$\varphi_g^*\sigma = \sigma, \quad \forall g \in G$

Supposons que l'action de G sur V soit symplectique. Soit $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de G. A tout $X \in \underline{G}$ on associe le champ de vecteurs (champ de Killing) $\tilde{X} \in \mathcal{X}^\infty(V)$ défini par

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \exp(-tX).x_{|t=0}$$

Un moment du groupe G est une application $J : V \to \underline{G}^*$ telle que si l'on pose, pour tout $X \in \underline{G}$, $\langle J,X\rangle(x) = J(x).X$, $\forall x \in V$, on ait

$$d\langle J,X\rangle = -i_{\tilde{X}}\sigma$$

ou, ce qui revient au même, $\sigma(\tilde{X},Y) = -TJ(Y).X$, $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\infty}(V)$.
Un tel moment sera dit équivariant si $J(gx) = J(x) \circ ad_{g^{-1}}$
(i.e. $J(gx) = ad_g^*(J(x))$) , $\forall g \in G$, $\forall x \in V$.

ii) <u>LEMME</u>. - *Si un groupe de Lie* G *agit à droite sur une variété* V, *alors* G *agit à droite sur* T*V . *De plus cette action préserve la 1-forme de Liouville* λ_V *de* T*V , *donc est une action symplectique sur* T*V *muni de la forme symplectique canonique.*

<u>PREUVE</u>. - Posons, pour $x \in V$ et $g \in G$, $\varphi_g(x) = xg$. Maintenant si $\alpha \in T_x^*V$, posons

$$\alpha g = \varphi^*_{g^{-1},xg}(\alpha) \qquad (\varphi^*_{g^{-1},xg} = {}^tT_{xg}\,\varphi_{g^{-1}})$$

On vérifie que l'on définit ainsi une action à droite de G sur T*V et que, si $\pi : T^*V \to V$ est la projection canonique, on a $\pi(\alpha g) = xg = \pi(\alpha)g$, i.e. cette action est équivariante.

Posons $\Phi_g(\alpha) = \alpha g$ et montrons que $\Phi_g^*\lambda_V = \lambda_V$.

$$\Phi_g^*\lambda_V(\alpha) = \lambda_V(\Phi_g(\alpha)) \circ T_\alpha\Phi_g = \Phi_g(\alpha) \circ T_{\Phi_g(\alpha)}\pi \circ T_\alpha\Phi_g$$

$$= \Phi_g(\alpha) \circ T_\alpha(\pi \circ \Phi_g) = \Phi_g(\alpha) \circ T_\alpha(\varphi_g \circ \pi) = \varphi^*_{g^{-1},\pi(\alpha)g}(\alpha) \circ T_\alpha(\varphi_g \circ \pi)$$

$$= \alpha \circ T_{\pi(\alpha)g}\varphi_{g^{-1}} \circ T_\alpha(\varphi_g \circ \pi) = \alpha \circ T_\alpha\pi = \lambda_V(\alpha) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

iii) Donnons-nous un fibré symplectique $E \to M$ de rang 2n.

On définit le groupe Sp(n) par

$$Sp(n) = \{A \in GL(2n,R) \ ; \ {}^tAJA = J\}$$

Son algèbre de Lie est $sp(n) = \{ H \in \mathscr{M}_{2n}(R) \ ; \ JH + {}^tHJ = 0 \}$.

Rappelons que

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$$

$Sp(n)$ agit à gauche sur $\mathbb{R}^{2n}$ en conservant la forme symplectique canonique Ω_o.

Définissons $\mu_o : \mathbb{R}^{2n} \to sp(n)^*$ par

$$\mu_o(x).X = \frac{1}{2}\, {}^t(Xx)Jx \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{2n} \, , \, X \in sp(n)$$

Il est facile de voir que μ_o est un moment, que $\mu_o^{-1}(0) = \{0\}$ et que $\mu_o(gx) = \mu_o(x) \circ ad_{g^{-1}}$.

Au fibré vectoriel symplectique $E \to M$, on associe son $Sp(n)$-fibré principal $B \to M$.

De l'action à droite de $Sp(n)$ sur B ($g \in Sp(n)$, $b \in B$: $bg = b \circ g$), on déduit, grâce au lemme précédent, une action à droite équivariante de $Sp(n)$ sur T^*B . Toujours d'après le lemme, cette action est symplectique lorsqu'on munit T^*B de la forme symplectique canonique $\Omega_B = d\lambda_B$.

Si $X \in sp(n)$, désignons par $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(T^*B)$ le champ de Killing associé sur T^*B. Posons alors pour $X \in sp(n)$ et $\beta \in T^*B$

$$\mu_B(\beta).X = i_{\widetilde{X}}\lambda_B(\beta) \quad .$$

Si $<\mu_B,X>$ désigne la fonction $\beta \to \mu_B(\beta).X$, on a

$d<\mu_B,X> = d\, i_{\widetilde{X}}\, \lambda_B = -i_{\widetilde{X}}\, d\lambda_B$ (parce que λ_B étant $Sp(n)$-invariante, $\mathscr{L}_{\widetilde{X}}\lambda_B=0$).

μ_B est donc un moment. On peut encore écrire ce moment d'une autre façon.

Comme $B \to M$ est un $Sp(n)$-fibré principal, un résultat classique affirme que $sp(n)$ est isomorphe au sous-espace vertical V_b de T_bB en tout point $b \in B$. Si $X \in sp(n)$, on désigne par $X_B \in \mathfrak{X}^\infty(B)$ le champ de Killing associé sur B ; alors $X_B(b) \in V_b$ et l'application $X \to X_B(b)$, que nous noterons v_b , est un homomorphisme injectif de sp(n) dans T_bB et un isomorphisme de sp(n) sur V_b. Un calcul facile, utilisant les formules donnant explicitement $\tilde{X}, X_B$ et λ_B montre que

$$\mu_B(\beta) = {}^t v_b(\beta) = \beta \circ v_b \ , \ \forall \beta \in T^*B, \text{ si } b = \pi(\beta).$$

Un autre calcul facile montre que

$$\mu_B(\beta g) = \mu_B(\beta) \circ ad_g \quad .$$

iv) $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ munie de la forme symplectique $pr_1^*\Omega_B - pr_2^*\Omega_o$, notée abusivement $\Omega_B - \Omega_o$, est une variété symplectique sur laquelle Sp(n) agit à droite par $(\beta,y)g = (\beta g, g^{-1}y)$ en conservant la forme symplectique, $\mu_B \circ pr_1 - \mu_o \circ pr_2$, notée abusivement $\mu_B - \mu_o$ est un moment pour cette action.

$(T^*B \times \mathbb{R}^{2n})/Sp(n)$ est le fibré de fibre type $\mathbb{R}^{2n}$ associé au fibré $T^*B \to M$.

Posons $\Sigma = \{(\beta,y) \in T^*B \times \mathbb{R}^{2n} \ ; \ \mu_B(\beta) = \mu_o(y)\}$.

Si $b \in B$, $(\beta,y) \to \mu_B(\beta) = {}^t v_b(\beta)$ est une submersion de $T_b^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ dans sp(n) ; c'est a fortiori une submersion de $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$ dans sp(n) , donc aussi $(\beta,y) \to \mu_B(\beta) - \mu_o(y)$. Par conséquent Σ est une sous-variété de $T^*B \times \mathbb{R}^{2n}$. L'équivariance des moments μ_B et μ_o fait que Σ est invariante par Sp(n).

On peut donc munir $P = \Sigma/Sp(n)$ d'une structure de variété. La 2-forme $\Omega = \Omega_B - \Omega_o$, étant Sp(n)-invariante, passe au quotient et munit P d'une forme symplectique $\tilde{\Omega}$.

v) P est une variété fibrée sur M de fibre $\mathbb{R}^{2n}$. Nous voudrions en faire une variété fibrée sur T*M : cela sera possible quand nous saurons définir une projection $T^*B \to T^*M$ constante sur les Sp(n)-orbites (nous la composerons avec la projection naturelle $T^*B \times \mathbb{R}^{2n} \to T^*B$).

Soit $\Pi : B \to M$ la projection canonique ; soit $b \in B$ au-dessus de $x \in M$; on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow sp(n) \xrightarrow{v_b} T_bB \xrightarrow{T_b\Pi} T_xM \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

et par dualité

$$0 \longleftarrow sp(n)^* \xleftarrow{{}^tv_b} T_b^*B \xleftarrow{\Pi_b^*} T_x^*M \longleftarrow 0 \qquad (2)$$

Si maintenant on se donne une connexion sur $\Pi : B \to M$, on a, si H_b est le sous-espace horizontal de T_bB, $T_bB = V_b \oplus H_b$, ce qui nous donne une scission de la suite exacte (1) et, par conséquent, de la suite exacte (2) :

$$0 \longleftarrow sp(n)^* \longleftarrow V_b^* \oplus H_b^* \longleftarrow T_x^*M \longleftarrow 0 \qquad (3) .$$

On peut ainsi définir une application linéaire $T_b^*B \to T_x^*M$ d'où l'on déduit une application de T^*B dans T^*M.

On a finalement fait de $(P,\tilde{\Omega})$ une variété symplectique fibrée sur T^*M et de fibre $\mathbb{R}^{2n}$.

vi) Maintenant on remarque que $\Sigma \supset \mu_B^{-1}(0) \times \mu_o^{-1}(0) = \mu_B^{-1}(0) \times \{0\}$. Ce dernier sous-ensemble est une sous-variété de Σ puisque nous avons reremarqué que μ_B est une submersion.

$\mu_B^{-1}(0)$ est l'ensemble des vecteurs cotangents à B s'annulant sur les vecteurs verticaux ($\mu_B(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta \circ v_b = 0$ d'où le résultat puisque v_b est un isomorphisme de $sp(n)$ sur V_b). La fibre $\mu_B^{-1}(0)_b$ est donc isomorphe à H_b^* lui-même isomorphe à T_x^*M

$\mu_B^{-1}(0)$ s'identifie donc au fibré $\Pi^{-1}T^*M$

$$\begin{array}{ccc} T^*B \supset \mu_B^{-1}(0) & & T^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \overset{\Pi}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

$\Pi^{-1}T^*M$ s'injecte dans T^*B par l'application qui à $\alpha \in (\Pi^{-1}T^*M)_b$ associe $\alpha \circ T_b\Pi \in T_b^*B$.

De plus on a

$$\lambda_B|_{\Pi^{-1}T^*M} = p^*\lambda_M$$

si $p : \Pi^{-1}T^*M \to T^*M$ est l'homomorphisme de $\Pi^{-1}T^*M \to B$ dans $T^*M \to M$ au-dessus de Π (si $(b,\alpha) \in (\Pi^{-1}T^*M)_b$, $\alpha \in T^*_{\Pi(b)}M$, $p(b,\alpha)=\alpha$)

$$\begin{array}{ccc} T^*B \supset \Pi^{-1}T^*M & \xrightarrow{\;p\;} & T^*M \\ \varpi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ B & \xrightarrow[\Pi]{} & M \end{array}$$

En effet soit $\varpi : \Pi^{-1}T^*M \to B$ la projection canonique et soit $X \in T_{\tilde\alpha}\Pi^{-1}T^*M$, $\tilde\alpha = (b,\alpha)$.

Par définition $\lambda_B(\tilde\alpha)(X) = \tilde\alpha \circ T_{\tilde\alpha}\varpi(X) = \alpha \circ T_b\Pi \circ T_{\tilde\alpha}\varpi(X)$

$= \alpha \circ T_{\tilde\alpha}(\Pi \circ \varpi)(X) = \alpha \circ T_{\tilde\alpha}(\pi \circ p)(X) = \alpha \circ T_\alpha\pi \circ T_{\tilde\alpha}p(X)$

$= \lambda_M(\alpha)(T_{\tilde\alpha}p(X)) = \lambda_M(p(\tilde\alpha))(T_{\tilde\alpha}p(X)) = (p^*\lambda_M)(\tilde\alpha)(X)$.

vii) Soit O_B l'image de B par la section nulle de $T^*B \to B$. On a la suite de plongements :

$$O_B \times \{0\} \hookrightarrow \Pi^{-1}T^*M \times \{0\} \simeq \mu_B^{-1}(0) \times \{0\} \hookrightarrow \Sigma$$

Par passage au quotient elle donne la suite de plongements

$$M \hookrightarrow T^*M \simeq \Pi^{-1}T^*M/Sp(n) \hookrightarrow \Sigma/Sp(n) = P$$

Le premier de ces plongements est la section nulle O_M ; il est lagrangien.

Le second est symplectique $(\Omega_B|_{\Pi^{-1}T^*M} = p^*\Omega_M)$

Le composé des deux , $e : M \to P$ est isotrope.

Déterminons son fibré normal. Remarquons d'abord que

$$T(O_B \times \{0\})^{\Omega} = TO_B^{\Omega_B} \times T\{0\}^{\Omega_o} = TO_B^{\Omega_B} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{2n}$$

$$= TO_B \times \{0\} \times \mathbb{R}^{2n}$$ (la section nulle est un plongement lagrangien).

Comme μ_o est quadratique, T_{μ_o} est nulle sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{2n}$; comme μ_B est nul sur O_B , $T\mu_B$ est nulle sur TO_B , donc

$$T(O_B \times \{0\})^{\Omega} \subset T\Sigma$$

$$\begin{aligned} SN(e) &= Te(TM)^{\tilde{\Omega}}/Te(TM) \\ &= (T(O_B \times \{0\})^{\Omega}/T(O_B \times \{0\}))/Sp(n) \\ &= ((TO_B \times \{0\} \times \mathbb{R}^{2n})/(TO_B \times \{0\}))/Sp(n) \\ &= (O_B \times \mathbb{R}^{2n})/Sp(n) \\ &\simeq (B \times \mathbb{R}^{2n})/Sp(n) \simeq E \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE.

Les résultats de Weinstein exposés ici se trouvent dans les trois articles suivants :

[1] Alan WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds,* Advances in mathematics 6, 329-346. (1971).

[2] Alan WEINSTEIN, *Lectures on symplectic manifolds,* Regional Conference series in mathematics, Lecture 5, 22-24 (1976).

[3] Alan WEINSTEIN, *Neighborhood classification of isotropic embleddings,* Journal of differential geometry 16, 125-128 (1981).

Un certain nombre de résultats utilisés dans les démonstrations peuvent être trouvés dans :

[4] P. DAZORD, *Théorie des feuilletages,* Cours de D.E.A.

[5] S. LANG, *Introduction aux variétés différentiables.*

[6] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds.*

>>>>>>>>>>>