MUSTAPHA RACHIDI

Transformation de Mellin, et algèbres de Mellin-Lie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 4A
, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___4A_1_0>

TRANSFORMATION DE MELLIN , ET ALGEBRES DE MELLIN -LIE

par Mustapha Rachidi

O - Introduction.

L'objet de ce travail consiste à exploiter la transformée de Mellin formelle, introduite par B. Frenkel et V.G. Kac [1] afin de mettre en évidence de nouvelles relations de commutation. En particulier, on récupère ainsi de façon purement algébrique des résultats de [1] établis par voies analytiques, puis ces résultats sont généralisées, tout d'abord pour la superposition d'états différents de particules indiscernables, puis, plus généralement, pour la superposition d'états différents de particules distinctes. Ceci fait apparaître une famille de fonctions de partitions qui permet de concevoir simultanément la statistique d'une particule et de son anti-particule.

En fin de compte, on établit que les algèbres de Mellin-Lie ainsi mises en évidence ont des filtrations ayant des propriétés analogues à celles des algèbres de Lie des opérateurs différentiels linéaires étudiés dans [6] et [4].

I - Transformée de Mellin et espaces de Mellin.

1.1. Soit $\underline{\mathfrak{g}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie. Considérons

$$\underline{\mathfrak{G}} = \underline{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}\{t,t^{-1}\} .$$

L'espace des séries formelles à coefficients dans $\underline{\mathfrak{g}}$. Posons

$$\underline{\mathfrak{G}}_+ = \{ \sum_n g_n \otimes t^n \ ; \ g_n \in \underline{\mathfrak{g}} \quad \text{où} \quad g_n = 0 \quad \forall n < n_o \ , \ ,_o \in \mathbb{N} \}$$

$$\underline{\mathfrak{G}}_- = \{ \sum_n g_n \otimes t^n \ ; \ g_m \in \underline{\mathfrak{g}} \quad \text{où} \quad g_m = 0 \quad \forall m > m_o \ , \ m_o \in \mathbb{N} \}$$

Plus précisément $\underline{\mathfrak{G}}_+$ (resp. $\underline{\mathfrak{G}}_-$) est l'espace des séries formelles limitées à gauche (resp. à droite) à coefficients dans $\underline{\mathfrak{G}}$. Soient x et y dans $\underline{\mathfrak{G}}_+$ (resp. $\underline{\mathfrak{G}}_-$) i.e.

$x = \sum_{n \geqslant n_o} g_n \otimes t^n$ et $y = \sum_{m \geqslant m_o} g'_m \otimes t^m$ (resp. $x = \sum_{n \leqslant n_o} g_n \otimes t^n$ et $y = \sum_{m \leqslant m_o} g'_m \otimes t^m$.

On définit alors, sans ambiguité un crochet de Lie sur $\underline{\mathfrak{G}}_+$ (resp. $\underline{\mathfrak{G}}_-$) par :

$$[x,y] = \sum_{\substack{n \geqslant n_o \\ m \geqslant m_o}} [g_n \ , \ g'_m] \otimes t^{n+m} = \sum_{s \geqslant m_o + n_o} g''_s \otimes t^s \qquad (1).$$

(resp. $[x,y] = \sum_{s \leqslant m_o + n_o} g''_s \otimes t^s$).

1.2. Soient $x \in \underline{\mathfrak{g}}$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle transformée de Mellin de x, la série formelle en z définie par

$$\hat{x}\ (Z) = \sum_{k \in Z} Z^{-k} t^k \otimes x. \qquad (2).$$

Pour Z fixée dans $\mathbb{C}$, considérons l'ensemble

$$M_Z(\ \underline{\mathfrak{G}}\ ) = \{ \ \hat{x}(Z) \ , \ x \in \underline{\mathfrak{g}} \ \}.$$

Remarquons que, si l'on pose $g_k = Z^{-k}x$, on a

$$\hat{x}(Z) = \sum_k g_k \otimes t^k$$

est un élément de $\underline{\mathfrak{G}}$. Et il est alors immédiat que $M_Z(\underline{\mathfrak{G}})$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\underline{\mathfrak{G}}$, et plus précisément :

<u>PROPOSITION 1</u> : *L'espace vectoriel* $M_Z(\underline{\mathfrak{G}})$ *est de dimension finie et isomorphe à l'espace vectoriel* $\underline{\mathfrak{G}}_o$ *sous-jaçant à* $\underline{\mathfrak{G}}$.

<u>PREUVE</u> : Soit

$$\begin{aligned} \hat{}: \underline{\mathfrak{G}} &\longrightarrow M_Z(\underline{\mathfrak{G}}) \\ x &\longrightarrow \hat{x}(Z) \end{aligned}$$

Cette application est linéaire, et surjective par construction

$$\text{soit } \hat{x}(Z) = 0 \iff \sum_k Z^{-k} t^k \otimes x = 0$$

$$\iff t^k \otimes x = 0 \quad \forall k \in Z \quad \text{car} \quad Z \neq 0$$

$$\iff x = 0 \quad .$$

Donc ^est injective. Donc $\underline{\mathfrak{G}}_O \simeq M_Z(\underline{\mathfrak{G}})$.

Etant donné $x \in \underline{\mathfrak{G}}$, considérons la décomposition suivante de $\hat{x}(Z)$:

$$\hat{x}(Z) = \hat{x}^+(Z) + \hat{x}^-(Z), \tag{3}$$

$$\text{où} \quad \hat{x}^+(Z) = \sum_{k \geqslant o} Z^{-k}(t^k \otimes x) \qquad \hat{x}^-(Z) = \sum_{k < o} Z^{-k} t^k \otimes x \tag{4}$$

Et considérons

$$M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \{\hat{x}^+(Z),\ x \in \underline{\mathfrak{g}}\}$$
$$M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}}) = \{\hat{x}^-(Z),\ x \in \underline{\mathfrak{g}}\}$$

On appellera $\hat{x}^+(Z)$ (resp. $\hat{x}^-(Z)$) la transformée de Mellin de type positif (resp. négatif). Et $M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$) l'espace de Mellin de type positif (resp. négatif) de x.

Considérons les deux applications suivantes :

$p_1 : M_Z(\underline{\mathfrak{G}}) \longrightarrow M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ où $p_1(\hat{x}(Z)) = \hat{x}^+(Z)$,

$p_2 : M_Z(\underline{\mathfrak{G}}) \longrightarrow M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$ où $p_2(\hat{x}(Z)) = \hat{x}^-(Z)$.

Elles sont linéaires, surjectives et inversibles, en effet :

$$p_1^{-1}(\hat{x}^+(Z)) = \hat{x}^+(Z) + \hat{x}^-(Z)$$

$$p_2^{-2}(\hat{x}^-(Z)) = \hat{x}^+(Z) + \hat{x}^-(Z) \; .$$

On vérifie sans peine que :

$$p_1 \circ p_1^{-1} = \mathbb{1}_{M_Z(\underline{\mathfrak{G}})} \quad \text{et} \quad p_1^{-1} \circ p_1 = \mathbb{1}_{M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})} \quad ,$$

$$p_2 \circ p_2^{-1} = \mathbb{1}_{M_Z(\underline{\mathfrak{G}})} \quad \text{et} \quad p_2^{-1} \circ p_2 = \mathbb{1}_{M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})} \quad .$$

et grâce aux propriétés de p_1 et p_2, et à la proposition 1, on établit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathfrak{G}}_o \arrow[r, leftrightarrow, "\hat{}", "\simeq"'] & M_Z(\underline{\mathfrak{G}}) \arrow[r, leftrightarrow, "p_1", "\simeq"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\simeq", "p_2"'] & M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}}) \\
 & & M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})
\end{tikzcd}$$

1.3. ETUDE DE QUELQUES RELATIONS DE COMMUTATION ENTRE ELEMENTS DE $M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$) .

Soit $\hat{x}^+(Z) \in M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $\hat{x}^-(Z) \in M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$). On a :

$$\hat{x}^+(Z) = \sum_{k \geq o} Z^{-k} t^k \otimes x = \sum_{k \geq o} t^k \otimes (Z^{-k} x)$$

$$(\text{resp. } \hat{x}^-(Z) = \sum_{k<o} Z^{-k}\, t^k \otimes x = \sum_{k<o} t^k \otimes (Z^{-k} x)).$$

Posons : $g_k = Z^{-k} x.$

Ainsi :

$$\hat{x}^+(Z) = \sum_{k\geqslant o} t^k \otimes g_k \qquad (\text{resp. } \hat{x}^-(Z) = \sum_{k<o} t^k \otimes g_k)$$

est un élément de $\underline{\mathfrak{G}}_+$ (resp. $\underline{\mathfrak{G}}_-$). Considérons alors, les injections canoniques, définies pour z fixé,

$$\tilde{z}_+ : M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}}) \hookrightarrow \underline{\mathfrak{G}}_+ \quad \text{et} \quad \tilde{z}_- : M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}}) \hookrightarrow \underline{\mathfrak{G}}_- .$$

Par transport de structure, on a alors des relations de commutation entre éléments de $M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$). Désignons par $M^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $M^-(\underline{\mathfrak{G}})$) l'espace des séries formelles provenant de $M_Z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ (resp. $M_Z^-(\underline{\mathfrak{G}})$), et calculons les crochets de Lie ainsi obtenus lorsque Z varie.

Soient x, y $\in \underline{\mathfrak{G}}$; on a

$$\begin{aligned}
[\hat{x}+(Z),\hat{y}+(Z)] &= \sum_{k\geqslant o}\sum_{j\geqslant o} Z^{-(k+j)}\, t^{(k+j)} \otimes [x,y] \\
&= \sum_{s=o}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{j+k=s \\ j\geqslant o,k\geqslant o}} 1\Big) Z^{-s}(t^s \otimes [x,y]) \\
&= \sum (s+1)\, Z^{-s}\, (t^s \otimes [x,y]) \\
&= (- Z \frac{d}{dZ} + 1)\ \widehat{[x,y]}^+(Z) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^-(Z),\hat{y}^-(Z)] &= \sum_{\substack{k\geqslant 1 \\ j\geqslant 1}} Z^{(k+j)}\, t^{-(k+j)} \otimes [x,y] \\
&= \sum_{s\geqslant 2} \Big(\sum_{\substack{j+k=s \\ j\geqslant 1,k\geqslant 1}} 1\Big) Z^s\, (t^{-s} \otimes [x,y]) \\
&= \sum_{s\geqslant 2} s\, Z^s\, (t^{-s} \otimes [x,y]) \\
&= (Z \frac{d}{dZ} - 1)\ \widehat{[x,y]}^-(Z).
\end{aligned}$$

D'où

PROPOSITION 2 : *Pour* $x,y \in \underline{\mathfrak{G}}$, *on a les relations de commutations suivantes :*

$$\begin{aligned} &i)\ [\hat{x}^{+}(z), \hat{y}^{+}(z)] = (-z\frac{d}{dz}+1)\ \widehat{[x,y]}^{+}(z)\ , \\ &ii)\ [\hat{x}^{-}(z), \hat{y}^{-}(z)] = (z\frac{d}{dz}-1)\ \widehat{[x,y]}^{-}(z). \end{aligned} \qquad (5)$$

REMARQUE : On peut interpréter géométriquement $M^{+}(\underline{\mathfrak{G}})$ et $M^{-}(\underline{\mathfrak{G}})$ comme des fibrés au-dessus de $\mathbb{C}^{*}$. Et physiquement ces fibrés correspondent à une particule et à son anti-particule.

PROPOSITION 3 : *Soient* $x \in \underline{\mathfrak{G}}$, $k \in Z$ *et* $\hat{y}(z) \in M_{z}(\underline{\mathfrak{G}})$. *Alors*

$$[t^{k} \otimes x, \hat{y}(z)] = z^{k}\widehat{[x,y]}(z). \qquad (6).$$

PREUVE : $$[t^{k} \otimes x\ ,\ \hat{y}(z)] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j}\ [t^{k} \otimes x\ ,\ t^{j} \otimes y] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j}\ t^{(k+j)} \otimes [x,y]$$
$$= z^{k} \sum_{s \in \mathbb{Z}} z^{-s}\ t^{s} \otimes [x,y] = z^{k}\widehat{[x,y]}(z).$$

COROLLAIRE 1 : *Soit* α *dans* Φ, *système de racines de* $\underline{\mathfrak{G}}$, e_{α} *un élément de l'espace poids* $\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}$, *et* h *la C.S.A.* $\underline{\mathfrak{h}}$ *de* $\underline{\mathfrak{G}}$. *Alors*

$$[t^{k} \otimes h\ ,\ \hat{e}_{\alpha}(z)] = \alpha(h)z^{k}\ \hat{e}_{\alpha}(z). \qquad (7)$$

COROLLAIRE 2 : *Supposons que* $\underline{\mathfrak{G}}$ *est une algèbre de Lie simple. Soit* $\hat{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t,t^{-1}]$ *l'algèbre de Kaĉ-Moody réduite. Alors :*

$$[\ \hat{\underline{\mathfrak{G}}}\ ,\ M_{z}(\underline{\mathfrak{G}})] \subseteq M_{z}(\underline{\mathfrak{G}})$$

i.e. $M_{z}(\underline{\mathfrak{G}})$ *est un* $ad(\hat{\underline{\mathfrak{G}}})$*-module.*

Notons que les expressions (6) et (7) corrigent l'erreur de la première expression de la proposition 1.4 dans [1]

REMARQUE 1 : Les relations (5) seront d'une extrême importance dans toute la suite de ce travail.

1.4. LIEN AVEC LES SYSTEMES DE RACINES

Soient $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie et Φ un système de racines de $\underline{\mathfrak{G}}$. D'après le lemme 1, les propriétés des systèmes de racines et la décomposition d'une algèbre de Lie simple de dimension finie en espaces poids $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$

$$\underline{\mathfrak{G}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$$

où $\underline{\mathfrak{h}}$ est la C.S.A. de $\underline{\mathfrak{G}}$, on a les relations suivantes :

PROPOSITION 4 : *soient* $\alpha, \beta \in \Phi$, $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$ *et* $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, *on a :*

i)
$$[\hat{e}^+_\alpha(z), \hat{e}^+_\beta(z)] = \begin{cases} n_{\alpha\beta}(-z\frac{d}{dz}+1)\,\hat{e}^+_{\alpha+\beta}(z) & si\ \alpha+\beta \in \Phi,\ \text{où } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}, \\ (-z\frac{d}{dz}+1)\,\hat{h}_\alpha(z) & si\ \alpha+\beta = 0 \text{ où } h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \\ 0 & si\ \alpha+\beta \notin \emptyset, \end{cases}$$

ii)
$$[\hat{e}^-_\alpha(z),\ \hat{e}^-_\beta(z)] = \begin{cases} n_{\alpha\beta}(+z\frac{d}{dz}-1)\,\hat{e}^-_{\alpha+\beta}(z) & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi,\ \text{où } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z} \\ (z\frac{d}{dz}-1)\,\hat{h}^-_\alpha(z) & \text{si } \alpha+\beta = 0,\ \text{où } h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \\ 0 & \text{si } \alpha+\beta \in \emptyset\ \Phi \end{cases}$$

PROPOSITION 5 :

i) Soient $h \in \underline{\mathfrak{h}}$, α *et* $\beta \in \Phi$, $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, *et* $k \in \mathbb{N}$. *Alors :*

$$[\,[t^k \otimes h,\ \hat{e}^+_\alpha(z)],\ \hat{e}^+_\beta(z)] = -\alpha(h)z^k(z\frac{d}{dk}+k-1)\ \widehat{[e_\alpha, e_\beta]}^+(z)$$

ii) Soient $h \in \underline{\mathfrak{h}}$, α *et* $\beta \in \Phi$, $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, *et* $k \in \mathbb{Z}$. *Alors :*

$$[\,[t^k \otimes h,\ \hat{e}^+_\alpha(z)]\ \ddot{e}^+_\beta(z)\,] = -\alpha(h)z^k(z\frac{d}{dz}+k-1)\widehat{[e_\alpha, e_\beta]}^+(z)$$
$$-\,k\,\alpha(h)\ Z^k \sum_{s=1}^{-k} z^s\ t^{-s} \otimes [e_\alpha, e_\beta]\ .$$

COROLLAIRE : *Soient* α *et* $\beta \in \Phi$, $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$ *et* $h \in \underline{\mathfrak{h}}$. *Alors*

i) $ad(t^k \otimes h)\ \hat{e}^+_\alpha(z), \hat{e}^+_\beta(z)] = -(\alpha(h)+\beta(h))Z^k(Z\frac{d}{dz}+k-1)\widehat{[e_\alpha, e_\beta]}^+(z)$ *si* $k \in \mathbb{N}$

ii) $ad(t^k \otimes h)[\hat{e}^+_\alpha(z), \hat{e}^+_\beta(z)] = -(\alpha(h)+\beta(h))z^k\ (z\frac{d}{dz}+k-1)\widehat{[e_\alpha, e_\beta]}^+(z) +$

$$+\,k\sum z^s(t^{-s}\ 0\ [e_\alpha, e_\beta])\quad \text{si } k \in \mathbb{Z}.$$

Notons que la démonstration des résultats précédents repose sur des procédés techniques utilisant les relations (5) du lemme et les propriétés des systèmes de racines [5].

II - Transformation de Mellin et relations de commutation à deux variables complexes.

1.1. RAPPELS ELEMENTAIRES.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non-nuls et $s \in \mathbb{N}$. On a les relations immédiates suivantes :

$$\sum_{\substack{k+j=s \\ j\geq o, k\geq o}} z_1^{-k} z_2^{-j} = \frac{z_2^{-s} z_1 - z_2 z_1^{-s}}{z_1 - z_2} \qquad (8\text{-i}) ,$$

$$\sum_{\substack{k+j=s \\ k\geq 1, j\geq 1}} z_1^{k} z_2^{j} = \frac{z_1^{q+1} - z_2^{q+1}}{z_1 - z_2} - z_1^{q} \left(1 + \frac{z_2}{z_1} \right) ; \qquad (8\text{-ii})$$

$$\sum_{\substack{j+\ell=s \\ o\leq j\leq k-1 \\ \ell\geq o}} z_1^{-j} z_2^{-\ell} = z_2^{-s} \; g_k(z_1,z_2) , \qquad (8\text{-iii}),$$

$$\text{où } g_k(z_1,z_2) = \frac{1}{z_1^{k-1}} \frac{z_1^{k} - z_2^{k}}{z_1 - z_2} ;$$

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq -s \\ j-k=q}} z_1^{k} z_2^{-j} = z_2^{-q} f_s (z_1,z_2) , \quad \text{où } s \in \mathbb{Z}^*_- , \qquad (8\text{-iv})$$

$$\text{où } f_s(z_1,z_2) = \left(-1 + \frac{1}{z_2^{-s}} \frac{z_2^{-s+1} - z_1^{-s+1}}{z_2 - z_1} \right) .$$

Les relations (1), (2), (3) et (4) seront utiles dans ce paragraphe. Nous procéderons à une éventuelle généralisation de quelques unes dans le paragraphe III et IV pour caractériser les algèbres de Lie engendrées par $M^+(\underline{\mathbb{G}})$ et $M^-(\underline{\mathbb{G}})$.

1.2. PROPOSITION 6 : *Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie. Soient x, et y $\in \underline{\mathfrak{G}}$, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^*$ ($z_1 \neq z_2$). . Alors*

$$(z_1-z_2)\ [\hat{x}^+(z_1),\hat{y}^+(z_2)] = z_1\widehat{[x,y]}^+(z_2) - z_2\ \widehat{[x,y]}^+(z_1)$$

PREUVE : Soient x et y dans $\underline{\mathfrak{G}}$, $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$, $z_1 \neq z_2$, on a :

$$[\hat{x}^+(z_1),\ \hat{y}^+(z_2)] = \sum_{\substack{k\geq o\\ d\geq o}} z_1^{-k}\ z_2^{-j}\ [t^k \otimes x\ ,\ t^j \otimes y\ ]$$

$$= \sum_{s\geq o} (\sum_{k+j=s} z_1^{-k}\ z_2^{-j}\ )\ t^s \otimes [x,y]$$

D'après (8-i) on a :

$$[\hat{x}^+(z)\ ,\ \hat{y}^+(z)] = \frac{z_1}{z_1-z_2} \sum_{s\geq o} z_2^{-s}\ (t^s \otimes [x,y]) - \frac{z_2}{z_1-z_2} \sum_{s\geq o} z_1^{-s}\ t^s \otimes [x,y]$$

$$= \frac{z_1}{z_1-z_2}\ \widehat{[x,y]}^+(z_2) + \frac{z_2}{z_1-z_2}\ \widehat{[x,y]}^+(z_1)\ . \quad \text{c.q.f.d.}$$

COROLLAIRE : *Soient $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie, $\underline{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{\mathfrak{G}}$, et Φ un système de racines de $\underline{\mathfrak{G}}$ relativement à $\underline{\mathfrak{h}}$. Soient $\alpha,\beta \in$, $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$ et $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$. Alors*

$$(z_2-z_2)[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = \begin{cases} n_{\alpha\beta}\{z_1\hat{e}^+_{\alpha+\beta}(z_2) - z_2\hat{e}^+_{\alpha+\beta}(z_1)\} & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi \cup \{0\} \\ & \text{où : } e_o = h_\alpha \text{ et } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\}\ . \end{cases}$$

On a aussi le résultat :

PROPOSITION 7 : *Soient $x,y \in \underline{\mathfrak{G}}$, $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$ ($z_1 \neq z_2$) . Alors :*

$$(11) \quad \frac{z_1(z_1-z_2)}{z_2}\ [\hat{x}^-(z_1),\hat{y}^-(z_2)] = z_2\ \widehat{[x,y]}^-(z_1) - z_1\ \widehat{[x,y]}^-(z_2)\ .$$

PREUVE : $[\hat{x}^-(z_1),\hat{y}^-(z_2)] = \sum_{\substack{k\geq 1\\ y\geq 1}} z_1^k z_2^j \;(t^{-(k+j)} \otimes [x,y])$

$$= \sum_{q\geq 2} \Big(\sum_{k+j=1} z_1^k z_2^j\Big)\,(t^{-q} \otimes [x,y]).$$

D'après (8-ii) on aura :

$$[\hat{x}^-(z_1),\hat{y}^-(z_2)] = \frac{z_1}{z_1-z_2} \sum_{q\geq 2} z_1^q\,(t^{-q} \otimes [x,y]) - \frac{z_2}{z_1-z_2} \sum_{q\geq 2} z_2^{+q}\,(t^{-q} \otimes [x,y])$$

$$- \Big(1+\frac{z_2}{z_1}\Big) \sum_{q\geq 2} z_1^q\,(t^{-q} \otimes [x,y])$$

$$= \frac{z_1}{z_1-z_2}\,\widehat{[x,y]}^-(z_1) - \frac{z_2}{z_1-z_2}\,\widehat{[x,y]}^-(z_2) - \Big(1+\frac{z_2}{z_1}\Big)\widehat{[x,y]}^-(z_1)$$

$$+ \left\{-\frac{z_1}{z_1-z_2} + \frac{z_2^2}{z_1-z_2} + z_1\Big(1+\frac{z_2}{z_1}\Big)\right\}\,(t^{-1} \otimes [x,y])$$

or : $$-\frac{z_1^2}{z_1-z_2} + \frac{z_1^2}{z_1-z_2} + z_1\Big(1+\frac{z_2}{z_1}\Big) = \frac{z_2^2-z_1^2}{z_1-z_2} + (z_1+z_2)$$

$$= \frac{(z_2+z_1)(z_2-z_1)}{z_1-z_2} + (z_1+z_2) \qquad (z_1 \neq z_2)$$

$$= -(z_1+z_2) + (z_1+z_2) = 0.$$

D'où $[\hat{x}^-(z_1),\hat{y}^-(z_2)] = \dfrac{z_2}{z_1(z_1-z_2)}\left\{ z_2\widehat{[x,y]}^-(z_1) - z_1\widehat{[x,y]}^-(z_2)\right\}$ c.q.f.d.

COROLLAIRE : *Sous les hypothèses du corollaire de la proposition 6, on a :*

(12) $$\frac{z_1(z_1-z_2)}{z_2}\,[\hat{e}_\alpha^-(z_1),\hat{e}_\beta^-(z_2)] = \begin{cases} n_{\alpha\beta}\left\{z_2\hat{e}_{\alpha+\beta}^-(z_1) - z_1\hat{e}_{\alpha+\beta}^-(z_2)\right\} & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi \cup \{0\} \\ & \text{ou } e_o = h_\alpha \text{ et } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\}\,. \end{cases}$$

1.3. ACTION DE L'ALGEBRE DE KAC-MOODY REDUITE $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}[t,t^{-1}]$.

Soient $\mathfrak{G}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie ; $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}$, Φ système de racines de $\mathfrak{G}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Soit $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}[t,t^{-1}]$ l'algèbre de Kac-Moody réduite associée à $\mathfrak{G}$ [2],[2],[4].

LEMME 1 : *Soient* α *et* $\beta \in \phi$, $h \in \mathfrak{h}$, $e_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$, $e_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$, *et* $k \in \mathbb{N}$. *On a pour* $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$ *avec* $z_1 \neq z_2$:

$$[\mathrm{ad}(t^k \otimes h)\,\hat{e}^+_\alpha(z_1),\ \hat{e}^+_\beta(z_n)\,] = \alpha(h)\,\frac{z_1 z_2}{z_1-z_2}\,\{z_2^{k-1}\,\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_1) + z_1^{k-1}\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2) \qquad (13)$$

PREUVE : Soit $k\in \mathbb{N}$ on a

$$[[t^k \circ h,\hat{e}^+_\alpha(z_1)],\hat{e}^+(z_2)] = \alpha(h)z_1^k[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+(z_2)]-\alpha(h)z_1^k\{\sum_{j=o}^{k-1} z_1^{-j}[(t^j \otimes e_\alpha),\hat{e}^+_\beta(z_2)]$$

car : $[t^k \otimes h,\hat{e}^+_\alpha(z_1)] = \alpha(h)z_1^k\{\hat{e}^+_\alpha(z_1) - \sum_{j=o}^{k-1} z_1^{-j}\,(t^j \otimes e_\alpha)\}$ (14).

On a aussi, d'après (8-iii) :

$$\sum_{j=o}^{k-1} z_1^{-j}[(t^j \otimes e_\alpha),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = \sum_{s\geqslant o}\left[\sum_{\substack{j+\ell=s\\ o<j<k-1}} z_1^{-j}\,z_2^{-\ell}\right] t^s \otimes [e_\alpha,e_\beta]$$

$$= \sum_{s\geqslant o} z_2^{-s}\,g_k(z_1,z_2)\ t^s \otimes [e_\alpha,e_\beta\,]$$

$$= g_k(z_1,z_2)\ \widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)\ ,$$

où $g_k(z_1,z_2) = \dfrac{1}{z_1^{k-1}}\ \dfrac{z_1^k-z_2^k}{z_1-z_2}$.

Par conséquent

$$(z_1-z_2)[\mathrm{ad}(t^k \otimes h)\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = (h)z_1z_2\{z_2^{k-1}\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_1)-z_1^k\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)\}$$

c.q.f.d.

LEMME 2 : *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 1, mais avec* $k \in \mathbb{Z}^*_-$, *on a :*

$$[\mathrm{ad}(t^k \otimes h)\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = \alpha(h)z_1^k[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] + \alpha(h)z_1^k f_k(z_1,z_2)\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)$$

$$(15)\qquad + \alpha(h)f_k(z_1,z_2)\sum_{q=k}^{-1} z_2^{-q}(t^q \otimes [e_\alpha,e_\beta])$$

$$\text{où}\quad f_k(z_1,z_2) = \left(-1 + \frac{1}{z_2^{-k}}\,\frac{z_2^{-k+1}-z_1^{-k+1}}{(z_2-z_1)}\right).$$

PREUVE : C'est immédiat, via une technique analogue à celle du lemme 1, la formule (8-iv) et l'expression :

$$[t^k \otimes h,\hat{e}^+_\alpha(z_1)] = \alpha(h)z_1^k\left\{\hat{e}^+_\alpha(z_1) + \sum_{m=k}^{-1} z_1^{-m}(t^m \otimes e_\alpha)\right\}$$

établis pour $k \in \mathbb{Z}^*$. c.q.f.d.

D'après le lemme 1 et le lemme 2, on a :

PROPOSITION 8 : *Soient* α *et* $\beta \in \phi$ $e_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, $e_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, $z_1,z_2 \in \mathbb{C}^*$ $(z_1 \neq z_2)$, et *et* $h \in \underline{\mathfrak{h}}$. *Alors*

$$i)\ \mathrm{ad}(t^k \otimes h)[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = (\alpha+\beta)(h)z_1z_2\left\{z_1^{k-1}\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_1)-z_2^{k-1}\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)\right.$$

(16) *si* $k \in \mathbb{N}$.

$$ii)\ \mathrm{ad}(t^k \otimes h)[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] = (\alpha(h)z_1^k+\beta(h)z_2^k)[\hat{e}^+_\alpha(z_1),\hat{e}^+_\beta(z_2)] +$$

$$(17)\qquad + \{\alpha(h)z_1^k f_k(z_1,z_2)\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)+\beta(h)z_2^k f_k(z_2,z_1)\widehat{[e_\alpha,e_\beta]}^+(z_2)\} +$$

$$+ \sum_{k=q}^{-1}\{(\alpha(h)z_1^k f_k(z_1,z_2)z_2^{-q} + \beta(h)z_2^k f_k(z_2,z_1)z_1^{-q}\}(t^q \otimes [e_\alpha,e_\beta])$$

si $k \in \mathbb{Z}^*$.

Toutes les relations établies dans ce paragraphe seront généralisées, dans le prochain paragraphe. Notons aussi que des relations analogues entre éléments de $M^-_{z_1}(\underline{\mathfrak{G}})$ et $M^-_{z_2}(\underline{\mathfrak{G}})$ peuvent être établies.

1.4. GENERALISATION.

Le but est d'exprimer le crochet $[\hat{x}_1^+(z_1)\ldots\hat{x}_n^+(z_n)$ en fonction de $\widehat{[x_1,\ldots,x_n]}^+(z_k)$ élément de $M^+_{z_k}(\underline{\mathfrak{G}})$, où le crochet $[x_1\ldots x_n]$ désigne $[x_1[x_2[\ldots[x_{n-1},x_n]]\ldots]$.

Etant donnée $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^{*n}$, avec $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, il n'est pas difficile d'établir, les relations suivantes ; pour $x_1,\ldots,x_n \in \underline{\mathfrak{G}}$:

$$[\hat{x}_1^+(z)\ldots\hat{x}_N^+(z)] = \sum_{s\geq o} \varphi_n(s)z^{-s}t^s \otimes [x_1,\ldots,x_n] \tag{17}$$

$$\text{où } \varphi_n(s) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=s \\ o\leq k_j\leq s \\ 1\leq j\leq n}} 1$$

Et

$$[\hat{x}_1^+(z_1)\ldots\hat{x}_n^+(z_n)] = \sum_{s\geq o} \varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n)t^s \otimes [x_1,\ldots,x_n)] \tag{18}$$

$$\text{où } \varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=s \\ o\leq k_j\leq s \\ 1\leq j\leq n}} z_1^{-k_1}\ldots z_n^{-k_n} .$$

Remarquons que si $z_i = z_j$ pour $i \neq j$, alors on aura l'expression (18) avec n-1 nombres complexes c'est-à-dire $\varphi_{n-1}(s;z_1,\ldots,z_n,\hat{z}_j,\ldots,z_n)$ où $\hat{z}_j$ signifie qu'on supprime z_j). Et si $z_1 = z_2 = \ldots = z_n=Z$, alors

$$\varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n) = z^{-s}\,\varphi_n(s) \quad .$$

Et l'expression (18) sera réduite à (17). C'est ainsi qu'on supposera que les $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ sont distincts deux à deux.

Notons aussi que $\varphi_n(s;z_1,\ldots z_n)$ est un polynôme homogène en $z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}$ de degré s ; et il vérifie les propriétés suivantes :

i) $$\varphi_n(s;z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}) = \varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n) \qquad (19)$$

où σ est un élément des groupes des permutations S_n.

ii) $$\varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n) = z_n^{-s} \sum_{p=o}^{s} \varphi_{n-1}(p;\frac{z_1}{z_n},\ldots,\frac{z_{n-1}}{z_n}) \qquad (20)$$

La relation (19) est immédiate, alors que (20) s'établit par récurrence sur n.

D'après la proposition 6, on a :

$$[\hat{x}^+(z_1),\hat{y}^+(z_2)] = \frac{z_1}{z_1-z_2}\ \widehat{[x,y]}^+(z_2) + \frac{z_2}{z_2-z_1}\ \widehat{[x,y]}^+(z_1)$$

Ainsi, on a : $\varphi_2(s;z_1,z_2) = f_1(z_1,z_2)z_1^{-s} + f_2(z_1,z_2)z_2^{-s}$

ou $f_1(z_1,z_2) = \dfrac{z_1}{z_1-z_2}$ et $f_2(z_1,z_2) = \dfrac{z_2}{z_2-z_1}$

et $f_1(z_{\tau(1)},z_{\tau(2)}) = f_2(z_1,z_2)$

τ étant la transposition [1,2].

De façon générale, on a :

<u>PROPOSITION 9</u> ; *Soient* s, n $\in \mathbb{N}^*$, $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^{*n}$ *avec* $z_i \neq z_j$ *si* $i \neq j$.

Alors : $$\varphi_n(s;z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1,\ldots,z_n)z_k^{-s} \qquad (21)$$

où $f_k(z_1,\ldots,z_n)$ *est une fraction rationnelle en* $z_1,\ldots,z_n$, *indépendante de* s. *Et pour toute permutation* σ *de* S_n *, on a :*

$$f_k(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}) = f_{\sigma^{-1}(k)}(z_1,\ldots,z_n) \qquad (22)$$

PREUVE :

i) D'après la proposition 6, la proposition 9 est vraie pour n=2

ii) Supposons que (20) est vraie à l'ordre n et vérifiant à l'ordre n+1. Posons

$$X_n(z_1,\ldots,z_n) = [\hat{x}_1^+(z_1)\ldots\hat{x}_n^+(z_n)]$$

D'après l'expression (18) on a :

$$X_n(z_2,\ldots,z_{n+1}) = \sum_{s\geqslant o} \varphi_n(s;z_2,\ldots,z_{n+1})\ t^s \otimes [x_2\ldots x_{n+1}]$$

or par hypothèse de récurrence on a :

$$\varphi_n(s;z_2,\ldots,z_{n+1}) = \sum_{k=2}^{n+1} f_k(z_2,\ldots,z_{n+1}) z_k^{-s}$$

d'où

$$X_n(z_2,\ldots,z_{n+1}) = \sum_{k=2}^{n+1} f_k(z_2,\ldots,z_{n+1})\ [\widehat{x_2\ldots x_{n+1}}]^+(z_k)\ .$$

Donc

$$\begin{aligned} X_{n+1}(z_1,\ldots,z_{n+1}) &= [\hat{x}_1^+(z_1), X_n(z_2,\ldots,z_{n+1})] = \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} f_k(z_2,\ldots,z_{n+1})\ [\hat{x}_1^+(z_1),[\widehat{x_2\ldots x_{n+1}}]^+(z_k)] \end{aligned}$$

D'après la proposition 6, on a :

$$\begin{aligned} X_{n+1}(z_1,\ldots,z_{n+1}) &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{z_1}{z_1-z_k}\ f_k(z_2,\ldots,z_{n+1})[\widehat{x_1x_2\ldots x_{n+1}}]^+(z_k) \\ &+ \Big(\sum_{k=2}^{n+1} f_k(z_2,\ldots,z_{n+1})\ \frac{z_k}{z_k-z_1}\Big)\ [\widehat{x_1x_2\ldots x_{k+1}}]^+(z_k)\ . \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} g_k(z_1,\ldots,z_{n+1}) = \dfrac{z_1}{z_1-z_k}\ f_k(z_2,\ldots,z_{n+1}) \text{ pour } 2 < k < n+1 \\ g_1(z_1,\ldots,z_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f_k(z_2,\ldots,z_{n+1})\ \frac{z_k}{z_k-z_1} \end{cases}$$

Alors, on aura :

$$\varphi_{n+1}(s;z_1,\ldots,z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} g_k(z_1,\ldots,z_{n+1})z_k^{-1}$$

iii) Soit σ une permutation de S_n. D'après la relation (19), on a :

$$\varphi_n(s;z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}) = \varphi_n(s.z_1,\ldots,z_n) \ .$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})z_{\sigma(k)}^{-s} = \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1,\ldots,z_n)z_k^{-s}$.

Donc $f_{\sigma^{-1}(k)}(z_1,\ldots,z_n) = f_k(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})$

En particulier pour une transposition $\tau = [k_1,k_2]$ $1 \leqslant k_1 < k_2 < n$, on a :

$$f_{k_2}(z_1,\ldots,z_n) = f_{k_1}(z_1,\ldots,z_{k_2},\ldots,z_{k_1},\ldots,z_n) \ .$$

c.q.f.d.

Une conséquence importante de cette proposition est :

<u>THEOREME 1</u> : *Soient* $x_1,\ldots,x_n \in \underline{\mathfrak{G}}$, *et* $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}^*$ *deux à deux distincts. Alors*

$$[\hat{x}_1^+(z_1),\ldots,\hat{x}_n^+(z_n)] = \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1,\ldots,z_n)\,[\widehat{x_1,\ldots,x_n}]^+(z_k) \tag{23}$$

où les $f_k(z_1,\ldots,z_n)$ *sont des fractions rationnelles en* $z_1,\ldots,z_n$ *vérifiant (22), dites "<u>fonctions de partition</u>".*

<u>COROLLAIRE</u> : *Pour* n=3 *on a :*

i) $$\varphi_3(s;z_1,z_2,z_3) = \frac{z_1\ z_2}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\ z_1^{-s} + \frac{z_1\ z_3}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}\ z_2^{-s} + \frac{z_3\ z_2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} z_3^{-s}$$

ii) $$[\hat{x}_1^+(z_1)\hat{x}_2^+(z_2)\hat{x}_3^+(z_3)] = \frac{z_1\ z_2}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\ [\widehat{x_1x_2x_3}]^+(z_1) +$$

$$+ \frac{z_1\ z_3}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}\ [\widehat{x_1x_2x_3}]^+\ (z_2) + \frac{z_3\ z_2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\ [\widehat{x_1x_2x_3}]^+\ (z_3).$$

III - Etude des algèbres de Mellin-Lie : $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ et $\hat{M}_n^+(\underline{\mathfrak{G}})$

3.1. Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie. L'objet est d'étudier les algèbres de Mellin-Lie engendrées par $M^+(\mathfrak{G})$, introduite au paragraphe II, comme étant les espaces des séries formelles provenant de $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$.

D'après la relation (17), on sait que :

$$[\hat{x}_1^+(z)\dots\hat{x}_n^+(z)] = \sum_{s\geqslant o} \varphi_n(s)\; z^{-s}(t^s \otimes [x_1,\dots,x_n])$$

où

$$\varphi_n(s) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=s \\ k_j\geqslant o\;,\;1\leqslant j\leqslant n}} 1$$

Notons tout d'abord, que la suite $(\varphi_n(s))$ pour s fixé, vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\varphi_n(s) = \sum_{p=o}^{s} \varphi_{n-1}(p) \tag{23}$$

où $\varphi_o(s) = 1$. De plus $\varphi_n(s)$ est un polynôme en s de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

<u>DEFINITION</u> :

i) La dérivation $d_z = z\,\frac{d}{dz}$ *est appelée dérivation degré*

ii) La dérivation

$$d_z^p = \underbrace{z\,\frac{d}{dz}\; z\,\frac{d}{dz}\;\dots\; z\,\frac{d}{dz}}_{\text{p.fois}}$$

est appelée dérivation degré d'ordre p, *où* p-*dérivation degré.*

Posons : $$d_z^{(p)} = (-1)^p\; d_z^p$$

et $$\varphi_n(s) = \sum_{p=o}^{n} a_p(n)\; s^p$$

L'expression (17) devient :

$$[\hat{x}_1^+(z_1) \ \dots \ \hat{x}_n^+(z)] = \sum_{s\geqslant o} \left(\sum_{p=o}^{n} a_p(n) \ s^p \ z^{-s} \ t^s \otimes [x_1 \dots x_n]\right)$$

$$= \sum_{p=o}^{n} a_p(n) \left\{ \sum_{s\geqslant o} s^p \ z^{-s} \ t^s \otimes [x_1 \dots x_n]\right\}$$

Ainsi

$$\hat{x}^+_{(p)} (z) = \sum_{s\geqslant o} s^p \ z^{-s} \ t^s \otimes [x_1 \dots x_n]$$

$$= d_z^{(p)} \left(\sum_{s\geqslant o} z^{-s} \ t^s \otimes [x_1 \dots x_n]\right)$$

$$= d_z^{(p)} \ \widehat{[x_1 \dots x_n]}^+(z) \qquad .$$

Donc :

$$[\hat{x}_1^+(z) \dots \hat{x}_n^+(z)] = \sum_{p=o}^{n} a_p(n) \ d_z^{(p)} \ \widehat{[x_1 \dots x_n]}^+(z).$$

D'où

<u>PROPOSITION 10</u> :*soient* $x_1,\dots,x_n \in \underline{\mathfrak{G}}$ *et* $z \in \mathbb{C}^*$. *Alors*

$$[\hat{x}_1^+(z) \dots \hat{x}_n^+(z)] = \left\{ \sum_{p=o}^{n} a_p(n) \ d_z^{(p)} \right\} \ \widehat{[x_1 \dots x_n]}^+(z) \tag{24}$$

où $a_p(n) \in \mathbb{Q}$ $(o \leqslant p \leqslant n)$.

Soit $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ l'espace de Mellin de type positif. Posons

$$d_z^{(p)} \ M_z^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \left\{ d_z^{(p)} \hat{x}^+(z) = \sum_{s\geqslant o} s^p \ z^{-s} \ t^s \otimes x, \qquad x \in \underline{\mathfrak{G}} \right\}$$

Et $\quad M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},n) = \bigoplus_{p=o}^{n} d_z^{(p)} \ M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$.

Il est immédiat que $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},0) = M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$. D'autre part, on a

$$M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},n) \subseteq M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},m) \qquad \text{pour } n \leqslant m.$$

Et les ensembles $d_z^{(p)}\ M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$ et $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},n)$, sont des sous-espaces vectoriels de dimention finies de $\underline{\mathfrak{G}}_+$, algèbres de Lie des séries formelles limitées à gauche.

<u>LEMME 1</u> :

i) Soient $x,y \in \underline{\mathfrak{G}}$, $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$d_z^{(n)}\ [\hat{x}^+(z),\hat{y}^+(z)] = \sum_{s=o}^{n} C_n^s\ [d_z^{(s)}\hat{x}^+(z),d_z^{(n-s)}\hat{y}^+(z)] \qquad (25)$$

ii) Soient $x,y \in \underline{\mathfrak{G}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors*

$$d_z^{(n)}\ [\hat{x}^+(z),\hat{y}^+(z)] = d_z^{(n+1)}\ \widehat{[x,y]}^+(z) + d_z^{(n)}\ \widehat{[x,y]}^+(z) \qquad (26)$$

<u>PREUVE</u>. i) s'établit par récurrence sur n.

ii) Conséquence immédiate de la relation (5) -i) de la proposition 3.

c.q.f.d.

Ainsi, la relation (25) montre que les p-dérivations degré sont des dérivations pour le crochet des éléments $\hat{x}^+(z)$ et $\hat{y}^+(z)$ de $M^+(\underline{\mathfrak{G}})$ espaces de séries formelles provenant de $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}})$. Tandis que la relation (26) montre que l'élément $d_z^{(n)}[\hat{x}^+(z),\hat{y}^+(z)]$ est dans $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}},n+1)$ espace des séries formelles provenant de $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},n+1)$.

On a aussi le résultat important suivant :

<u>LEMME 2</u> : *Soient* $x,y \in \underline{\mathfrak{G}}$, *et* $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. *Alors*

$[d_z^{(k)}\hat{x}^+(z),\ d_z^{(j)}\hat{y}^+(z)]$ *est un élément de* $M^+(\underline{\mathfrak{G}},k+j+1)$ *où* $M^+(\underline{\mathfrak{G}},k+j+1)$ *est l'espace des séries formelles provenant de* $M_z^+(\underline{\mathfrak{G}},k+j+1)$.

<u>PREUVE</u>. On a $[d_t^{(k)}\hat{x}^+(z),d_z^{(j)}\hat{y}^+(z)] = \sum_{s\geq o}\ \sum_{q\geq o}\ s^k q^j\ z^{-(s+q)}t^{(s+q)} \otimes [x,y]$

(27)

$$= \sum_{r\geq o}\ \sum_{s+q=r}\ s^q q^j)z^{-r}\ t^r \otimes [x,y\ ].$$

or $A_r(k,j) = \sum_{s+q=r} s^k q^j$ est un polynôme en r-degré k+p+1 ; et à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Posons :

$$A_r(k,j) = \sum_{s=o}^{k+j+1} b_s(k,j) r^s \quad \text{où} \quad b_s = b_s(k,j) \in \mathbb{Q} \text{ , avec } b_{k+j+1} \neq 0.$$

Substituant l'expression polynomiale de $A_r(k,j)$ dans (27), on aura alors :

$$[d_z^{(k)} \hat{x}^+(z), d_z^{(j)} \hat{y}^+(z)] = \sum_{s=o}^{k+j+1} b_s \Big(\sum_{r \geqslant o} r^s z^{-r} (t^r \otimes [x,y]) \Big)$$

$$= \sum_{s=o}^{k+j+1} b_s \, d_z^{(s)} \, \widehat{[x,y]}^+(z)$$

$$= \sum_{s=o}^{k+j+1} b_s \, d_z^{(s)} \, \widehat{[x,y]}^+(z).$$

Donc, comme $b_{k+j+1} \neq 0$, on a :

$$[d_z^{(k)} \hat{x}^+(z) \ , \ d_z^{(j)} \hat{y}^+(z)] \in M^+(\underline{\mathfrak{G}}, k+j+1)$$

c.q.f.d.

<u>PROPOSITION 11</u> : *Soient* m,n $\in \mathbb{N}$. *Alors*

$$[\, M^+(\underline{\mathfrak{G}},n), \, M^+(\underline{\mathfrak{G}},m)\,] \subseteq M^+(\underline{\mathfrak{G}},m+n+1) \tag{28}$$

<u>DEFINITION</u> : *On appellera algèbre de Mellin-Lie* $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ *l'algèbre de Lie engendrée par les crochets de Lie des éléments de l'espace* $M^+(\underline{\mathfrak{G}})$.

<u>THEOREMME 2</u> : *L'algèbre de Mellin-Lie* $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ *est une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie filtrée. Plus précisément, la suite*

(29) $M^+(\underline{\mathfrak{G}},o) = M^+(\underline{\mathfrak{G}}) \subset M^+(\underline{\mathfrak{G}},1) \subset \ldots \subset M^+(\underline{\mathfrak{G}},n) \subset \ldots \subset M^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigcup_{n \geqslant o} M^+(\underline{\mathfrak{G}},n)$

est une filtration de $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$. *Et l'algèbre de Lie graduée associée est :*

$$\mathrm{grad}\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}},n) \tag{30}$$

où $\hat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}},n) = \dfrac{M^+(\underline{\mathfrak{G}},n)}{M^+(\underline{\mathfrak{G}},n-1)} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

PREUVE : Conséquence immédiate de la proposition 11.

c.q.f.d.

Ainsi, les algèbres de Mellin-Lie $\hat{M}^+(\underline{\mathbb{C}})$, sont des algèbres de Lie analogues aux algèbres de Lie des opérateurs différentiels linéaires étudiés dans [6] et [4].

3.2. STRUCTURE DE $M_n^+(\underline{\mathbb{C}})$

Grâce à l'étude faite sur $\hat{M}^+(\underline{\mathbb{C}})$ et au théorème 1, on peut étudier l'algèbre de Mellin-Lie d'ordre n, $\hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{C}})$ algèbre de Lie engendrée par $M_n^+(\underline{\mathbb{C}})$ espace des séries formelles provenant de $M^+_{(z_1,\ldots,z_n)}(\underline{\mathbb{C}}) = M^+_{z_1}(\underline{\mathbb{C}}) \otimes \ldots \otimes M^+_{z_n}(\underline{\mathbb{C}})$.

La dérivation
$$d_k^p = \underbrace{z_k \frac{d}{dz_k} \cdots z_k \frac{d}{dz_k}}_{\text{p-fois}}$$

est appelée la k-ème dérivation degré d'ordre p.

Posons
$$d_k^{(p)} = (-1)^p \, d_k^p \, .$$

Et
$$M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} d_k^{(p)} M^+_{z_k}(\underline{\mathbb{C}}) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_k^{(p)} M^+_{z_k}(\underline{\mathbb{C}}) \tag{31}$$

Avec $M_n^+(\underline{\mathbb{C}},0) = M_n^+(\underline{\mathbb{C}})$.

Il n'est pas difficile de voir aussi que :

$$M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m_1) \subseteq M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m_2) \qquad \text{pour} \quad m_2 \geqslant m_1 \tag{32}$$

Et d'après l'expression (23) théorème 1, et l'expression (28) proposition 11, on a :

$$[\, M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m_1), M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m_2)] \subseteq M_n^+(\underline{\mathbb{C}},m+n+1) \tag{33}$$

D'où

<u>THEOREME 3</u> : *L'algèbre de Mellin-Lie d'ordre n,* $\hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}})$ *est une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie filtrée. Plus précisément, la suite*

$$M_n^+(\underline{\mathbb{G}}) = M_n^+(\underline{\mathbb{G}},o) \subset M_n^+(\underline{\mathbb{G}},1) \subset \dots \subset M_n^+(\underline{\mathbb{G}},m) \subset \dots \tag{34}$$

est une filtration de $\hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}})$ *et ,*

$$\hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_n^+(\underline{\mathbb{G}},m)$$

Et l'algèbre de Lie graduée associée est

$$\text{grad } \hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}},m) \tag{35}$$

où $$\hat{M}_n^+(\underline{\mathbb{G}},m) = \frac{M_n^+(\underline{\mathbb{G}},m)}{M_n^+(\underline{\mathbb{G}},m-1)}$$

On a ainsi un autre type d'algèbre de Lie analogue à celui étudié en [6].

3.3. <u>REMARQUE</u> : Etant donné z dans $\mathbb{C}^*$, dans 1.2 , on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel entre $M_z^+(\underline{\mathbb{G}})$ et $M_z^-(\underline{\mathbb{G}})$. Et d'après la proposition 3 et la proposition 10, cet isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\begin{aligned} p : M_z^+(\underline{\mathbb{G}}) &\longrightarrow M_z(\underline{\mathbb{G}}) \\ \hat{x}^+(z) &\longmapsto \hat{x}^-(z) \end{aligned}$$

se prolonge de façon canonique à un isomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\hat{p} : \hat{M}^+(\underline{\mathbb{G}}) \longrightarrow \hat{M}^-(\underline{\mathbb{G}})$$

où $\hat{M}^-(\underline{\mathbb{G}})$ est l'algèbre de Mellin-Lie engendré par $M^-(\underline{\mathbb{G}})$ espace des séries formelles provenant de $M_z^-(\underline{\mathbb{G}})$. Ainsi, on aura des résultats analogues à ceux établis entre éléments de $M^+(\underline{\mathbb{G}})$. Plus précisément, les théorème 1-2 et 3 sont vérifiés aussi pour $\hat{M}^-(\underline{\mathbb{G}})$ et $\hat{M}_n^-(\underline{\mathbb{G}})$, algèbre de Mellin-Lie de "type-négatif".

Notant aussi que $\hat{M}^+(\underline{\mathbb{G}})$, $\hat{M}^-(\underline{\mathbb{G}})$, $\hat{M}^+(\underline{\mathbb{G}})$ et $\hat{M}_n^-(\underline{\mathbb{G}})$ ont un lien étroit avec la représentation fondamentale des algèbres de Kac-Moody [1] , et les équations d'évolution de type K.P.

Bibliographie.

[1] I.B. FRENKEL and V.G. KAC : *Basic representation of affine Lie algebras and dual resonance models,* Invent. Math. (62) 1980, 23-66.

[2] V.G. KAC : *Simple irreductible graded Lie algebra of finite growth,* Math. U.S.S.R. Izvestijia, vol. 2, n° 6, 1968.

[3] R.V. MOODY : *A new class of Lie algebras,* J. of Alg. 10 (211-230) (1968).

[4] M. RACHIDI : *Systèmes hamiltoniens complètement intégrable et algèbres de Kac-Moody,* Thèse de 3e cycle, Lyon I (1982).

[5] J.E. HUMPHREYS : *Introduction to Lie algebras on representation theory,* Springer-Verlag, New-york Heidelberg Berlin.

[6] J. BRACONNIER : *Eléments d'algèbres graduée,* Publ. Dép. Math. Lyon (1979).

[7] J.L. VERDIER : *Hierarchie des équations de type K.P., Algèbres de Lie affines,* Séminaire Bourbaki- Juin 1982.