

WILLIAM HABRE

**Continuité des caractères des algèbres localement
multiplicativement convexes**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 1A
, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985__1A_A1_0

© Université de Lyon, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONTINUITÉ DES CARACTÈRES DES
ALGÈBRES LOCALEMENT MULTIPLICATIVEMENT CONVEXES**

Par
William HABRE

Le problème de la continuité des caractères des algèbres commutatives localement multiplicativement convexes de Fréchet a été posé par Michael dans [5] et repris par Akkar dans [1]. Nous proposons une solution dans le cas des algèbres de fonctions, ce qui conduit à des conséquences importantes pour les algèbres qui se ramènent à celles-ci.

§ 1. ALGÈBRES DE FONCTIONS.

1.1. Préliminaires et notations :

On désigne par T un espace complètement régulier séparé, par $C(T)$ l'algèbre des fonctions continues et à valeurs réelles sur T et par $C^{\infty}(T)$ la sous-algèbre de $C(T)$ formée des fonctions continues et bornées sur T . On note βT le compactifié de Stone-Čech de T et νT son replet de Hewitt ; T est dit replet si $T = \nu T$. Soient \mathcal{P} une famille des parties de T , filtrante croissante et recouvrant T . Pour tous $P \in \mathcal{P}$ et $f \in C(T)$, on note $\|f\|_P = \sup\{|f(t)| ; t \in P\}$. Une partie A de T est dite bornée si $\|f\|_A < +\infty$. On note \mathcal{B} la famille des parties bornées de T , \mathcal{K} la famille des compacts de T et $T'' = \bigcup \{\bar{A}^{\nu}, A \in \mathcal{B}\}$.

Soit $C^{\mathcal{P}}(T) = \{f \in C(T) ; \|f\|_P < +\infty \forall P \in \mathcal{P}\}$. Evidemment $C^{\mathcal{P}}(T)$ est une sous-algèbre de $C(T)$, contenant $C^{\infty}(T)$. On note, $t_{\mathcal{P}}$ la topologie sur $C^{\mathcal{P}}(T)$ définie par le système des semi-normes $\{\|\cdot\|_P ; P \in \mathcal{P}\}$, $\nu_{\mathcal{P}} T = \bigcup \{\bar{P}^{\beta} ; P \in \mathcal{P}\}$ et $\hat{T}^{\mathcal{P}}$ le complété de T pour la structure uniforme $u_{\mathcal{P}}$ sur T définie

par $C^{\mathcal{P}}(T)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires multiplicatives et non nulles de $C^{\mathcal{P}}(T)$ dans \mathbb{R} , muni de la topologie définie par $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$.

PROPOSITION 1.2.

L'espace $\hat{T}^{\mathcal{P}}$, muni de la topologie induite par $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, est replet.

PREUVE.

C'est une conséquence immédiate du lemme bien connu suivant:

LEMME 1.3.

Un espace complètement régulier séparé est replet si et seulement s'il est homéomorphe à un sous-espace fermé d'un produit cartésien.

PROPOSITION 1.4.

Le sous-espace $v_{\mathcal{P}}T$ de βT est l'ensemble des caractères continus de $C^{\mathcal{P}}(T)$, pour la topologie $t_{\mathcal{P}}$.

PREUVE.

Si u est un caractère continue de $C^{\mathcal{P}}(T)$, alors il existe $P_0 \in \mathcal{P}$ tel que $|u(f)| \leq \|f\|_{P_0}$, $\forall f \in C^{\mathcal{P}}(T)$. Il en résulte que $u_0 \in \bar{P}_0^{\beta}$.

La réciproque est triviale.

Pour tout $f \in C^{\mathcal{P}}(T)$, on désigne par \bar{f} l'application de $v_{\mathcal{P}}T$ dans \mathbb{R} définie par $\bar{f}(u) = u(f)$ et on note $t_{\bar{\mathcal{P}}}$, la topologie sur $C(v_{\mathcal{P}}T)$ définie par le système de semi-normes $\{\|\cdot\|_{\bar{P}}; P \in \mathcal{P}\}$. La proposition suivante est immédiate [4]:

PROPOSITION 1.5.

L'application $f \longrightarrow \bar{f}$ de $C^{\mathcal{P}}(T)$ dans $C(v_{\mathcal{P}}T)$ et

l'application de restriction de $C(\cup_{\mathcal{P}} T)$ dans $C^{\mathcal{P}}(T)$ sont deux isomorphismes algébriques et topologiques réciproques l'une de l'autre.

THEOREME 1.6.

Pour que tout caractère de l'algèbre $C^{\mathcal{P}}(T)$ soit $t_{\mathcal{P}}$ -continu, il faut et il suffit que $\cup_{\mathcal{P}} T$ soit replet.

PREUVE.

C.N. Si tout caractère de $C^{\mathcal{P}}(T)$ est $t_{\mathcal{P}}$ -continu, alors $\hat{T}^{\mathcal{P}} \cong \cup_{\mathcal{P}} T$ et $\cup_{\mathcal{P}} T$ est replet d'après la proposition (1.2) précédente.

C.S. Si $\cup_{\mathcal{P}} T$ est replet, puisque les algèbres $C(\hat{T}^{\mathcal{P}})$ et $C(\cup_{\mathcal{P}} T)$ sont toutes les deux algèbriquement isomorphes à $C^{\mathcal{P}}(T)$ et puisque $\hat{T}^{\mathcal{P}}$ est replet, alors on a $\hat{T}^{\mathcal{P}} = \cup_{\mathcal{P}} T$. Ainsi tout caractère de $C^{\mathcal{P}}(T)$ est continu.

Dans [4] on a considéré les familles \mathcal{P} du type $\mathcal{P} = \{T_n ; n \in \mathbb{N}\}$ où $(T_n)_n$ est une suite croissante de fermés et on s'est posé la question de savoir si tout caractère de $C^{\mathcal{P}}(T)$ est $t_{\mathcal{P}}$ -continu. La réponse est donnée dans le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.7.

Si $\mathcal{P} = \{T_n ; n \in \mathbb{N}\}$, alors tout caractère de $C^{\mathcal{P}}(T)$ est $t_{\mathcal{P}}$ -continu.

PREUVE.

L'espace $\cup_{\mathcal{P}} T = \cup_n \bar{T}_n^{\beta}$ est une réunion dénombrable de compacts, il est par suite replet d'après [3].

COROLLAIRE 1.8.

Si $\mathcal{P} = \{T_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est telle que, pour tout n , T_n soit borné, alors $C^{\mathcal{P}}(T) = C(T)$, $\cup_{\mathcal{P}} T = \cup T$ et tout caractère de $C(T)$ est $t_{\mathcal{P}}$ -continu.

PREUVE.

On a, pour tout n , $\bar{T}_n^\beta = \bar{T}_n^\cup \subseteq \cup T$. Par suite, on a $\cup_{\mathcal{P}} T \subset \cup T$. Mais comme $\cup_{\mathcal{P}} T$ est replet et contient T , il en résulte que $\cup_{\mathcal{P}} T = \cup T$ et tout caractère de $C(T)$ est $t_{\mathcal{P}}$ -continu.

COROLLAIRE 1.9.

- 1° Pour que tout caractère de $C(T)$ soit $t_{\mathcal{X}}$ -continu, il faut et il suffit que T soit replet.
- 2° Pour que tout caractère de $C(T)$ soit $t_{\mathcal{B}}$ -continu, il faut et il suffit que $T'' = \cup T$ (T'' voir [3]).

On désigne maintenant par τ une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe séparée sur $C(T)$ (en abrégé l. m.c.h) (voir [2]), définie par le système de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$, pour laquelle tout point $t \in T$ définit un caractère continu sur $C(T)$. On note $\cup_{\tau} T$ les caractères τ -continus de $C(T)$. On a d'après [2] (Th. 4.10.7).

$$\cup_{\tau} T = \bigcup_{i \in I} \bar{T}_i^{\beta} \quad \text{où} \quad \bar{T}_i^{\beta} = \cup T \cap \overline{\{f ; p_i(f) \leq 1\}}^0$$

est un compact et $\overline{\{f ; p_i(f) \leq 1\}}^0$ est le polaire de $\overline{\{f ; p_i(f) \leq 1\}}$ dans $C(T)'$.

THEOREME 1.10.

Pour que tout caractère de $C(T)$ soit τ -continu, il faut et il suffit que $\cup_{\tau} T$ soit replet.

PREUVE.

Ceci découle immédiatement du fait que $\cup T$ est le plus petit sous-espace replet de βT contenant T .

COROLLAIRE 1.11.

Si τ est une topologie métrisable sur $C(T)$, pour laquelle tout point de T est continu, alors tout caractère de $C(T)$ est τ -continu.

Le théorème suivant généralise le théorème 3 de [7].

THEOREME 1.12.

Si τ est une topologie d'algèbre (l.m.c.h.) métrisable complète sur $C(T)$, pour laquelle les points de T sont des caractères continus, alors νT est un espace héli-compact k -espace et τ est la topologie de la convergence compacte sur νT .

PREUVE.

En effet, $C(\nu T)$ muni de la topologie τ est une algèbre de Fréchet et puisque $\nu_{\tau} T = \nu T$, alors tout point de νT définit un caractère continu. Il résulte d'après le théorème 3 de [7] que νT est héli-compact k -espace et τ est la topologie de la convergence compacte sur νT .

§ 2. ALGEBRES ABSTRAITES.

Une algèbre localement multiplicativement convexe séparée (l.m.c.h.), A , est une algèbre topologique dont la topologie est définie par un système de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, $p_i(x \cdot y) \leq p_i(x) \cdot p_i(y)$. On dit que A est pseudo-normée si, pour tout i et pour tout $x \in A$, on a :

$$p_i(x^2) = p_i(x)^2.$$

Une involution sur A est une application $x \longrightarrow x^*$ de A dans A telle que

- (i) $x^{**} = x,$
- (ii) $(x + y)^* = x^* + y^*,$
- (iii) $(\beta x)^* = \overline{\beta}x^*$ et
- (iv) $(xy)^* = x^*y^*$

Une algèbre (l.m.c.h), muni d'une involution est dite $*$ -algèbre si, pour tout $i \in I$ et tout $x \in A$, on a

$$p_i(x \cdot x^*) = p_i(x)^2.$$

L'algèbre A est supposée commutative et unitaire.

Il est bien connu ([2] th. 4.12.10) qu'une $*$ -algèbre est pseudo-normée.

On appelle caractère de A toute forme linéaire multiplicative de A dans \mathbb{C} non nulle. On note $\phi(A)$ les caractères de A et $\phi^C(A)$ ceux qui sont continus. On dit que A est fortement semi-simple si $\phi^C(A)$ sépare A , c'est à dire

$$a \in A \text{ et } u(a) = 0, \forall u \in \phi^C(A) \implies a = 0.$$

Si on note $I = \{a \in A ; u(a) = 0, \forall u \in \phi^C(A)\}$, alors I est un idéal fermé et A/I est une algèbre (l.m.c.h), fortement semi-simple.

THEOREME 2.1.

Soit A une algèbre (l.m.c.h) complète, alors

$$\Phi(A) = \Phi(A/I) \text{ et } \phi^C(A) = \phi^C(A/I).$$

PREUVE.

L'application canonique θ de A sur A/I définit une application $\tilde{\theta} : \phi(A/I) \xrightarrow{+} \phi(A)$, par $\tilde{\theta}(\tilde{u}) = \tilde{u} \circ \theta$

Evidemment $\tilde{\theta}$ est injective. Montrons que $\tilde{\theta}$ est surjective.

Soit, pour cela, $u \in \phi(A)$. Posons $\tilde{u} : A/I \longrightarrow \mathbb{C}$, par

$\tilde{u}(\theta(x)) = u(x)$. Ceci est bien défini car, si $\theta(x) = \theta(y)$, alors $x - y \in I$, or A étant complète, donc $I = \text{Rad } A$ (radical de A) donc $u(x) = u(y)$. Ainsi on obtient que $\tilde{\theta}(\Phi(A/I)) = \Phi(A)$ et puisque θ est continue, alors $\tilde{\theta}(\Phi^C(A/I)) = \Phi^C(A)$.

On suppose par la suite que A est semi-simple complète ce qui ne change rien pour l'étude des caractères continus. L'espace $\Phi(A)$ est muni de la topologie induite par $\sigma(A^*, A)$ et on note ψ la transformation de Gelfand de A dans $C(\Phi^C(A))$, ψ est définie par $\psi(a) = \hat{a}$ où $\hat{a}(u) = u(a)$.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ le système de semi-normes définissant la topologie de A . On note $\overline{\{x, p_i(x) \leq 1\}}^0$ le polaire de $\{x, p_i(x) \leq 1\}$ dans A' et soit $K_i = \Phi^C(A) \cap \overline{\{x; p_i(x) \leq 1\}}^0$. D'après le théorème (4.10.7) de [2], on a K_i compact et $\Phi^C(A) = \bigcup_{i \in I} K_i$, sur $C(\Phi^C(A))$ on note t_{wc} la topologie définie par le système de semi-normes $\{\|\cdot\|_{K_i}, i \in I\}$.

THEOREME 2.3.

- Si A est une algèbre l.m.c.h, complète, alors on a
- 1° A et $C(\Phi(A))$ ont même espace de caractères,
 - 2° A et $C(\Phi^C(A))$ ont même espace de caractères continus.

PREUVE.

- 1° Puisque $\Phi(A)$ est replet, comme étant fermé d'un produit \mathbb{R}^I , tout caractère de $C(\Phi(A))$ est un élément de $\Phi(A)$.
- 2° La famille des compacts $(K_i)_{i \in I}$ recouvre $\Phi^C(A)$ et le résultat découle du corollaire (1.9).

Une Q -algèbre est une algèbre (l.m.c.h), dont l'ensemble des éléments inversibles est ouvert.

COROLLAIRE 2.4.

Si l'algèbre A est un \mathbb{Q} -algèbre complète, alors tout caractère est continu.

PREUVE.

En effet, dans ce cas, $\Phi^C(A)$ est compact, donc on a l'égalité $\Phi^C(A) = \Phi(A)$.

Le théorème suivant généralise le corollaire 5.6. de [6].

THEOREME 2.5.

Si A est une \ast -algèbre, alors sont équivalentes :

- 1° tout caractère de A est continu,
- 2° $\Phi^C(A)$ est replet.

PREUVE.

Dans ce cas, ψ est un isomorphisme algébrique de A sur $C(\Phi^C(A))$. Or l'application $f \longmapsto f|_{\Phi^C(A)}$ de $C(\Phi(A))$ dans $C(\Phi^C(A))$ permet d'identifier $C(\Phi(A))$ à une sous-algèbre de $C(\Phi^C(A))$. Comme $\psi(A) \subseteq C(\Phi(A)) \subseteq C(\Phi^C(A))$, on aura $C(\Phi(A)) = C(\Phi^C(A))$. Il en résulte que $\Phi(A) = \Phi^C(A)$ si $\Phi^C(A)$ est replet.

L'implication $1^\circ \implies 2^\circ$ est évidente.

QUESTION 2.6.

A-t-on toujours $\Phi(A) = \cup \Phi^C(A)$, pour les algèbres complètes semi-simples?

COROLLAIRE 2.7.

Si A est une \ast -algèbre complète et métrisable, alors tout caractère de A est continu.

PREUVE.

En effet dans ce cas $\phi^C(A)$ est une union dénombrable de compacts, donc, il est replet et $\phi(A) = \phi^C(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **AKKAR, M.** : Seminaire Choquet (Initiation à l'analyse 1974 - 75, n° 21, 12p.
- [2] **BECHENSTEIN, E, NARICI L., et SUFFEL, C.** : Topological algebras - Mathematics studies North-Holland (1977).
- [3] **BUCHWALTER, H.** : Fonctions continues et mesures sur un espace complètement régulier. Summer school on TVS. Lectures Notes in Mathematics 331 p.183-202. Springer-Verlag, 1973.
- [4] **HABRE W. et NOUREDDINE K.** : Sous-Algèbres localement convexes de $C(T)$. C.R. Acad. Sc. Paris t.280. (30 Juin 1975).
- [5] **MICHAEL, E.A.** : Locally multiplicatively convex topological algebras. (Memories of the American Mathematical society 11. 1952).
- [6] **MORRIS, P.D. et WULBERT, D.E.** : Function representation of topological algebras. Pacific J. Math. 22, pp. 323-337 (1967).
- [7] **WARNER, S.** : The topology of compact convergence on continuous function spaces. Duke Math. J. 25 (1958) 265-282.

**W. HABRE
UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES II
MANSOURIEH - EL METN.**