J. Coulon
J. L. Coulon

Proximités floues et espaces topologiques flous uniformisables

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 7A
« Proximités floues et espaces topologiques flous uniformisables », , p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___7A_A1_0>

PROXIMITES FLOUES ET ESPACES TOPOLOGIQUES FLOUS UNIFORMISABLES

par J. COULON et J.L. COULON

§ O . Introduction.

Soit X un ensemble non vide.

. Efremovič (voir par exemple [3]) appelle proximité sur X toute relation binaire Δ sur 2^X telle que

$$A \,\Delta\, B \rightarrow B \,\Delta\, A$$
$$(A \cup B)\, \Delta\, C \leftrightarrow A \,\Delta\, C \text{ ou } B\, \Delta\, C$$
$$A \,\Delta\, B \rightarrow A \neq \emptyset \text{ et } B \neq \emptyset$$
$$A \not\Delta B \rightarrow \text{ il existe } E \in 2^X \text{ telle que } A \not\Delta E \text{ et } (X-E) \not\Delta B$$
$$A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \,\Delta\, B \ .$$

. A une proximité Δ sur X, on associe une topologie définie par (1) :

$$x \in \overline{A} \longleftrightarrow x \,\Delta\, A \ (x \text{ mis pour } \{x\}).$$

. A une uniformité $\mathcal{U}$ sur X, on associe une topologie définie par (2) :

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A) \ , \text{ où } U(A) = \{x \in X, \ \exists z \in A \ , \ (z,x) \in U\} \ .$$

A une uniformité $\mathcal{U}$ sur X, on associe une proximité définie par (3) :

$$A \,\Delta\, B \longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset \ .$$

on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "(3)"] \arrow[dr, "(2)"'] & \Delta \arrow[d, "(1)"] \\ & T \end{tikzcd}$$

. Soit T une topologie sur X. On montre (voir [2] et [3]) qu'il y a équivalence entre :

T est associée à une proximité Δ au moyen de (1)
T est associée à une uniformité $\mathcal{U}$ au moyen de (2)
T est une topologie complètement régulière.

. Soit T une topologie normale sur X (2 fermés disjoints peuvent être séparés par des ouverts) : on définit alors une proximité sur X par (4) : $A \Delta B \leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$; et si T est de plus séparée, cette proximité Δ est compatible avec T.

. Si T est une topologie quasi-compacte et complètement régulière (par exemple si T est compacte), la proximité Δ définie par (4) est l'unique proximité compatible avec T.

§ 1. L.P. proximités floues.

1. matériel flou utilisé.

. Soit X un ensemble non vide.

Comme dans [13], on considère la structure floue sur X où les valeurs d'appartenance sont dans $I = [0,1]$. On désignera dans la suite par $\alpha \to \alpha^*$ l'involution décroissante $\alpha \to 1-\alpha$ de $[0,1]$, et par $\overset{*}{\mu}$ la partie floue $x \to 1 - \mu(x)$.

. Par topologie floue sur X, nous entendrons une topologie floue au sens de Chang ([4]).
Nous dirons qu'une topologie floue est de Lowen si toutes les constantes sont des ofs (voir [5]) ; et qu'une topologie floue τ est une H-topologie-floue s'il existe une topologie (ordinaire) T sur X telle que : μ est τ-fermée $\leftrightarrow$ $\forall \alpha \in I$, μ_α est T-fermée (où $\mu_\alpha = \{x \in X \ / \ \mu(x) \geqslant \alpha\}$).

. Nous utiliserons la relation de "q-coïncidence" introduite par Liu Ying-Ming et Pu Pao-Ming (voir [9]) : $\mu \, q \, \nu \leftrightarrow \exists \, x \in X, \mu(x) + \nu(x) > 1 \leftrightarrow \mu \not\subset \overset{*}{\nu} \leftrightarrow \nu \not\subset \overset{*}{\mu}$.

2. notion de L-P proximité floue.

DEFINITION : *Nous appellerons* L-P *proximité floue sur* X *toute relation binaire sur* I^X *telle que :*

1. $\mu\delta\nu \rightarrow \nu\delta\mu$

2. $(\mu \cup \nu)\delta\rho \rightarrow \mu\delta\rho$ ou $\nu\delta\rho$

3. $\mu\delta\nu \rightarrow \mu \neq \emptyset$ et $\nu \neq \emptyset$

4. $\mu\not\delta\nu \rightarrow$ il existe $\lambda \in I^X$ telle que $\mu\not\delta\lambda$ et $\lambda^*\not\delta\nu$

5. $\mu q \nu \rightarrow \mu\delta\nu$

REMARQUE. Katsaras, dans [6] , introduit une notion de proximité floue en prenant comme cinquième axiome $\mu \cap \nu \neq \emptyset \rightarrow \mu\delta\nu$. La notion que nous introduisons ici est donc une généralisation stricte de celle de Katsaras et il nous a été nécessaire de faire cette modification pour que -comme dans le cas net - il y ait équivalence entre les topologies floues qui proviennent d'une proximité et les topologies floues uniformisables déjà décrites dans la littérature.

PROPOSITION 1 : *Soit* δ *une* L-P-*proximité sur* X - *on définit une topologie floue sur* X *par (5) :* $\mu^{\mathcal{I}(\delta)} = \bigcap_{\rho\not\delta\mu} \rho^*$

PREUVE. Laissée au lecteur.

REMARQUE. Lorsque δ est une proximité floue au sens de Katsaras, la topologie floue associée n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen, car si $\alpha \neq 0$: $\bar{\alpha} = \bigcap_{\rho\not\delta\alpha} \rho^* = (\bigcup_{\rho\not\delta\alpha} \rho)^* = \emptyset^* = X$

EXEMPLES DE LP PROXIMITES FLOUES QUI NE SONT PAS DES PROXIMITES FLOUES AU SENS DE KATSARAS.

1) $\mu\delta\nu \rightarrow V\mu + V\nu > 1$

La topologie floue associée est formée des constantes.

2) $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu \not\subset \nu^*$

La topologie floue associée est I^X.

Nous dirons qu'une LP-proximité floue est de Lowen (respectivement est une H-LP-proximité floue) lorsque la topologie floue associée est une topologie floue au sens de Lowen (respectivement une H-topologie floue).

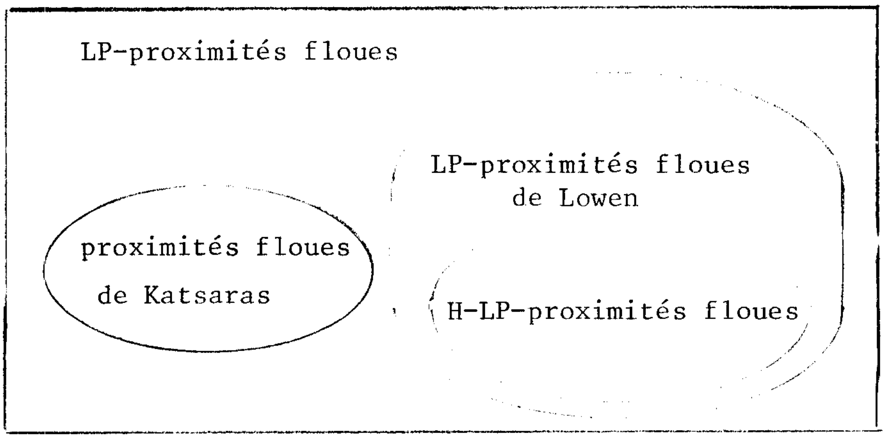
<u>EXEMPLE D'UNE LP-PROXIMITE FLOUE QUI N'EST NI DE KATSARAS NI DE LOWEN</u> :

Soit X un ensemble non vide.

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Posons $\mu \delta \nu \Longleftrightarrow \mu \neq \emptyset, \nu \neq \emptyset$ et ou bien $\mu \, q \, \nu$
ou bien $\mu \not\subset 1-\varepsilon$
ou bien $\nu \not\subset 1-\varepsilon$

on a donc :



3. <u>Quelques notions de séparation</u> :

. nous appellerons <u>point flou</u> toute partie floue $(x,\alpha) = \left| \begin{array}{l} x \mapsto \alpha \\ y \neq x \mapsto 0 \end{array} \right.$ où $\alpha \neq 0$.

. <u>nous dirons qu'une topologie floue est S_1</u> lorsque tout point flou est fermé

. <u>nous dirons qu'une topologie floue est S_2</u> lorsque pour toute paire $\{m,n\}$ de points flous tels que $m \not\!q\, n$, il existe des ouverts u et v tels que $m \subset u$, $n \subset v$ et $u \not\!q\, v$.

Autrement dit, une topologie floue est S_2 lorsque :

1) Si $x \in X$, $y \in X$ et $x \neq y$, il existe des ouverts u et v tels que $u(x) = 1$, $v(y) = 1$ et $u \subset \overset{*}{v}$

2) Si $x \in X$, $\alpha \in I$, $\beta \in I$ et $\alpha + \beta \leqslant 1$, il existe des ouverts u et v tels que $u(x) \geqslant \alpha$, $v(x) \geqslant \beta$ et $u \subset \overset{*}{v}$.

Remarquons qu'une H-topologie est S_2 ssi la topologie ordinaire dont elle est issue est séparée au sens de Hausdorff.

* $S_2 \rightarrow S_1$.

. <u>Nous dirons qu'une topologie floue est normale</u> lorsque pour tout fermé f et tout ouvert 0 tels que $f \subset 0$, il existe $\lambda \in I^X$ telle que $f \subset \overset{\circ}{\lambda} \subset \bar{\lambda} \subset 0$.

Il est aisé de remarquer qu'une topologie floue est normale ssi pour toute paire $\{f,g\}$ de fermés tels que $f \not{q} g$, il existe des ouverts u et v tels que $f \subset u$, $g \subset v$ et $u \not{q} v$.

Il est évident que pour une topologie floue normale, $S_1 \leftrightarrow S_2$.

. <u>Nous dirons qu'une topologie floue est D</u> lorsque tout ouvert est une réunion de fermés.

$S_1 \rightarrow D$: car pour tout ouvert 0, $0 = \bigcup_{(x,\alpha) \in 0} (x,\alpha) \subset \bigcup_{\substack{f \text{ fermé} \\ f \subset 0}} f$ et $0 = \bigcup_{\substack{f \text{ fermé} \\ f \subset 0}} f$

donc a fortiori $S_2 \rightarrow D$.

Remarquons qu'un espace topologique flou normal n'est pas nécessairement D. Par exemple, si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, considérons la topologie floue ayant pour fermés $\emptyset$, α et X . L'ouvert $\overset{*}{\alpha}$ n'est pas une réunion de fermés et pourtant cette topologie floue est normale.

4.

<u>PROPOSITION 2</u> : *i) Etant donné un espace topologique flou normal, on définit une* LP-*proximité floue* δ *par* $\mu\delta\nu \leftrightarrow \bar{\mu}\, q\, \bar{\nu}$.

ii) Si de plus cet espace topologique flou est D , δ *est compatible avec la topologie floue.*

PREUVE.

i) Définissons une relation binaire δ sur I^X par $\mu\delta\nu \leftrightarrow \bar{\mu}\, q\, \bar{\nu}$

* Il est évident que $\mu\delta\nu \to \nu\delta\mu$

* Si $\mu\delta\nu$ et $\mu \subset \mu_1$, $\bar{\mu} q \bar{\nu}$ et $\bar{\mu} \subset \bar{\mu}_1$, d'où $\bar{\mu}_1 q \bar{\nu}$ et $\mu_1\delta\nu$ donc $\mu\delta\rho$ ou $\nu\delta\rho \to (\mu\cup\nu)\delta\rho$.

Inversement, si $\mu\not\delta\rho$ et $\nu\not\delta\rho$, $\bar{\mu} \subset \bar{\rho}^*$ et $\bar{\nu} \subset \bar{\rho}^*$, d'où $\overline{\mu\ \nu} = \bar{\mu} \cup \bar{\nu} \subset \bar{\rho}^*$ et $(\mu\cup\nu)\not\delta\rho$.

* Il est évident que $\emptyset \not\delta \mu$.

Supposons que $\mu\not\delta\nu$, de sorte que $\bar{\nu} \subset \bar{\mu}^*$.
Comme la topologie floue est normale, il existe $\lambda \in I^X$ telle que $\bar{\nu} \subset \overset{\circ}{\lambda} \subset \bar{\lambda} \subset \bar{\mu}^*$; mais $\bar{\lambda} \subset \bar{\mu}^*$ signifie que $\mu\not\delta\lambda$, et $\bar{\nu} \subset \overset{\circ}{\lambda}$ signifie que $\lambda^* \not\delta \nu$.

* Enfin, si $\mu q \nu$, $\bar{\mu}\, q\, \bar{\nu}$ et $\mu\delta\nu$.

ii) Soit $\tau(\delta)$ la topologie floue associée (par le procédé (5)) à δ.

$\bar{\rho} \not q\, \bar{\mu} \to \rho \subset \bar{\rho} \subset \bar{\mu}^*$; d'où $\bigcup_{\bar{\rho} \not q \bar{\mu}} \rho \subset \bar{\mu}^*$, et $\bar{\mu} \subset (\bigcup_{\bar{\rho} \not q \bar{\mu}} \rho)^* = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \rho^* = \bar{\mu}^{\tau(\delta)}$.

Inversement, si μ est fermé (pour la topologie floue d'origine), puisque cette topologie floue est D, on a :

$$\mu^* = \bigcup_{\substack{f \text{ fermée} \\ f \subset \mu^*}} f = \bigcup_{\bar{\rho} \subset \mu^*} \rho = \bigcup_{\bar{\rho} \not q \mu} \rho = \bigcup_{\bar{\rho} \not q \bar{\mu}} \rho = \bigcup_{\rho \not\delta \mu} \rho \text{ et } \mu = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \rho^* = \bar{\mu}^{\tau(\delta)} .$$

5. Cas d'une topologie floue compacte :

. Comme Chang (voir [4]), nous dirons qu'une topologie floue et compacte lorsque de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini.

Remarquons toutefois que cette notion est d'un intérêt limité par le fait qu'aucune topologie floue au sens de Lowen n'est compacte, puisqu'on ne peut extraire aucun recouvrement fini de $X = \bigcup_{\alpha < 1} \alpha$ (voir [5]). Toutefois cette notion peut être utile pour des topologies floues plus générales.

. Remarquons cette différence avec la topologie ordinaire : dans un espace topologique flou compact, une partie fermée n'est pas nécessairement compacte en ce sens qu'elle peut avoir un recouvrement ouvert dont on ne puisse extraire un recouvrement fini. Par exemple, considérons la topologie floue dont les ouverts (qui sont en fait des ofs) sont $\emptyset$ et X et les constantes α telles que $\frac{1}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{4}$.

Elle est evidemment compacte, mais on ne peut extraire aucun recouvrement fini du fermé $\frac{3}{4}$ de $\bigcup_{\frac{1}{4} \leqslant \alpha < \frac{3}{4}} \alpha$

Nous dirons qu'une topologie floue est F-compacte lorsque, pour toute partie fermée, on peut extraire un recouvrement fini de cette partie à partir de tout recouvrement ouvert. Bien sür, a fortiori, une telle topologie floue n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen.

PROPOSITION 3 : *Soit un espace topologique flou normal,* D *et* F-*compact. Alors,*

i) $\mu \delta \nu \leftrightarrow \bar{\mu}\, q\, \bar{\nu}$ *est une* LP-*proximité compatible avec la topologie floue donnée.*

ii) c'est la seule LP-*proximité floue compatible avec cette topologie floue.*

PREUVE.

o) remarquons qu'il existe bien des topologies floues normales, D et F-compactes : par exemple toute topologie ordinaire séparée (au sens de Hausdorff) et compacte est normale, D et F-compacte (mais elle n'est donc pas S_2).

i) D'après la proposition 2, puisque la topologie floue considérée est normale et D, $\mu \delta \nu \leftrightarrow \bar{\mu}\, q\, \bar{\nu}$ est une LP-proximité floue compatible avec la topologie donnée.

ii) LEMME : *Soit un espace topologique floue, soit* δ *une* LP-*proximité floue compatible, soit* μ *une partie floue compacte (donc telle qu'on puisse extraire un recouvrement fini de chacun de ses recouvrements ouverts) et soit enfin* ν *une partie floue fermée telle que* $\mu \not{q} \nu$. *Alors* $\mu \not\delta \nu$.

En effet, introduisons la notation $u \vartriangleleft v \leftrightarrow u \not\delta v^*$

on peut remarquer que d'une façon générale $\bigcup_{\lambda \vartriangleleft \xi} \lambda = \xi^\circ$ (R_1)

(car $\bigcup_{\lambda \vartriangleleft \xi} \lambda = \bigcup_{\lambda \not\delta \xi^*} \lambda = [\bigcap_{\lambda \not\delta \xi^*} \lambda^*]^* = \overline{\xi^*}^{\,*} = \xi^{\circ **} = \xi^\circ$)

remarquons aussi que si $u \vartriangleleft v$, il existe un ouvert O tel que $u \vartriangleleft O \vartriangleleft v$ (R_2)

(en effet, si $u \not\delta v^*$, il existe $\lambda \in I^X$ telle que $u \not\delta \lambda^*$ et $\lambda \not\delta v^*$. Posons $O = \lambda^\circ$.
$u \not\delta O^*$ (car si $u \delta O^*$, on a $u \delta \lambda^{\circ *}$, donc $u \delta \overline{\lambda}^*$ et d'après une remarque antérieure $u \delta \lambda^*$),
$o \not\delta v^*$ (car si $O \delta v^*$, on a a fortiori $\lambda \delta v^*$)).

Revenons au lemme énoncé :

A chaque $u \vartriangleleft v^*$, on peut associer un ouvert O_u tel que $u \vartriangleleft O_u \vartriangleleft v^*$, de sorte que $u \subset O_u$ et $O_u \not\delta v$.
Alors $\bigcup_{u \vartriangleleft v^*} u = v^{*\circ} = \overline{v}^* = v^* \supset \mu$, et $\bigcup_{u \vartriangleleft v^*} O_u \supset \mu$; donc il existe
$u_1 \vartriangleleft v^*, \ldots, u_n \vartriangleleft v^*$ tels que $O = \bigcup_{i=1}^{n} O_{u_i} > \mu$.
Comme $O_{u_1} \not\delta v, \ldots, O_{u_n} \not\delta v$, on a $O \not\delta v$, et puisque $\mu \subset O$ - $\mu \not\delta v$.

* Soit alors une topologie floue normale, D et F-compacte.
Soit δ la proximité floue compatible définie par $\mu \delta v \Leftrightarrow \overline{\mu} q \overline{v}$.
Soit δ_1 une proximité floue compatible quelconque.

Si $\mu \delta v$, $\overline{\mu} q \overline{v}$ et - d'après l'axiome 5. - $\mu \delta_1 v$.
Diversement, si $\mu \not\delta v$, donc si $\overline{\mu} \not q \overline{v}$, le lemme précédent montre - puisque $\overline{\mu}$ est une partie floue fermée d'un espace topologique flou F-compact, donc une partie floue compacte, tandis que $\overline{v}$ est fermée - que $\mu \not\delta_1 v$.

§ 2. Lien avec la notion d'uniformité floue.

1. Notion d'uniformité floue.

Dans [7] , Hutton définit une uniformité floue sur X comme un ensemble d'applications de I^X dans I^X tel que :

$$\mathscr{D} \subset \mathbb{Q} = \{D \in (I^X)^{(I^X)} \;/\; D(\mu) \supset \mu \text{ et } D(\bigcup_k \mu^k) = \bigcup_k D(\mu^k)\}$$
$$\mathscr{D} \neq \emptyset .$$

$D \in \mathscr{D}, \Delta \in \mathbb{Q}$ et $\Delta \supset D \to \Delta \in \mathscr{D}$

$D \in \mathscr{D}$ et $E \in \mathscr{D} \to D \,\tilde{\Lambda}\, E \in \mathscr{D}$, où $(D \,\tilde{\Lambda}\, E)(\mu) = \bigcap_{v \cup \rho = \mu} [D(v) \cup E(\rho)]$

$D \in \mathscr{D} \to \bar{D}^1 \in \mathscr{D}$, où $\bar{D}^1(\mu) = \bigcap_{D(\overset{*}{\rho}) \subset \overset{*}{\mu}} \rho$

$D \in \mathscr{D}$ il existe $\Delta \in \mathscr{D}$, telle que $\Delta \circ \Delta \subset D$, où $D_2 \circ D_1(\mu) = D_2[D_1(\mu)]$.

A une uniformité floue, Hutton associe une topologie floue par

$$(6) \quad \bar{\mu} = \bigcap_{\exists D \in \mathscr{D}, D(\overset{*}{\gamma}) \subset \overset{*}{\mu}} \gamma$$

PROPOSITION 4 : *Soit* $\mathscr{D}$ *une uniformité sur* X

Définissons une relation binaire sur I^X *par (7)* $\mu \delta \nu \leftrightarrow \forall D \in \mathscr{D} : D(\mu) q D(v)$

Alors δ *est une* LP-*proximité floue sur* X, *que nous dirons associée à* $\mathscr{D}$

PREUVE.

* Il est évident que $\mu\delta\nu \to \nu\delta\mu$

* Il est évident que $\mu\delta\nu$ et $\mu \subset \mu_1 \to \mu_1\delta\nu$; de sorte que $\mu\delta\rho$ ou $\nu\delta\rho \to (\mu \cup \nu)\delta\rho$

Supposons maintenant que $\mu \not\delta \rho$ et $v \not\delta \rho$

il existe $D \in \mathscr{D}$ tel que $\forall x \in X : D(\mu)(x) + D(\rho)(x) \leqslant 1$

il existe $E \in \mathscr{D}$ tel que $\forall x \in X : E(v)(x) + E(\rho)(x) \leqslant 1$.

Posons $F = D \,\tilde{\Lambda}\, E$ $\quad F \in \mathscr{D}$, et pour tout $x \in X$:

$F(\mu)(x) + F(\rho)(x) \leqslant D(\mu)(x) + D(\rho)(x) \leqslant 1$

$F(v)(x) + F(\rho)(x) \leqslant E(v)(x) + E(\rho)(x) \leqslant 1$

d'où $F(\mu \cup v)(x) + F(\rho)(x) = [F(\mu) \cup F(v)](x) + F(\rho)(x) =$

$[F(\mu)(x) + F(\rho)(x)] \vee [F(v)(x) + F(\rho)(x)] \leqslant 1$, d'où $(\mu \cup v) \not\delta \rho$.

* il est évident que $\emptyset \not\delta \mu$, car si $D \in \mathscr{D}$ $(\mathscr{D} \neq \emptyset)$ et si $x \in X$:

$D(\emptyset)(x) + D(\mu)(x) = D(\mu)(x) \leqslant 1$, car pour tout $D \in \mathscr{D}$: $\bar{D}^1(\emptyset) = \bigcap_{D(\overset{*}{\rho}) \subset \overset{*}{\emptyset}} \rho = \emptyset$

et donc $D(\emptyset) = (\bar{D}^1)^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

* Supposons $\mu \not\delta \gamma$.

Il existe donc $D \in \mathscr{D}$ telle que $\forall x \in X : D(\mu)(x) + D(v)(x) \leqslant 1$

Remarquons qu'il existe $\Delta \in \mathscr{D}$ telle que $\Delta \circ \overset{-1}{\Delta} \circ \Delta \subset D$.

(En effet, il existe $\nabla \in \mathscr{D}$ telle que $\nabla \circ \nabla \subset D$; de même il existe $\Lambda \in \mathscr{D}$ telle que $\Lambda \circ \Lambda \subset \nabla$. Alors $\Lambda \circ \Lambda \circ \Lambda \circ \Lambda \subset \nabla \circ \nabla \subset D$, et a fortiori $\Lambda \circ \Lambda \circ \Lambda \subset D$. Posons alors $\Delta = \Lambda \,\tilde{\Lambda}\, \overset{-1}{\Lambda}$: $\Delta \in \mathscr{D}$ et $\Delta \circ \Delta^{-1} \circ \Delta = (\Lambda \tilde{\Lambda} \overset{-1}{\Lambda})^{-1} \circ (\Lambda \tilde{\Lambda} \overset{-1}{\Lambda}) =$
$(\Lambda \tilde{\Lambda} \overset{-1}{\Lambda})^3 \subset \Lambda^3 \,\tilde{\Lambda} (\overset{-1}{\Lambda})^3 = \Lambda^3 \tilde{\Lambda} (\Lambda^3)^{-1} \subset D \,\tilde{\Lambda}\, D^{-1}$ d'après les propriétés des opérations $(D,E) \mapsto D \tilde{\Lambda} E$ et $D \longmapsto D^{-1}$ dans [7]).

Posons alors $\lambda = \overset{-1}{\Delta} \circ \Delta(\nu)$:

$\mu \not\delta \lambda$: en effet, $\Delta \subset \Delta \circ \overset{-1}{\Delta} \circ \Delta \subset D$ et $\Delta(\mu) \subset D(\mu)$ alors que $\Delta(\lambda) = \Delta \circ \overset{-1}{\Delta} \circ \Delta(\nu) \subset D(\nu)$, de sorte que pour tout $x \in X$:
$\Delta(\mu)(x) + \Delta(\lambda)(x) \leqslant D(\mu)(x) + D(\nu)(x) \leqslant 1$.

$\lambda^* \not\delta \nu$: en effet ,

$$\Delta(\lambda^*) = \Delta([\overset{-1}{\Delta} \circ \Delta(\nu)]^*) = \Delta\Big(\Big[\bigcap_{\Delta(\overset{*}{\rho}) \subset \Delta(\nu)^*} \rho\Big]^*\Big) = \Delta\Big[\bigcup_{\Delta(\rho) \subset \Delta(\nu)^*} \rho^*\Big] = \bigcup_{\Delta(\overset{*}{\rho}) \subset \Delta(\nu)^*} \Delta(\overset{*}{\rho}) \subset \Delta(\nu)^*$$

de sorte que pour tout $x \in X$: $\Delta(\overset{*}{\lambda})(x) + \Delta(\nu)(x) \leqslant \Delta(\nu)^*(x) + \Delta(\nu)(x) = 1$.

* Enfin, si $\rho q \nu$, il existe $x \in X$ tel que $\mu(x) + \nu(x) > 1$; alors pour tout $D \in \mathscr{D}$: $D(\mu)(x) + D(\nu)(x) > 1$ et $\mu \delta \nu$.

. PROPOSITION 5 : *On a le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & \delta \arrow[dr, dash, "(5)"] & \\
\mathscr{D} \arrow[ur, dash, "(7)"] \arrow[rr, dash, "(6)"'] & & \tau
\end{tikzcd}$$

De plus , $\overset{-}{\mu}^{\tau} = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\mu)$ (8)

PREUVE. Désignons par τ_1 et τ_2 les topologies floues sur X obtenues respectivement par $\mathscr{D} \xrightarrow{(7)} \delta \xrightarrow{(5)} \tau_1$ et $\mathscr{D} \xrightarrow{(6)} \tau_2$.

Notons , pour chaque $\mu \in I^X$: $\hat{\mu} = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\mu)$.

Nous allons montrer que $\mu \to \hat{\mu}$ définit une topologie floue $\hat{\tau}$ et que $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \hat{\tau} \subset \tau_1$.

* $\hat{\mu}$ définit une topologie floue $\hat{\tau}$ sur X :

- $\hat{\emptyset} = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\emptyset) = \emptyset$.

- pour tout $D \in \mathscr{D}$, $D(\mu) \supset \mu$; de sorte que $\hat{\mu} \supset \mu$

- donc $\hat{\hat{\mu}} \supset \hat{\mu}$. Inversement ,

$$\hat{\hat{\mu}} = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\hat{\mu}) = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D[\bigcap_{\Delta \in \mathscr{D}} \Delta(\mu)] \subset \bigcap_{\substack{D \in \mathscr{D} \\ \Delta \in \mathscr{D}}} D\circ\Delta(\mu) = \bigcap_{L \in \mathscr{D}} L(\mu)$$

puisque pour tout $L \in \mathscr{D}$ il existe $D \in \mathscr{D}$ telle que $D\circ D \subset L$.

- $\widehat{\mu \cup \nu} = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\mu \cup \nu) = \bigcap_{D \in \mathscr{D}} [D(\mu) \cup D(\nu)]$, alors que

$$\hat{\mu} \cup \hat{\nu} = [\bigcap_{D \in \mathscr{D}} D(\mu)] \cup [\bigcap_{\Delta \in \mathscr{D}} \Delta(\nu)] = \bigcap_{\substack{D \in \mathscr{D} \\ \Delta \in \mathscr{D}}} [D(\mu) \cup \Delta(\nu)] .$$

A priori, $\widehat{\mu \cup \nu} \supset \hat{\mu} \cup \hat{\nu}$. En fait, on a l'égalité puisque si $D \in \mathscr{D}$ et $\Delta \in \mathscr{D}$: $D(\mu) \cup \Delta(\nu) \supset (D \tilde{\wedge} \Delta)(\mu) \cup (D \tilde{\wedge} \Delta)(\nu)$.

* Description de τ_1 et τ_2 :

$$\bar{\mu}^{\tau_1} = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \overset{*}{\rho} = \bigcap_{\rho \in \mathcal{A}} \rho \quad , \text{ où } \rho \in \mathcal{A} \leftrightarrow \overset{*}{\rho} \not\delta \mu \longleftrightarrow \exists D \in \mathscr{D} \ , \ D(\overset{*}{\rho}) \subset D(\mu)^*$$

$$\bar{\mu}^{\tau_2} = \bigcap_{\rho \in B} \rho \ , \text{ où } \rho \in B \leftrightarrow \exists D \in \mathscr{D} \ , \ D(\overset{*}{\rho}) \subset \overset{*}{\mu} \ .$$

* $\tau_1 \subset \tau_2$:

Si $\rho \in \mathcal{A}$, il existe $D \in \mathcal{D}$ telle que $D(\overset{*}{\rho}) \subset D(\mu)^*$ mais $D(\mu)^* \subset \mu^*$, d'où $\rho \in B$. De sorte que $\bar{\mu}^{\tau_1} \supset \bar{\mu}^{\tau_2}$ et $\tau_1 \subset \tau_2$.

* $\tau_2 \subset \hat{\tau}$:

Si $\rho \in B$, il existe $D \in \mathcal{D}$ telle que $D(\overset{*}{\rho}) \subset \mu^*$

Alors $\overset{-1}{D}(\mu) = \bigcap_{D(\overset{*}{\xi}) \subset \overset{*}{\mu}} \xi \subset \rho$; donc $\bar{\mu}^{\tau_2} = \bigcap_{\rho \in B} \rho \supset \bigcap_{\Delta \in \mathcal{D}} \Delta(\mu) = \hat{\mu}$

et $\tau_2 \subset \hat{\tau}$.

* Enfin $\hat{\tau} \subset \tau_1$:

REMARQUE : $\forall D \in \mathcal{D}$, $\exists \Delta \in \mathcal{D}$ et $\exists \rho \in I^X$ tels que $\Delta(\overset{*}{\rho}) \subset \Delta(\mu)^*$ et $D(\mu) \supset \rho$.

Alors $\bar{\mu}^{\tau_1} = \bigcap_{\rho \in \mathcal{A}} \rho \subset \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D(\mu) = \hat{\mu}$, et $\hat{\tau} \subset \tau_1$.

Pour prouver la remarque, il suffit de trouver $\Delta \in \mathcal{D}$ telle que $\Delta(D(\mu)^*) \subset \Delta(\mu)^*$.

Soit Δ symétrique telle que $\Delta \circ \Delta \subset D$: $\Delta(D(\mu)^*) = \overset{-1}{\Delta}(D(\mu)^*) = \bigcap_{\Delta(\overset{*}{\xi}) \subset D(\mu)} \xi \subset \Delta(\mu)^*$

car parmi les ξ il y a $\Delta(\mu)^*$ du fait que $\Delta(\Delta(\mu)^{**}) = \Delta \circ \Delta(\mu) \subset D(\mu)$.

(2) Matériel flou supplémentaire utilisé (cf. par exemple Hutton [7]) :

* Intervalle réel unitaire flou :

On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions $\lambda : \mathbb{R} \to I$ croissantes, telles que $t < 0 \to \lambda(t) = 0$ et $t > 1 \to \lambda(t) = 1$, après identification de λ et μ lorsque $\forall t \in \mathbb{R}$: $\lambda(t-) = \mu(t-)$ et $\lambda(t+) = \mu(t+)$, où par définition $\lambda(t-) = \bigvee_{u<t} \lambda(u)$ et $\lambda(t+) = \bigwedge_{u>t} \lambda(u)$.

On munit $\mathcal{I}$ de la topologie floue ayant pour subbase $\{A_t, B_t / t \in \mathbb{R}\}$, où

A_t est l'application de $\mathcal{I}$ dans I définie par $A_t(\lambda) = \lambda(t-)$

B_t est l'application de $\mathcal{I}$ dans I définie par $B_t(\lambda) = \lambda(t+)^*$.

* Un espace topologique flou X est <u>complètement régulier</u> (CR) si pour tout ouvert Ω de X il existe une partie L de I^X et une famille $(f_u)_{u \in L}$ telles que :

$$\left| \begin{array}{l} \bigcup\limits_{u \in L} u = \Omega \\ \text{pour tout } u \in L,\ f_u \text{ est une application continue de X dans } \mathscr{I} \\ \text{pour tout } u \in L, \text{ pour tout } z \in X : u(z) \leqslant f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z). \end{array} \right.$$

* <u>Quelques remarques</u> :

1) un espace topologique flou CR est toujours D :

En effet, avec les notations de la définition précédente, si Ω est un ouvert de X (supposé CR) et si $u \in L$:

pour tout $z \in X$: $\quad f_u(z)(0+) = f_u(z)(0+)^{**} = B_o(f_u(z))^* = \overset{*}{B}_o(f_u(z)) = \bar{f}_u^1(\overset{*}{B}_o)(z)$

donc pour tout $z \in X$: $u(z) \leqslant \bar{f}_u^1(B_o^*)(z) \leqslant \Omega(z)$.

donc $\quad u \subset \bar{f}_u^1(B_o^*) \subset \Omega$; mais $\bar{f}_u^1(B_o^*)$ étant un fermé : $\bar{u} \subset \bar{f}_u^1(B_o^*) \subset \Omega$.

de sorte que $\Omega = \bigcup\limits_{u \in L} u = \bigcup\limits_{u \in L} \bar{u}$.

2) <u>PROPOSITION 6</u> : (sorte de "lemme d'Urysohn flou", un peu différent de celui que propose Hutton).

Tout espace topologique flou <u>normal</u> <u>et</u> D est <u>complètement régulier</u>.

*<u>REMARQUE</u> : La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple d'une topologie ordinaire complètement régulière qui n'est pas normale.

<u>PREUVE</u>.

*<u>LEMME 1</u> : *Soit un espace topologique flou.*

Definissons une relation binaire sur I^X *par* $u \ll v \leftrightarrow \bar{u} \subset v^\circ$.

Alors si l'espace topologique flou est normal et si $u \ll v$, *il existe un ouvert* o *tel que* $u \ll o \ll v$.

En effet, si $u \ll v$, $\bar{u} \subseteq v^{\circ **}$, donc $\bar{u} \not\mathrel{q} v^{\circ *}$; et, comme l'espace topologique flou est normal, il existe un ouvert o et un ouvert α tels que $\bar{u} \subset o$, $v^{\circ *} \subset \alpha$, $o \not\mathrel{q} \alpha$.

Mais alors $\bar{u} \subset 0 = \overset{\circ}{0}$, d'où $u \ll 0$; d'autre part $0 \not\subset \alpha$ et $\overset{\circ *}{v} \subset \alpha$ impliquent que $0 \subset \overset{*}{\alpha}$ (fermé) $\subset \overset{\circ}{v}$, d'où $\bar{0} \subset \overset{*}{\alpha} \subset \overset{\circ}{v}$ et $0 \ll v$.

(Remarque : si δ est une LP-proximité floue sur X, on a introduit $u \triangleleft v \leftrightarrow u \not\delta v^*$.
Si on introduit la topologie floue associée à δ , il est aisé de montrer que $u \triangleleft v \rightarrow u \ll v$ - on a vu que si $u \triangleleft v$ - même si la topologie floue en question n'est pas normale - il existe un ouvert 0 tel que $u \triangleleft 0 \triangleleft v$).

* LEMME 2 : *Soit un espace topologique flou normal, soit Ω un ouvert et soit* $u \ll \Omega$.

Soit $D = \{ \frac{p}{2^n} \; p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \}$.

Il existe une famille $(F(t))_{t \in D}$ *telle que* (I)
$$\left| \begin{array}{l} \textit{chaque } F(t) \textit{ est un ouvert de } X \\ t < s \rightarrow F(t) \ll F(s) \\ u \subset F(0) \\ F(1) = \Omega \\ t > 1 \rightarrow F(t) = X. \end{array} \right.$$

Preuve du lemme 2 :

Si $t \in D$ et $t > 1$, on pose $F(t) = X$
On pose $F(1) = \Omega$
On choisit pour $F(0)$ un ouvert ω tel que $u \ll \omega \ll \Omega$ (dont l'existence est assurée par le lemme 1).
Si $t \in D$ et $0 < t < 1$, si $t = \frac{2m+1}{2^n}$, on construit $F(t)$ par récurrence sur n :

$F(\frac{1}{2})$ est un ouvert tel que $\omega \ll F(\frac{1}{2}) \ll \Omega$.

Si $n > 1$, et si les $(F(\frac{k}{2^{n-1}}))_k$ sont construits et sont tels que $F(\frac{k}{2^{n-1}}) \ll F(\frac{k+1}{2^{n-1}})$, on choisit pour $F(\frac{2m+1}{2^n})$ un ouvert tel que

$F(\frac{m}{2^{n-1}}) \ll F(\frac{2m+1}{2^n}) \ll F(\frac{m+1}{2^{n-1}})$.

On a ainsi $(F(\frac{k}{2^n}))_k$ et on vérifie aisément que $F(\frac{k}{2^n}) \ll F(\frac{k+1}{2^n})$.

Il est aisé de voir que la famille $(F(t))_{t \in D}$ vérifie bien (I).

*LEMME 3 : *Soit un espace topologique flou ; soit* Ω *un ouvert et soit* $u \in I^X$ *telle que* $u \ll \Omega$.

Soit $(F(t))_{t \in D}$ *une famille telle que* (I)

Posons, pour tout $z \in X$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f_u(z)\,(x) = \sup \{ F(t)(z) \;/\; t \in D \text{ et } t < x \}}$$

En posant $\overline{f}_u(z) = \overline{f_u(z)}$ *pour tout* $z \in X$ ($\overline{f_u(z)}$ *étant la classe de* $f_u(z)$ *pour l'équivalence qui consiste à identifier deux applications ayant même limite à gauche et même limite à droite en chaque point), on définit une application continue* $\overline{f}_u$ *de* X *dans* $\mathcal{I}$ *telle que*

$\forall\, z \in X : u(z) \leqslant f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z)$.

Preuve du lemme 3 :

* Pour tout $z \in X$, si $x < 0$: $f_u(z)(x) = \sup\{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} = \sup \emptyset = 0$

  si $x > 1$: $f_u(z)(x) = \sup\{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} = 1$,

  car il existe $t_1 \in D$ tel que $1 < t_1 < x$,

  puisque D est dense dans $\mathbb{R}^+$ et

  $f_u(z)(x) \geqslant F(t_1)(z) = X(z) = 1$.

  si $x \leqslant y$: $\{t \in D/t < x\} \subset \{t \in D/t < y\}$ et

  $f_u(z)(x) \leqslant f_u(z)(y)$.

* Par conséquent, pour tout $z \in X$, $f_u(z)$ représente un élément de $\mathcal{I}$ qu'on notera $\overline{f}_u(z)$, définissant ainsi une application $\overline{f}_u$ de X dans $\mathcal{I}$.

* Pour tout $z \in X$: $u(z) \leqslant f_u(z)(0+)$. En effet, $u(z) \leqslant F(o)(z)$; donc pour tout $x > 0$: $u(z) \leqslant \sup\{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} = f_u(z)(x)$ et par suite $u(z) \leqslant \bigwedge_{x > o} f_u(z)(x) = f_u(z)(0+)$.

* Il est évident que $f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-)$ pour tout $z \in X$.

* Pour tout $z \in X$: $f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z)$; En effet, pour tout $x < 1$, on a :

  pour tout $t \in D$ tel que $t < x$: $t < 1$ et $F(t) \subset F(1) = \Omega$, d'où

  $F(t)(z) \leqslant \Omega(z)$ de sorte que $f_u(z)(x) = \sup\{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} \leqslant \Omega(z)$

  d'où $f_u(z)(1-) = \bigvee_{x < 1} f_u(z)(x) \leqslant \Omega(z)$.

* Enfin $\bar{f}_u : X \to \mathcal{I}$ est continue grâce aux deux remarques suivantes :

Remarque 1 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\bar{f}_u^{-1}(A_t) = \bigcup_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)$ (et est donc un ouvert de X).

En effet,

$$\bar{f}_u^{-1}(A_t)(z) = A_t[\bar{f}_u(z)] = f_u(z)(t-) = \bigvee_{x<t} f_u(z)(x) = \bigvee_{x<t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)(z) = [\bigcup_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)](z)$$

Remarque 2 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\bar{f}_u^{-1}(B_t^*) = \bigcap_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}$ (et est donc un fermé de X)

En effet, soit $z \in X$:

posons
$$\alpha = \bar{f}_u^{-1}(B_t^*)(z) = B_t^*[\bar{f}_u(z)] = f_u(z)(t+) = \bigwedge_{x>t} f_u(z)(x) = \bigwedge_{x>t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z)$$
$$\beta = [\bigcap_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}](z) = \bigwedge_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}(z) .$$

Nous allons montrer que, pour tout $\gamma \in I$: $\alpha \geqslant \gamma \leftrightarrow \beta \geqslant \gamma$ (ce qui prouvera bien que $\alpha = \beta$).

Soit $\gamma \in I$:

a) Supposons que $\alpha \geqslant \gamma$:

Alors pour tout $x > t$, $\bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma$

Soit $\ell \in D$ tel que $\ell > t$, on a donc : $\bigvee_{\substack{\ell_1 \in D \\ \ell_1 < \ell}} F(\ell_1)(z) \geqslant \gamma$

or pour tout $\ell_1 \in D$ tel que $\ell_1 < \ell$: $F(\ell_1) \subset F(\ell)$; donc $\bigcup_{\substack{\ell_1 \in D \\ \ell_1 < \ell}} F(\ell_1) \subset F(\ell) \subset \overline{F(\ell)}$,

de sorte que $\overline{F(\ell)}(z) \geqslant \gamma$.

b) Supposons que $\beta \geqslant \gamma$:

Alors pour tout $\ell \in D$ tel que $\ell > t$: $\overline{F(\ell)}(z) \geqslant \gamma$

Soit $x > t$.

Comme D est dense dans $\mathbb{R}^+$, il existe $\ell \in D$ et $\ell_1 \in D$ tels que $t < \ell_1 < \ell < x$.

Puisque $\ell_1 \in D$, $\ell \in D$, $\ell_1 < \ell$: $F(\ell_1) << F(\ell)$, c'est-à-dire $\overline{F(\ell_1)} \subset F(\ell)$.

Il existe donc $\ell \in D, \ell < x$ tel que $F(\ell)(z) \geqslant \overline{F(\ell_1)}(z) \geqslant \gamma$

d'où $\bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma$, et comme ceci a lieu pour tout $x > t$:

$$\bigwedge_{x > t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma .$$

* Preuve de la proposition 6 :

Soit un espace topologique flou normal et D : X.

Soit Ω un ouvert.

Soit L l'ensemble des fermés contenus dans Ω. Puisque l'espace topologique flou est D, $\Omega = \bigcup_{u \in L} u$.

Si $u \in L$, $u << \Omega$. Comme l'espace topologique flou est normal, le lemme 2 permet de construire une famille $(F(t))_{t \in D}$ d'ouverts vérifiant (I), et alors le lemme 3 permet de construire une application $\overline{f_u}$ de X dans $\mathcal{I}$ continue et telle que pour tout $z \in X$: $u(z) \leqslant f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z)$.

Ainsi l'espace topologique flou considéré est-il complètement régulier.

(3) PROPOSITION 7 : *Toute topologie floue obtenue par (5)* $[\bar{\mu} = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \rho^*]$ *à partir d'une* LP-*proximité floue est complètement régulière.*

PREUVE :

Remarque : Si δ est une LP-proximité floue $\mu\delta\nu \Leftrightarrow \mu\delta\bar{\nu}$ ($\bar{\nu}$ étant l'adhérence de ν au sens de la topologie floue associée par (5) à δ).

En effet, $\mu\delta\nu \to \mu\delta\bar{\nu}$ puisque $\nu \subset \bar{\nu}$; inversement, supposons que $\mu\not\delta\nu$: alors il existe $\lambda \in I^X$ telle que $\mu\not\delta\lambda$ et $\overset{*}{\lambda}\not\delta\nu$. Mais $\bar{\nu} \subset \lambda$ (car pour tout $x \in X$: $\bar{\nu}(x) = \bigwedge_{\rho\not\delta\nu} \overset{*}{\rho}(x) \leq \lambda(x)$), de sorte que $\mu\not\delta\bar{\nu}$.

* Utilisons la relation binaire définie sur I^X par $u \triangleleft v \leftrightarrow u\not\delta\overset{*}{v}$, en nous rappelant que $u \triangleleft v \to u \ll v$, et que si $u \triangleleft v$ il existe un ouvert 0 tel que $u \triangleleft 0 \triangleleft v$.

* Soit $L = \{ u \in I^X \ / \ u \triangleleft \Omega \}$. Alors $\Omega = \bigcup_{u \in L} u$ (au cours de la démonstration de la proposition 3, nous avons montré en effet que $\bigcup_{u \triangleleft \Omega} u = \overset{\circ}{\Omega}$).

LEMME : *Dans les hypothèses de la proposition 7, si* Ω *est un ouvert et si* $u \triangleleft \Omega$,

si $D = \{ \frac{p}{2^n} \ / \ \begin{matrix} p \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \}$, *il existe une famille* $(F(t))_{t \in D}$ *telle que :*

$$(II) \quad \left| \begin{array}{l} \textit{chaque } F(t) \textit{ est un ouvert de } X \\ t < s \to F(t) \triangleleft F(s) \\ u \subset F(0) \\ F(1) = \Omega \\ t > 1 \to F(t) = X. \end{array} \right.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de parodier la preuve du lemme 2 de la proposition 6 en remplaçant à chaque fois $\ll$ par $\triangleleft$.

* Soit alors Ω un ouvert de X, et soit $u \in L$. A fortiori, $u \ll \Omega$.
Soit $(F(t))_{t \in D}$ une famille telle que (II). A fortiori, elle vérifie (I).

Alors, le lemme 3 de la proposition 6 montre que la topologie floue considérée est complètement régulière.

(4) * PROPOSITION 8 : *Etant donnée une topologie floue, il y a équivalence entre*

A - elle est uniformisable (c'est-à-dire elle peut être obtenue, au moyen de (6), à partir d'une uniformité floue au sens de Hutton).

B - Elle peut être obtenue, au moyen de (5), à partir d'une LP-proximité floue.

C - Elle est complètement régulière.

En effet,

| La proposition 7 montre que $B \to C$
| La proposition 5 montre que $A \to B$
| Dans [7] , Hutton a prouvé que $C \to A$.

§ 3. Uniformité floue associée à une uniformité.

1. RAPPELS (voir Hutton [7] , et Liu Ying-Ming [8]).

Soit L un treillis complet et totalement distributif.

* Soit $f : L \to L$ une application extensive et croissante. En posant, pour tout $\alpha \in L$: $f^{\cdot}(\alpha) = \bigwedge_{\substack{\Gamma \subset L \\ V\Gamma = \alpha}} [\bigvee_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)]$ on définit une application $f^{\cdot} : L \to L$ inférieure à f, extensive et qui respecte les bornes supérieures : c'est en fait la plus grande application de L dans L à être inférieure à f, extensive, et à respecter les bornes supérieures.

D'autre part, si $\alpha \in L$, il existe une partie de L (notée B_α dans la suite) telle que $VB_\alpha = \alpha$ et telle que, pour toute partie Γ de L telle que $V\Gamma = \alpha$, $\forall \beta \in B_\alpha$, $\exists \gamma \in \Gamma$, $\beta \leqslant \gamma$. Alors $f^{\cdot}(\alpha) = \bigvee_{\beta \in B_\alpha} f(\beta)$.

* Si F et G sont des applications de L dans L extensives et respectant les bornes supérieures ; on notera $F \tilde{\Lambda} G = (F \wedge G)^{\cdot}$. De sorte que $(F \tilde{\Lambda} G)(\alpha) = \bigwedge_{\beta \cup \gamma = \alpha} [F(\beta) \vee G(\gamma)]$.

Si F est une application de L dans L extensive et respectant les bornes supérieures, on note $F^{-1}(\alpha) = \bigwedge_{F(\gamma)^* \leqslant \alpha^*} \gamma$: F^{-1} est extensive et respecte les bornes supérieures.

Rappel (voir Ribeyre : [12]).

Si $\mu \in I^X$ et si $\alpha \in I$, notons $\mu'_\alpha = \{x \in X \ / \ \mu(x) > \alpha\}$ (niveau strict de flou).

on a : $\mu = \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup \mu'_\alpha]$.

2. UNIFORMITE FLOUE ASSOCIEE A UNE UNIFORMITE

* PROPOSITION 9 : *Soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur* X.

Pour chaque $U \in \mathcal{U}$ *, on définit l'application* $D_U : I^X \to I^X$ *par*

$$D_U(\mu) = \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup U(\mu'_\alpha)] \quad .$$

a) Si $A \in 2^X$, $D_U(A) = U(A)$.

b) $(D_{U^{-1}})^{\cdot} \subset (D^{\cdot}_U)^{-1}$; *et* $D^{\bullet}_{U_1 \cap \ldots \cap U_n} \subset D^{\cdot}_{U_1} \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} D^{\cdot}_{U_n}$

c) $\{D^{\cdot}_U \;/\; U \in \mathcal{U}\}$ *est une base d'uniformité floue sur* X *(au sens de Hutton)*

Ainsi, à une uniformité $\mathcal{U}$ *sur* X*, on peut associer une uniformité floue* $\mathcal{D}$ *sur* X *définie par :*

$$\mathcal{D} = \left\{ D \in (I^X)^{(I^X)} \;\middle/\; \begin{array}{l} D \text{ extensive} \\ D \text{ respecte les réunions} \\ \exists U \in \mathcal{U} \;/\; D \supset D^{\cdot}_U \quad . \end{array} \right\} \quad \underline{(9)}$$

(" D *extensive" est d'ailleurs un phénomène, joint à* $\exists U \in \mathcal{U}$, $D \supset D^{\cdot}_U$)

PREUVE. Laissée au lecteur.

* PROPOSITION 10 : *Considérons le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\underline{(9)}"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\underline{(7)}"] \arrow[dr, "\underline{(6)}"'] & \delta \arrow[d, "\underline{(5)}"] \\ & & \tau \end{tikzcd}$$

(commutatif d'après la proposition 3).

Alors τ *est une topologie floue au sens de Lowen.*

PREUVE. Laissée au lecteur.

* LP-proximité floue associée à une proximité : Dans [6] , Katsaras associe à toute proximité Δ sur X une proximité floue δ par

$$\mu\delta\nu \longleftrightarrow \forall A \supset \mu \quad , \quad \forall B \supset \nu : A \,\Delta\, B \qquad \underline{(10)}.$$

Remarques : A fortiori, δ est une LP-proximité floue sur X

$\mu\delta\nu \longleftrightarrow \mu'_o \,\Delta\, \nu'_o$ (proximité - au sens usuel - des supports).

§ 4. Variations floues à partir d'une uniformité floue :

1 - PRELIMINAIRES :

Soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur X.

*a) On peut considérer le cheminement $\mathcal{U} \xrightarrow{(9)} \Delta \xrightarrow{(10)} \delta \xrightarrow{(5)} \tau$ qui, à partir de $\mathcal{U}$, nous conduit à une topologie floue (au sens de Chang) via une proximité floue au sens de Katsaras. Décrivons ce premier itinéraire :

$$A \,\Delta\, B \longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset \ .$$

$$\mu\ \delta \nu \longleftrightarrow \forall A \supset \mu \ , \ \forall B \supset \nu, \ \forall U \in \mathcal{U} \ : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset \longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ : U(\mu'_o) \cap U(\nu'_o) \neq \emptyset \ .$$

$$\bar{\mu}^{\tau} = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \overset{*}{\rho} = \bigcap_{\rho / \exists U \in \mathcal{U} \ , U(\rho_o) \cap U(\mu'_o) = \emptyset} \overset{*}{\rho}$$

*b) On peut aussi considérer
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "(9)"] & \mathcal{D} \arrow[r, "(7)"] \arrow[dr, "(6)"'] & \delta' \arrow[d, "(5)"] \\
& & \tau'
\end{tikzcd}$$
, qui nous emmène de $\mathcal{U}$ à une topologie floue (au sens de Lowen) via une LP-proximité floue, avec :

$$D \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \text{ est une application extensive de } I^X \text{ dans } I^X \text{ qui respecte les réunions} \\ \exists\, U \in \mathcal{U} \ , \ D \supset D^{\cdot}_U \end{array} \right.$$

$$\mu \delta' \nu \longleftrightarrow \forall D \in \mathcal{D} \ : D(\mu) \ q\, D(\nu) \longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ : D^{\cdot}_U(\mu) \ q\ (D^{\cdot}_U(\nu)$$

$$\longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ : [\bigcup_{\lambda \in B_\mu} D_U(\lambda)] \ q\ [\bigcup_{t \in B_\nu} D_U(t)]$$

$$\longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ ; \exists \lambda \in B_\mu \ , \ \exists t \in B_\nu \ :$$

$$D_U(\lambda) \ q\ D_U(t)$$

$$\bar{\mu}^{\tau'} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D(\mu) = \bigcap_{\exists D \in \mathcal{D} \ , D(\rho) \subset D(\mu)^*} \overset{*}{\rho} = \bigcap_{\exists D \in \mathcal{D} \ , D(\rho) \subset \overset{*}{\mu}} \overset{*}{\rho}$$

*c) Un troisième cheminement est $\mathcal{U} \xrightarrow{(2)} T \xrightarrow{(\omega)} \tau''$, où (ω) est l'engendrement au sens de Lowen (cf [5]) , et qui nous conduit à une topologie floue engendrée au sens de Lowen, par l'intermédiaire d'une topologie ordinaire.

DESCRIPTION : $\bar{A}^{T} = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} U(A)$

μ est τ''-fermé $\longleftrightarrow$ $\forall \alpha \in I : \mu_\alpha$ est T-fermé.

*d) Dans [11], nous av ons introduit une notion de proximité floue à valeurs dans I que nous appellerons ici <u>proximité totalement floue</u>.

C'est une application $\hat{\delta} : I^X \times I^X \to I$ (donc une <u>relation floue</u>) telle que :

1. $\hat{\delta}(\mu, \nu) = \hat{\delta}(\nu, \mu)$
2. $\hat{\delta}(\mu \cup \nu, \rho) = \hat{\delta}(\mu, \rho) \vee \hat{\delta}(\nu, \rho)$
3. Si $x \in X$ et si $\alpha \in I$: $\hat{\delta}(x, \alpha) = \alpha$ (x mis pour $\{x\}$)
4. Si $\mu_{\hat{\delta}}$ désigne $x \to \hat{\delta}(x, \mu)$: $\hat{\delta}(x, \mu_{\hat{\delta}}) = \hat{\delta}(x, \mu)$
5. Si $x \in X$, $\hat{\delta}(x, \mu) \geqslant \mu(x)$.

Rappelons ces résultats (prouvés dans [11]) :

(i) $\Delta \xrightarrow{(11)} \hat{\delta} : \hat{\delta}(\mu, \nu) = \vee \{\alpha \in I / \mu_\alpha \, \Delta \, \nu_\alpha\}$ associe à toute proximité une proximité totalement floue (dite engendrée par Δ).

(ii) $\hat{\delta} \xrightarrow{(12)} \lambda$: μ est un λ-fermé $\longleftrightarrow \mu_{\hat{\delta}} = \mu$ associe à toute proximité totalement floue une topologie floue au sens de Lowen.

On a le diagramme commutatif :

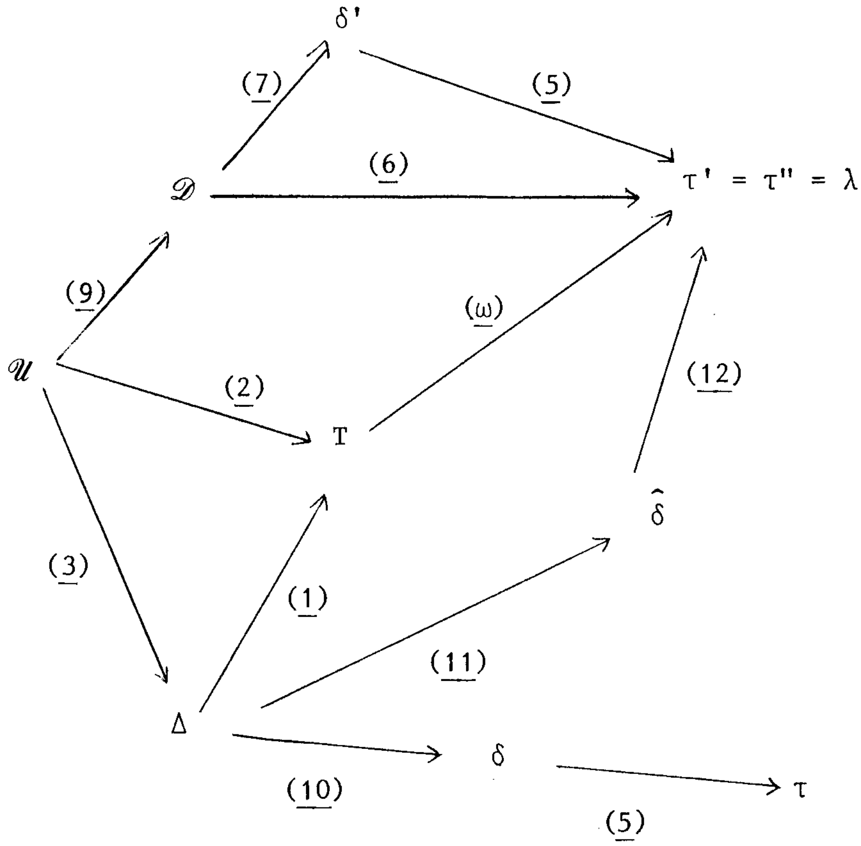
$$\begin{tikzcd} & \hat{\delta} \arrow[dr, "(12)"] & \\ \Delta \arrow[ur, "(11)"] \arrow[dr, "(1)"'] & & \lambda \\ & T \arrow[ur, "(\omega)"'] & \end{tikzcd}$$

De sorte qu'un quatrième chemin est $\mathcal{U} \xrightarrow[(3)]{} \Delta \xrightarrow[(11)]{} \hat{\delta} \xrightarrow[(12)]{} \lambda$ qui conduit de $\mathcal{U}$ à une topologie floue au sens de Lowen qui, d'après (ii), n'est autre que $\tau'' = (\omega) \circ (2)\,(\mathcal{U})$.

(3)* PROPOSITION 11 :

Soit $\mathscr{U}$ une uniformité sur X.

On a le diagramme commutatif



avec ces commentaires :

τ *est une topologie floue au sens de Chang ; ce n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen*

δ *est une proximité floue au sens de Katsaras.*

$\tau' = \tau'' = \lambda$ *est une topologie floue engendrée au sens de Lowen, engendrée par* T, *contenant* τ.

$\mathscr{D}$ *est une uniformité floue au sens de Hutton, engendrée (à notre sens) par* $\mathscr{U}$.

δ' *est une* LP-*proximité floue (à notre sens)*

δ' *n'est jamais une proximité floue au sens de Katsaras (la généralisation était donc bien nécessaire)*

$\hat{\delta}$ est une proximité totalement floue (à notre sens), engendrée (à notre sens) par Δ.

a) $\underline{\mu \in \tau' \rightarrow \forall \alpha \in I : \mu_\alpha \in T}$:

Si $\mu \in \tau'$, $\bigcap_{u \in \mathcal{U}} D_U^{\cdot}(\mu) = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D(\mu) = \mu$ de sorte que pour tout $x \in X$:

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} D_U(\lambda)(x) = \mu(x).$$

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \bigwedge_{\alpha \in I} [\alpha \vee U(\lambda'_\alpha)(x)] = \mu(x)$$

mais $U(\lambda'_\alpha)(x) = 0 \Longleftrightarrow [(z,x) \in U \rightarrow \lambda(z) \leqslant \alpha]$.

d'où $$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \wedge \{\alpha \in I \;/\; (z,x) \in U \rightarrow \lambda(z) \leqslant \alpha\} = \mu(x)$$

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \bigvee_{(z,x) \in U} \lambda(z) = \mu(x)$$

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{(z,x) \in U} \mu(z) = \mu(x).$$

Alors, si pour tout $U \in \mathcal{U}$: $x \in U(\mu_\alpha)$, pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $z \in \mu_\alpha$ tel que $(z,x) \in U$, de sorte que $\mu(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_{(z,x) \in U} \mu(z) \geq \alpha$; d'où $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(\mu_\alpha) = \mu_\alpha$ et μ_α est T-fermée.

b) $\underline{\tau' \subset \tau''}$:

En effet, si $\mu \in \tau'$, d'après ce qui précède : $\forall \alpha \in I$, $\mu_\alpha \in T$ et $\mu \in \omega(T) = \tau''$.

c) $\underline{\tau'' \subset \tau'}$:

*__Lemme__ : *Si μ est τ''-fermée,* $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} D_U(\mu) = \mu$

En effet, soit μ τ''-fermée :

Remarquons d'abord que $\forall \alpha \in I$: μ_α est T-fermée, de sorte que

$\forall \alpha \in I : \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(\mu_\alpha) = \mu_\alpha$ (R)

Alors $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} D_U(\mu) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup U(\mu'_\alpha)] = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$, où

$G_\alpha = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\alpha \cup U(\mu'_\alpha)]$; mais pour tout $\alpha \in I$:

$$G_\alpha = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\alpha \cup U(\bigcup_{\beta > \alpha} \mu_\beta)] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\alpha \cup \bigcup_{\beta > \alpha} U(\mu_\beta) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bigcup_{\beta > \alpha} [\alpha \cup U(\mu_\beta)] = \ldots.$$

(par distributivité totale) =...

$$\ldots = \bigcup_{\substack{F \in I^{\mathcal{U}} \\ \forall U \in \mathcal{U}, F(U) > \alpha}} \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\alpha \cup U(\mu_{F(U)})] = \bigcup_F \{\alpha \cup [\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(\mu_{F(U)})]\} = \text{(d'après}$$

la remarque (R)) =

$$\ldots = \bigcup_F [\alpha \cup \mu_{F(U)}] = \alpha \cup \bigcup_F \mu_{F(U)} \subset \alpha \cup \bigcup_{\beta > \alpha} \mu_\beta = \alpha \cup \mu'_\alpha$$

de sorte que

$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} D_U(\mu) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (\alpha \cup \mu'_\alpha) = \mu$, et on a en fait l'égalité annoncée.

* Alors, si μ est τ''-fermée : $\bar{\mu}^{\tau'} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} D^\circ_U(\mu) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} D_U(\mu) = \mu$, et μ est bien τ'-fermée.

d) $\tau' = \tau'' = \lambda$.

Puisque, comme il est prouvé dans [11], $\tau'' = \lambda$, on a $\tau' = \tau'' = \lambda$.

e) $\tau \dot{\subset} \tau' = \tau'' = \lambda$.

Rappelons que $\bar{\mu}^{\tau} = \bigcap_{\exists U \in \mathcal{U}, \, U(\rho'_o) \cap U(\mu'_o) = \emptyset} \overset{*}{\rho}$

Soit $\rho \in I^X$ telle qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ telle que $U(\rho'_o) \cap U(\mu'_o) = \emptyset$;

alors $D^\cdot_U(\rho) \subset D^\cdot_U(\rho'_o) \subset D_U(\rho'_o) = U(\rho'_o) \subset U(\mu'_o)^* = D_U(\mu'_o)^* \subset D_U(\mu)^* \subset D^\cdot_U(\mu)^*$

donc $\bar{\mu}^{\tau} \supset \bigcap_{\exists D \in \mathcal{D}, D(\rho) \subset D(\mu)^*} \overset{*}{\rho} = \bar{\mu}^{\tau'}$, ce qui prouve que $\tau \subset \tau'$.

f) τ n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen, et $\tau \underset{\neq}{\subset} \tau' = \tau'' = \lambda$:

En effet, une topologie associée (par le procédé (10)) à une proximité floue au sens de Katsaras n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen : en effet, si $0 < \alpha < 1$: $\bar{\alpha}^{\tau} = \bigcap\limits_{\rho \not\delta \alpha} \overset{*}{\rho} = \emptyset^{*} = X$.

g) La LP-proximité floue δ' n'est jamais une simple proximité floue au sens de Katsaras :

Puisque par (10) on lui associe une topologie floue au sens de Lowen (même engendrée au sens de Lowen)

h) Précisons le lien entre τ et $\tau' = \tau'' = \lambda$.

Dans [5] , Lowen introduit l'opérateur d'engendrement ω que nous avons déjà utilisé et qui à une topologie ordinaire associe une topologie floue au sens de Lowen dont les fermés sont les parties floues semi-continues supérieurement. Il introduit aussi l'opérateur i qui associe à toute topologie floue (nous pouvons en fait l'appliquer à toute topologie floue au sens de Chang) une topologie ordinaire : celle ayant pour subbase de fermés les niveaux de flou des fermés de la topologie floue envisagée.

Alors le lien entre τ et τ'' résulte de ce résultat plus général :

*PROPOSITION *Considérons le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[r, "(\omega)"] & \tau'' = \omega(T) \\ \Delta \arrow[ur, "(1)"] \arrow[dr, "(10)"'] & & \\ & \delta \arrow[r, "(5)"'] & \tau \end{tikzcd}$$

Alors $\tau'' = \omega \circ i(\tau)$.

PREUVE. α) $T \subset \tau$:

Soit $A \in T$.

Ou bien $A = \emptyset$, et alors $A \in \tau$, ou bien $A \neq \emptyset$. Alors

$$\bar{A}^{\tau} = \bigcap_{\rho \not\delta A} \overset{*}{\rho} = \bigcap_{\rho_o' \not\delta A_o'} \overset{*}{\rho} = \bigcap_{\rho_o' \not\delta A} \overset{*}{\rho} .$$

Soit $x \in X$:

ou bien $\bar{A}^{\tau}(x) = 0$, et alors $\bar{A}^{\tau}(x) \leqslant A(x)$

ou bien $\bar{A}^{\tau}(x) \neq 0$.

Alors $\bigwedge\limits_{\rho'_o \not\Delta A} \overset{*}{\rho}(x) \neq 0$; a fortiori : $\bigwedge\limits_{\substack{C'_o \not\Delta A \\ C \in 2^X}} \overset{*}{C}(x) \neq 0$, c'est-à-dire

$\bigwedge\limits_{C \not\Delta A} \overset{*}{C}(x) = 1.$

Mais alors $\quad \forall\, C \in 2^X : C \not\Delta A \to C(x) = 0$

$\forall\, C \in 2^X \;: x \in C \to C \Delta A$; en particulier $x \Delta A$

mais puisque $A \in T$: $\bar{A}^{T} = A$ et $x \Delta A \to x \in A$ d'où $\bar{A}^{\tau}(x) \leqslant A(x) = 1$.
De toute façon $\bar{A}^{\tau} \subset A$ et $A \in \tau$.

β) $\underline{T \subset i(\tau)}$:

Soit $A \in T$.

Soit $\alpha \in \,]0,1[$: $A = A_{\alpha}$ et $A \in \tau \to A = A_{\alpha} \in i(\tau)$

γ) $\underline{\tau'' = \omega(T) \subset \omega \circ i(\tau)}$:

L'opérateur ω est évidemment croissant.

δ) $\underline{\tau'' = \omega \circ i(\tau)}$:

Puisque $\tau \subset \tau''$: $\quad \omega \circ i(\tau) \subset \omega \circ i(\tau'') = \tau''$

§ 5. Exemples "extrémêmes de la situation étudiée au § 4.

1. $\mathscr{U} = \{X \times X\}$.

Alors

$A \Delta B \leftrightarrow A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$

$\mu \;\delta\; \nu \leftrightarrow \mu \neq \emptyset$ et $\nu \neq \emptyset$

$\tau = \{\emptyset, X\}$

$\mathscr{D} = \{D/D$ respecte les réunions et $D \supset D_o\}$, où $D_o(\mu) = V\mu = \ldots$

$\ldots \; x \mapsto \bigvee\limits_{x \in X} \mu(x)$

$\mu \delta' \nu \leftrightarrow V\mu + V\nu > 1$

$\hat{\delta}(\mu,\nu) = V\mu) \wedge (V\nu)$

$\tau' = \tau'' = \lambda = \{\alpha\,/\alpha \in I\}$.

2. $\mathcal{U} = \{ U \supset \Delta_X \}$ (où $\Delta_X = \{(x,x) \ / \ x \in X\}$) .

Alors
$A \ \Delta \ B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\mu \ \delta \ \nu \Leftrightarrow \mu \cap \nu \neq \emptyset$

$\tau = 2^X$

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des applications de I^X dans I^X extensives qui respectent les réunions.

$\mu \ \delta' \ \nu \Leftrightarrow \mu \not\subset \overset{*}{\nu}$

$\hat{\delta}(\mu,\nu) = \bigvee(\mu \cap \nu)$

$\tau' = \tau'' = \lambda = I^X$

BIBLIOGRAPHIE. (JMAA signifie : "Journal of mathematical analysis and applications").

[1] BOURBAKI, Topologie générale (Chapitre 1, chapitre 2)

[2] KELLEY J.L., General topology (Van Nostrand Company)

[3] NAIMPALLY S.A. et WARRACK B.D., Proximity spaces (Cambridge University press, 1970).

[4] CHANG C.L., Fuzzy topological spaces, JMAA 24, 182-190 (1968).

[5] LOWEN R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, JMAA 56, n° 3, 621-633 (1976).

[6] KATSARAS A.K., Fuzzy proximity spaces JMAA 68, 100-110 (1979).

[7] HUTTON B., Uniformities on fuzzy topological spaces, JMAA 58, 559-571 (1077).

[8] LIU YING-MING, Inverse operation on union preserving mappings in lattices and its applications to uniform spaces (preprint).

[9] PU PAO-MING et LIU YING-MING, Fuzzy topology I JMAA 76, n° 2, 571-599 (1980).

[10] COULON J. et COULON J.L., A propos des topologies, des uniformités et des proximités floues, (1ère partie, 2ème partie) ; et uniformités et proximités floues ; topologies floues uniformisables, (Busefal).

[11] COULONJ. , COULON J.L. Une notion de proximité floue, (Busefal n° 10, printemps 82, 17-34.)

[12] RIBEYRE S. Niveaux stricts de flou et représentation monotone duale d'une partie floue (séminaire : Mathématique floue de l'Université Claude Bernard, LYON I, 1977-1978).

[13] ZADEH L.A., Fuzzy sets, inform. and control 8, 338-353 (1965).
