

MUSTAPHA RACHIDI

Transformation de Mellin et algèbres de Kac-Moody

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 4A
, p. 25-35

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985__4A_25_0

© Université de Lyon, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION DE MELLIN ET ALGÈBRES DE KAC-MOODY

par Mustapha Rachidi

1 - Introduction.

Ce travail est une suite de [2]. On se propose ici d'établir les relations existant entre la représentation adjointe des algèbres de Lie de Kac-Moody affines et la transformation de Mellin algébrique. Plus précisément étant donnée une \mathbb{C} -algèbre de Lie simple $\underline{\mathfrak{G}}$ (de dimension finie), on étudiera les relations existant entre les opérateurs $(T_{\zeta}^{\text{ad}})_{\zeta \in Q}$ où Q désigne le treillis des racines de $\underline{\mathfrak{G}}$ relativement à une sous-algèbre de Cartan $\underline{\mathfrak{h}}$, et la transformation de Mellin algébrique et, plus généralement, les relations avec l'action du groupe de Weyl $\hat{W} = W \times Q$ [1] sur les différents types d'espaces de Mellin-Lie [2], et cette transformation.

Dans un premier temps on obtient une famille importante de relations de commutation, grâce aux propriétés des systèmes de racines de $\underline{\mathfrak{G}}$, et des résultats de [2]. Dans un second temps on donnera une caractérisation explicite des opérateurs $(T_{\zeta}^{\text{ad}})_{\zeta \in Q}$, qui auront une action analogue à celle de la représentation adjointe de l'algèbre de Kac-Moody réduite $\hat{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{G}}[t, t^{-1}]$ sur les algèbres de Mellin-Lie. Il en découle aussi que la seule sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Mellin-Lie $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{G}})$ [2] invariante par les opérateurs $(T_{\zeta}^{\text{ad}})_{\zeta \in Q}$, est la sous-algèbre de Lie $\hat{M}^{\pm}(\underline{\mathfrak{h}})$ où $\underline{\mathfrak{h}}$ est la sous-algèbre de Cartan de $\underline{\mathfrak{G}}$. D'où l'intérêt important que revêt la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie affine associée à $\underline{\mathfrak{G}}$, sur l'espace fondamental $\hat{V} = \text{Sym}(\hat{S}_{-}) \otimes \mathbb{C}(\Gamma)$ [1] où Γ est un réseau d'une base orthonormée de $\underline{\mathfrak{h}}$, et \hat{S}_{-} est la sous-algèbre de Heisenberg.

II - Notations et rappels.

2.1. Soit $\underline{\mathfrak{g}}$ une \mathbb{C} -algèbre de Lie de type auto-dual i.e. A_n, D_n, E_6, E_7 , et E_8 .

Soit $\Delta = \{\alpha_i, 1 \leq i \leq n\}$ une base de racines simples du système de racines ϕ de $\underline{\mathfrak{g}}$, par rapport à une sous-algèbre de Cartan (S.A.C.) $\underline{\mathfrak{h}}$. Soit $\underline{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody affine construite sur $\underline{\mathfrak{g}}$ par extension centrale de l'algèbre de Kac-Moody réduite $\hat{\underline{\mathfrak{g}}} = \underline{\mathfrak{g}}[t, t^{-1}]$ [1] et [3] . :

$$\bar{\underline{\mathfrak{g}}} = \underline{\mathfrak{g}}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}.c \quad (2.1)$$

où c est un élément central de $\underline{\mathfrak{g}}$. Soit $\langle . | . \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur $\underline{\mathfrak{g}}$, par $k = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -linéarité elle s'étend en une forme $\langle . | . \rangle$, sur $\hat{\underline{\mathfrak{g}}}$ à valeurs dans $K = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, qui est bilinéaire symétrique invariante. Et la forme :

$$\langle x | y \rangle = \text{Res } t^{-1} \langle x | y \rangle_t \quad (2.2)$$

où $x, y \in \hat{\underline{\mathfrak{g}}}$, est une forme bilinéaire symétrique sur $\hat{\underline{\mathfrak{g}}}$, qui est Z -graduée. Elle est non-dégénérée si et seulement si sa restriction à $\underline{\mathfrak{g}}$ l'est [1].

Soit $d = t \frac{d}{dt}$ l'opérateur dérivation degré, en prenant $d.c = 0$, l'opérateur d s'étend d'une façon naturelle à $\bar{\underline{\mathfrak{g}}}$. Et l'extension essentielle :

$$\tilde{\underline{\mathfrak{g}}} = \hat{\underline{\mathfrak{g}}} \oplus \mathbb{C}.c \oplus \mathbb{C}.d \quad (2.3)$$

est dite algèbre de Lie de Frenkel-Kac associée à $\underline{\mathfrak{g}}$. Et la forme

$$\langle x_1 + \alpha_1 c + \beta_1 d | x_2 + \alpha_2 c + \beta_2 d \rangle = \langle x_1 | x_2 \rangle + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \quad (2.4)$$

où $x_1, x_2 \in \hat{\underline{\mathfrak{g}}}$ et $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ et $\beta_2 \in \mathbb{C}$, définit une forme bilinéaire symétrique, invariante et non-dégénérée sur $\tilde{\underline{\mathfrak{g}}}$.

2.2. Considérons la sous-algèbre abélienne de $\tilde{\underline{\mathfrak{g}}}$:

$$\tilde{\underline{\mathfrak{h}}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}.c \oplus \mathbb{C}.d \quad .$$

Soit δ la forme linéaire sur $\tilde{\underline{\mathfrak{h}}}$ duale de d , alors pour toute racine α de ϕ :

$$\tilde{\alpha} = n \delta + \alpha$$

est une racine de $\tilde{\mathfrak{G}}$. Le fait que $\tilde{\mathfrak{h}}$ soit prise en tant que sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{G}}$, celui-ci admet un système infini de racine $\tilde{\Phi}$, dont $\tilde{\Delta} = \{\delta - \alpha_c; \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$; où α_c est la racine maximale de Φ , est une base de racines simples [1]. Toute racine $n\delta$ (où $n \in \mathbb{Z}$) est dite "isotrope", et, toute racine $\tilde{\alpha} = n\delta + \alpha$, où $\alpha \in \Phi$ et $n \in \mathbb{Z}$, est dite réelle. Les racines isotropes et réelles épuisent les racines de $\tilde{\mathfrak{G}}$ relativement à $\tilde{\mathfrak{h}}$. Soit α dans Φ , et p dans \mathbb{Z} , on définit les réflexions suivantes :

$$\begin{cases} r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda | \check{\alpha} \rangle \alpha \\ r_{\alpha+p\delta}(\lambda) = r_\alpha(\lambda) - p \langle \lambda | \check{\alpha} \rangle \delta \end{cases} \quad (2.4)$$

Sur l'espace $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C} \cdot \delta$; où $\check{\alpha} = \frac{\alpha}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$, la forme $\langle . | . \rangle$ est la restriction à $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ de la forme duale, de la forme canonique de $\tilde{\mathfrak{h}}$. On a aussi la relation.

$$r_{\alpha+p\delta} \circ r_{\alpha+q\delta} = \mathbb{1}_d + (p-q)(\check{\alpha} \otimes \delta) \quad (2.5)$$

En particulier :

$$T_{\check{\alpha}} = r_{\alpha-\delta} \circ r_\alpha = \mathbb{1}_d - \check{\alpha} \otimes \delta \quad (2.6)$$

2.3. Soit $\text{ad} : \tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{G}})$ la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{G}}$. Pour cette représentation, on a la décomposition spectrale :

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \sum_{\substack{(n,\alpha) \\ \alpha+n\delta \in \tilde{\Phi}}} \mathfrak{G}_\alpha \otimes t^n \quad (2.7)$$

où tous les sous-espaces poids sont de dimension finie. Les opérateurs :

$$r_i^{\text{ad}} = e^{-\text{ad}(e_i)} e^{\text{ad}(f_i)} e^{-\text{ad}(e_i)} \quad (2.8)$$

sont bien définis car $\text{ad}(e_i)$ et $\text{ad}(f_i)$ sont nilpotents ($0 \leq i \leq n$). De plus, les r_i^{ad} ($1 \leq i \leq n$) sont des automorphismes de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{G}}$, qui préservent sa forme bilinéaire canonique. Notons que

$$r_i^{\text{ad}}(\tilde{\mathfrak{G}}_\zeta) = \tilde{\mathfrak{G}}_{r_i(\zeta)} \quad (r_i^{\text{ad}})^r = \pm \mathbb{1}_d \quad (2.9)$$

Pour toute racine simple α_i ($1 \leq i \leq n$) de $\underline{\mathfrak{G}}$, on pose

$$T_i^{\text{ad}} = r_{\delta - \alpha_i}^{\text{ad}} \circ r_{\alpha_i}^{\text{ad}} \quad (2.10)$$

Pour toute racine β et tout $x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta$, on a :

$$T_i^{\text{ad}} (t^k \otimes x_\beta) = t^{k - \langle \beta | \alpha_i \rangle} \otimes x_\beta \quad (2.11)$$

où $t^k \otimes x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta \otimes t^k$. Et pour tout $h \in \tilde{\underline{\mathfrak{h}}}$ on a :

$$T_i^{\text{ad}}(h) = h - [\alpha_i(h) + 1/2 \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle \delta(h)]c + \delta(h)h \quad (2.12)$$

Pour tout élément ζ du treillis des racines de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$:

$$\zeta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \quad \text{où} \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

on pose :

$$T_\zeta^{\text{ad}} = (T_1^{\text{ad}})^{k_1} \circ \dots \circ (T_n^{\text{ad}})^{k_n} .$$

D'après les relations (2.11) et (2.12) on aura :

$$T_\zeta^{\text{ad}}(t^k \otimes x_\beta) = t^{k - \langle \zeta | \beta \rangle} \otimes x_\beta \quad \text{où} \quad x_\beta \in \underline{\mathfrak{G}}_\beta \quad (2.11)'$$

$$T_\zeta^{\text{ad}}(h) = h - [\zeta(h) + 1/2 \langle \zeta | \zeta \rangle \delta(h)]c + \delta(h)h \quad \text{où} \quad h \in \tilde{\underline{\mathfrak{h}}} \quad (2.12)'$$

Et on déduit de (2.12) que :

$$T_\zeta^{\text{ad}} = r_{\delta - \zeta}^{\text{ad}} \circ r_\zeta^{\text{ad}} \quad (\forall \zeta \in \tilde{\Phi}) \quad (2.13)$$

Et l'application $\zeta \rightarrow T_\zeta^{\text{ad}}$ est une représentation de Q dans $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$. Les opérateurs T_ζ^{ad} sont appelées opérateur de transvection de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$. Et le groupe T engendré par les T_ζ^{ad} , $\zeta \in \tilde{\Phi}$ est appelé groupe des transvections de $\tilde{\underline{\mathfrak{G}}}$.

III - Opérateurs T^{ad} et transformation de Mellin algébrique.

Soit $\underline{\mathfrak{G}}$ une \mathbb{C} -algèbre de Lie simple de dimension finie, et de type auto-duale. Soit Φ le système de racine de $\underline{\mathfrak{G}}$ relativement à la sous-algèbre de Cartan $\underline{\mathfrak{h}}$.

3.1. Soit $x \in \underline{\mathfrak{G}}$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. Considérons la transformée de Mellin algébrique de x

$$\hat{x}(Z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^{-k} (t^k \otimes x). \quad (3.1)$$

La relation immédiate établie entre les opérateurs T^{ad} et la transformée de Mellin algébrique [en abrégé T.M.A.] est donnée par :

PROPOSITION 3.1. [1] [2].

Soient $h \in \underline{\mathfrak{h}}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}$, où $\alpha \in \Phi$. Alors

$$i) [t^k \otimes h; \hat{x}_\alpha(Z)] = \alpha(h) Z^k \hat{x}_\alpha(Z), \quad (3.2)$$

$$ii) T_\zeta^{\text{ad}}[\hat{x}_\alpha(Z)] = Z^{-\langle \alpha | \zeta \rangle} \hat{x}_\alpha(Z), \quad (3.3)$$

où ζ est un élément du treillis des racines Q de Φ .

Soit α dans Φ et x_α dans $\underline{\mathfrak{G}}_\alpha$, et soit :

$$\hat{x}_\alpha^+(Z) = \sum_{k \geq 0} Z^{-k} (t^k \otimes x_\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{x}_\alpha^-(Z) = \sum_{k < 0} Z^{-k} (t^k \otimes x_\alpha).$$

Les T.M.A. de "type positif" et de "type négatif" respectivement de x_α .
A partir des relations (2.11) et (2.11)' on tire :

PROPOSITION 3.2.

$$T_\zeta^{\text{ad}}[\hat{x}_\alpha^+(Z)] = Z^{-\langle \zeta | \alpha \rangle} \sum_{p \geq \langle \alpha | \zeta \rangle} Z^{-p} (t^p \otimes x_\alpha), \quad (3.4)_+$$

$$T_\zeta^{\text{ad}}[\hat{x}_\alpha^-(Z)] = Z^{-\langle \zeta | \alpha \rangle} \sum_{p < \langle \alpha | \zeta \rangle} Z^{-p} (t^p \otimes x_\alpha). \quad (3.4)_-$$

Si $\langle \alpha | \zeta \rangle = 0$, en d'autres termes si α est dans l'hyperplan $\{\beta \in \Phi; \langle \beta | \zeta \rangle = 0\}$ les relations (3.4)₊ et (3.4)₋ deviennent :

$$T_\zeta^{\text{ad}}[\hat{x}_\alpha^+(Z)] = \hat{x}_\alpha^+(Z) \quad \text{et} \quad T_\zeta^{\text{ad}}[\hat{x}_\alpha^-(Z)] = \hat{x}_\alpha^-(Z) \quad (3.5)$$

En d'autres termes, l'opérateur T_ζ^{ad} laisse invariant $\hat{x}_\alpha^+(Z)$ et $\hat{x}_\alpha^-(Z)$, et plus généralement les espaces $M^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha)$ et $M^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha)$ si $\langle \alpha | \zeta \rangle = 0$.

Soit $\underline{\mathfrak{G}}^+$ (respectivement $\underline{\mathfrak{G}}^-$) l'espace des séries formelles à coefficients dans $\underline{\mathfrak{G}}$ limitées à gauche (resp. à droite). Pour tout α dans Φ posons :

$$M_n^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) = \left\{ \sum_{p \geq n} Z^{-p} (t^p \circ x_\alpha) ; x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha \text{ et } Z \in \mathbb{C}^* \right\}$$

$$M_n^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) = \left\{ \sum_{p < -n} Z^{-p} (t^p \circ x_\alpha) ; x_\alpha \in \underline{\mathfrak{G}}_\alpha \text{ et } Z \in \mathbb{C}^* \right\} .$$

La relation (3.4)₊ montre que pour tout $\zeta \in Q$ et tout $\alpha \in \Phi$ on a $T_\zeta^{\text{ad}} \in \text{End}(M_n^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha), M_n^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha))$ et la relation (3.4)₋ montrent que

$T_\zeta^{\text{ad}} \in \text{End}(M_n^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha), M_n^-(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha))$. Plus généralement, $T_\zeta^{\text{ad}} \in \text{End}(M^+(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^+)$, d'après (3.4)₊, et $T_\zeta^{\text{ad}} \in \text{End}(M^-(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^-)$.

3.2. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ la base de racines simples de Φ ; comme $\underline{\mathfrak{G}}$ est une \mathbb{C} -algèbre de Lie simple de type auto-dual, la matrice de Cartan $A = (\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell}$ est non dégénérée, et par conséquent [Appendice], il existe un élément unique h_0 dans $\underline{\mathfrak{h}}$, tel que :

$$\alpha_i(h_0) = 1 \quad \forall \alpha_i \in \Delta.$$

appelé "élément hauteur" du système de racines Φ . Soit α dans Φ , comme

$\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$ $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ou $k_i \in \mathbb{Z}^-$ ($1 \leq i \leq \ell$) (respectivement) [4], on a :

$$\alpha(h_0) = \sum_{i=1}^{\ell} k_i = h^+(\alpha) \quad (3.6)$$

D'où l'existence d'éléments de $\underline{\mathfrak{h}}$ tel que $\alpha(h) \neq 0$, pour tout α dans Φ .

Considérons $(t^{+\langle \alpha | \zeta \rangle} \circ h)$ avec $\alpha(h) \neq 0$ pour tout α dans Φ . Alors :

$$[t^{+\langle \alpha | \zeta \rangle} \circ h, \hat{x}_\alpha^+(Z)] = \alpha(h) Z^{+\langle \alpha | \zeta \rangle} \sum_{p \geq \langle \alpha | \zeta \rangle} Z^{-p} (t^p \circ x_\alpha) \quad (3.7)_+$$

$$[t^{+\langle \alpha | \zeta \rangle} \circ h, \hat{x}_\alpha^-(Z)] = \alpha(h) Z^{+\langle \alpha | \zeta \rangle} \sum_{p < +\langle \alpha | \zeta \rangle} Z^{-p} (t^p \circ x_\alpha) \quad (3.7)_-$$

En prenant $h = h_0$ dans (3.7)₊ et (3.7)₋ on a :

THEOREMME 3.3.

Pour tout ζ dans Q , et tout α dans Φ , on a :

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} [\hat{x}_{\alpha}^{+}(Z)] = \frac{Z^{-2\langle\alpha|\zeta\rangle}}{\text{ht}(\alpha)} [t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \circ h_o, \hat{x}_{\alpha}^{+}(Z)] \quad (3.8)_{+}$$

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} [\hat{x}_{\alpha}^{-}(Z)] = \frac{Z^{-2\langle\alpha|\zeta\rangle}}{\text{ht}(\alpha)} [t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \circ h_o, \hat{x}_{\alpha}^{-}(Z)] \quad (3.8)_{-}$$

Ainsi, les opérateurs T_{ζ}^{ad} ($\zeta \in Q$), ont une action analogue à celle de la représentation adjointe de $\underline{\mathfrak{G}} = \underline{\mathfrak{G}}[t, t^{-1}]$ sur les espaces de Mellin-Lie $M_Z^{+}(\underline{\mathfrak{G}})$ et $M_Z^{-}(\underline{\mathfrak{G}})$ [2]. Via les relations (3.5), (3.8)₊, et la proposition 1 du I-1.2 de [2] tout opérateur T_{ζ}^{ad} ($\zeta \in Q$) se décompose comme suit :

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} = \mathbb{1}_{M_{\zeta}^{+}} + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \langle\alpha|\zeta\rangle \neq 0}} \frac{Z^{-2\langle\alpha|\zeta\rangle}}{\text{ht}(\alpha)} \text{ad}(t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \circ h_o) |_{M^{+}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha})} \quad (3.9)_{+}$$

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} = \mathbb{1}_{M_{\zeta}^{-}} + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \langle\alpha|\zeta\rangle \neq 0}} \frac{Z^{-2\langle\alpha|\zeta\rangle}}{\text{ht}(\alpha)} \text{ad}(t^{+\langle\alpha|\zeta\rangle} \circ h_o) |_{M^{-}(\underline{\mathfrak{G}}_{\alpha})} \quad (3.9)_{-}$$

où $M_{\zeta}^{+} = \{ \hat{x}_{\alpha}^{+}(Z) ; \langle\alpha|\zeta\rangle = 0 \}$, et l'opérateur T_{α}^{ad} étant considérée comme élément de $\text{End}(M^{+}(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^{+})$ et $\text{End}(M^{-}(\underline{\mathfrak{G}}), \underline{\mathfrak{G}}^{-})$ respectivement. Et l'extension de l'action des opérateurs T_{ζ}^{ad} ($\zeta \in Q$) aux algèbres de Mellin-Lie $\hat{M}^{+}(\underline{\mathfrak{G}})$ et $\hat{M}^{-}(\underline{\mathfrak{G}})$, se fait grâce à la composition de ces opérateurs avec les dérivations degrés $d_Z^k = (Z \frac{d}{dt})^k$ [2] (proposition 2 I. 1.3). D'après la proposition 3.2, on remarque que l'action des opérateurs T_{ζ}^{ad} ($\zeta \in Q$) est indépendante de la variation infinitésimale de Z dans \mathbb{C}^* , ainsi :

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} \circ d_Z [\hat{x}_{\beta}^{+}(Z)] = d_Z \circ T_{\zeta}^{\text{ad}} [\hat{x}_{\beta}^{+}(Z)]$$

et

$$T_{\zeta}^{\text{ad}} \circ d_Z [\hat{x}_{\beta}^{-}(Z)] = d_Z \circ T_{\zeta}^{\text{ad}} [\hat{x}_{\beta}^{-}(Z)]$$

où $\beta \in \Phi$, $x_{\beta} \in \underline{\mathfrak{G}}_{\beta}$ et $\zeta \in Q$. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 3.4.

Soit β dans Φ et x_{β} dans $\underline{\mathfrak{G}}_{\beta}$, $\alpha \in \Phi$ et $x_{\alpha} \in \underline{\mathfrak{G}}_{\alpha}$, et $\zeta \in Q$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
i) \quad T_{\zeta}^{\text{ad}} \circ d_Z[\widehat{x}_{\beta}(Z)] &= d_Z \circ T_{\zeta}^{\text{ad}}[\widehat{x}_{\beta}(Z)] = \{Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} d_Z - \langle\beta|\zeta\rangle T_{\zeta}^{\text{ad}}\} \widehat{x}_{\beta}(Z) \\
&= Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} \{d_Z - \langle\beta|\zeta\rangle\} \widehat{x}_{\beta}(Z)
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

$$ii) \quad T_{\zeta}^{\text{ad}}([\widehat{x}_{\alpha}^{+}(Z), \widehat{x}_{\beta}^{+}(Z)]) - [T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\alpha}^{+}(Z)), T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\beta}^{+}(Z))] = 2\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle T_{\zeta}^{\text{ad}}([\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}]^{+}(Z))
\tag{3.13}$$

PREUVE.

i) Immédiat, en effet :

$$\begin{aligned}
T_{\zeta}^{\text{ad}}[d_Z(\widehat{x}_{\beta}(Z))] &= d_Z[T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\beta}(Z))] = d_Z[Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} \widehat{x}_{\beta}(Z)] \\
&= -\langle\beta|\zeta\rangle Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} \widehat{x}_{\beta}(Z) - Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} d_Z \widehat{x}_{\beta}(Z) \\
&= Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} \{d_Z \widehat{x}_{\beta}(Z) - \langle\beta|\zeta\rangle \widehat{x}_{\beta}(Z)\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T_{\zeta}^{\text{ad}} \circ d_Z(\widehat{x}_{\beta}(Z)) &= d_Z \circ T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\beta}(Z)) = Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} \{d_Z - \langle\beta|\zeta\rangle\} \widehat{x}_{\beta}(Z) \\
&= \{Z^{-\langle\beta|\zeta\rangle} d_Z - \langle\beta|\zeta\rangle T_{\zeta}^{\text{ad}}\} \widehat{x}_{\beta}(Z)
\end{aligned}$$

ii) D'après [2] (proposition 2.I.1.3) on a :

$$T_{\zeta}^{\text{ad}}([\widehat{x}_{\alpha}^{+}(Z), \widehat{x}_{\beta}^{+}(Z)]) = T_{\zeta}^{\text{ad}}\{(-Z \frac{d}{dZ} + 1) [\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}]^{+}(Z)\}$$

D'après (3.10)

$$= (-Z \frac{d}{dZ} + 1) T_{\zeta}^{\text{ad}}([\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}]^{+}(Z))$$

D'après (3.4)₊

$$\begin{aligned}
&= (-Z \frac{d}{dZ} + 1) \{Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \sum_{m > \langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} Z^{-m} (t^m \otimes [\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}])\} \\
&= Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \{ \sum_{m > \langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} (m + \langle\alpha+\beta|\zeta\rangle + 1) Z^{-m} (t^m \otimes [\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}]) \}
\end{aligned}$$

D'après (3.4)₊ on a aussi :

$$[T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\alpha}^{+}(Z)), T_{\zeta}^{\text{ad}}(\widehat{x}_{\beta}^{+}(Z))] = Z^{-\langle\alpha+\beta|\zeta\rangle} \sum_{\substack{k > \langle\alpha|\zeta\rangle \\ s > \langle\beta|\zeta\rangle}} Z^{-(k+s)} (t^{(k+s)} \otimes [\widehat{x}_{\alpha}, \widehat{x}_{\beta}])$$

$$= z^{-\langle \alpha + \beta | \zeta \rangle} \sum_{m > \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle} \left(\sum_{k+s=m} 1. \right) z^{-m} (t^m \circ [x_\alpha, x_\beta])$$

Posons $p = m - \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle$

$$= z^{-\langle \alpha + \beta | \zeta \rangle} \sum_{p > 0} (p+1) z^{(p + \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle)} (t^{(p + \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle)} \circ [x_\alpha, x_\beta])$$

$$z^{-\langle \alpha + \beta | \zeta \rangle} \sum_{m > \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle} (m - \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle + 1) z^{-m} t^m \circ [x_\alpha, x_\beta]$$

En faisant la différence des expressions $T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\alpha^+(Z), T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\beta^+(Z)$ et $T_\zeta^{\text{ad}}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)])$ on obtient :

$$T_\zeta^{\text{ad}}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)]) - [T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\alpha^+(Z), T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\beta^+(Z)] = 2 \langle \alpha + \beta | \zeta \rangle T_\zeta^{\text{ad}}([\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta]^+(Z)).$$

c. q. f. d.

D'après les relations (3.4)₋ et (3.10), on a aussi une relation analogue à (3.13), entre T_ζ^{ad} et $[\hat{x}_\alpha^-(Z), \hat{x}_\beta^-(Z)]$. Pour tout $\zeta \in Q$ et $x_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$ ($\beta \in \Phi$), et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a la généralisation de la relation (3.10) :

$$T_\zeta^{\text{ad}} \circ d_Z^k [\hat{x}_\beta^-(Z)] = d_Z^k \circ T_\zeta^{\text{ad}} [\hat{x}_\beta^-(Z)]$$

(3.10)_k

Et

$$T_\zeta^{\text{ad}} \circ d_Z^k [\hat{x}_\beta^+(Z)] = d_Z^k \circ T_\zeta^{\text{ad}} [\hat{x}_\beta^+(Z)]$$

où $d_Z^k = (Z \frac{d}{dZ})^k$ est la k -ème dérivation degré.

Par conséquent, l'homomorphisme d'espaces vectoriels T_ζ^{ad} de l'espace de Mellin-Lie $M^+(\mathfrak{G})$ (resp. $M^-(\mathfrak{G})$) à valeurs dans \mathfrak{G}^+ (resp. \mathfrak{G}^-) se prolonge en homomorphisme linéaire de l'algèbre de Mellin-Lie $\hat{M}^+(\mathfrak{G})$ (resp. $\hat{M}^-(\mathfrak{G})$) à valeur dans \mathfrak{G}^+ (resp. \mathfrak{G}^-). Et, la relation (3.13) montre que ce prolongement n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie. Cependant, posons :

$$\Phi_\zeta = \{\alpha \in \Phi; \langle \alpha | \zeta \rangle = 0\} \cup \{0\}$$

Φ_ζ est stable pour l'addition. Si $\alpha, \beta \in \Phi_\zeta$, d'après (3.13) on a :

$$T_\zeta^{\text{ad}}([\hat{x}_\alpha^+(Z), \hat{x}_\beta^+(Z)]) = [T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\alpha^+(Z), T_\zeta^{\text{ad}} \hat{x}_\beta^+(Z)] \quad (3.14)_+$$

Posons : $\Phi_\zeta^c = \{\alpha \in \Phi, \alpha \in \Phi_\zeta\} \cup \{0\}$, on a : $\Phi_\zeta \cup \Phi_\zeta^c = \Phi \cup \{0\}$. Comme Φ_ζ est stable par addition ; alors :

$$\widehat{M}_S^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta \setminus \{0\}} \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) \oplus \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{h}}) \quad (3.15)$$

est une sous-algèbre de Lie de $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$, appelée "algèbre de Mellin-Lie-(ζ)-stable". De même, Φ_ζ^c est stable par addition, ainsi :

$$\widehat{M}_I^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta^c \setminus \{0\}} \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) \oplus \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{h}}) \quad (3.16)$$

est une sous-algèbre de Lie de $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ appelée "algèbre de Mellin-Lie (ζ)-instable". Et on a la décomposition :

$$\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \left[\bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta^c \setminus \{0\}} \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) \right] \oplus \left[\bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta \setminus \{0\}} \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}_\alpha) \right] \oplus \widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{h}}) \quad (3.17)_1$$

Soit : $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}}) = \widehat{M}_S^+(\underline{\mathfrak{G}}) + \widehat{M}_I^+(\underline{\mathfrak{G}}) \quad (3.17)_2$

Et on a le résultat :

THEOREME 3.5.

L'algèbre $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{h}})$ est la seule sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Mellin-Lie $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{G}})$ qui est (ζ)-stable et (ζ)-instable.

Soit $\widehat{W} = W \times Q$ le groupe de Weyl de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{G}} = \underline{\mathfrak{G}} \oplus \mathbb{C}c$, alors l'espace $\widehat{V} = \text{Sym}(\widehat{S}_-)$ est \widehat{W} -stable ainsi que $\mathbb{C}(\Gamma)$ (où Γ désigne le réseau de Φ), donc $V = \text{Sym}(\widehat{S}_-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\Gamma)$ est \widehat{W} -stable, ainsi que son dual algébrique $\overline{V} = \overline{V}^* = \text{Sym}^*(\widehat{S}_-^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\Gamma)$, dont $\widehat{M}^+(\underline{\mathfrak{h}})$ est un sous espace qui est \widehat{W} -stable d'après le théorème 3.5. précédent. Ceci explique et justifie l'intérêt important que revêt la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie de Frenkel-Kac sur l'espace fondamentale $V = \text{Sym}(\widehat{S}_-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\Gamma)$ dans [1] et [2].

Bibliographie.

- [1] I.B. FRENKEL et V.G. KAC, *Basic representation of affine Lie algebras and dual resonance models*, Invent. Math. (62) 1980 (23-66).
- [2] M. RACHIDI, *Transformation de Mellin algébrique et Algèbres de Mellin-Lie. I.*

- [3] I.B. FRANKEL, *Two construction of affine Lie algebras representations and Boson-Fernion correspondance in Q uantum Field theory.*
- [4] J.E. HUMPHREYS : *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag. New-York - Heidelberg - Berlin.

Appendice.

Soit \mathfrak{G} une \mathbb{C} -algèbre de Lie simple de dimension finie, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{G} , et Φ un système de racines de $(\mathfrak{G}, \mathfrak{h})$. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de racines simples de Φ . Alors, il existe un élément unique h_0 dans \mathfrak{h} tel que :

$$\alpha_i(h_0) = 1$$

pour tout $\alpha_i \in \Delta$. En effet :

Soit $h_0 = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i$ où $\ell = \text{rang}(\mathfrak{G}) = \dim \mathfrak{h}$

Il s'agit de déterminer a_1, \dots, a_ℓ tel que $\alpha_i(h_0) = 1$ ($1 < i < \ell$) or :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_1(h_0) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p \langle \alpha_1 | \alpha_p \rangle = 1 \\ \alpha_2(h_0) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p \langle \alpha_2 | \alpha_p \rangle = 1 \\ \alpha_\ell(h_0) = \sum_{p=1}^{\ell} a_p \langle \alpha_\ell | \alpha_p \rangle = 1 \end{cases}$$

est un système linéaire de ℓ équations à ℓ inconnues a_1, \dots, a_ℓ , qui est équivalent à l'équation matricielle :

$$A \cdot a = I, \quad (M)$$

où $a = {}^t(a_1, \dots, a_\ell)$ et $I = {}^t(1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^\ell$, et :

$$A = (\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle) \quad 1 \leq i, j \leq \ell$$

qui n'est autre que la matrice de Cartan d'un système irréductible de racines [4], qui est non-généralisée, par conséquent, (S) admet une solution unique.

L'élément h_0 est appelé "élément hauteur" pour toute $\alpha \in \Phi$:

$$\alpha(h_0) = \text{ht}(\alpha) .$$