PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

SAMUEL D. EKONG

**Sur l'analyse algébrique I**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1985, fascicule 6A
, p. 19-42
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___6A_19_0>

Publications du Departement

de Mathématiques

1985 - 6/A

---

# SUR L'ANALYSE ALGEBRIQUE I

par Samuel D. EKONG

## INTRODUCTION.

Expliquer par l'algèbre certaines théories de l'analyse et en dégager les aspects géométriques, est une démarche séduisante qui a toujours stimulé l'imagination du mathématicien.

De nombreuses contributions, celles notamment de P. Deligne [6] , B. Malgrange [14] N. Katz [13], M. Kashiwara [12], W. Jurkat et D. Lutz [11] , J. Moser [18], l'Ecole Soviétique avec B.A. Dubrovin, N.B. Matveev, S.P. Novikov [8], I.M. Kricever [14] - [15], Y.U. Manin [17] , prouvent, s'il en était besoin, que l'univers des équations différentielles se prête particulièrement bien à ce type d'investigation.

Le travail que nous présentons ici est une modeste contribution dans cette théorie ; c'est un acte militant dans la demarche invoquée plus haut et un hommage à Monsieur le Professeur Jean Braconnier qui fut notre Maître et le Directeur du Laboratoire d'Algèbre et Analyse.

Nous n'avons pas la prétention de livrer ici un travail original sur un sujet qui n'est pas nouveau, maintes et maintes fois traité et dont de nombreux résultats sont depuis longtemps connus.

Nous espérons cependant que la mathématicien le moins averti y trouvera quelque intérêt ; il pourra alors profiter de l'occasion pour consulter s'il ne l'a déjà fait, les ouvrages de M. Demazure et P. Gabriel : Groupes algébriques [7] N. Bourbaki : Groupes et Algèbres de Lie [4] , J.P. Serre : Lie Algebras and Lie groups [20] qui traitent de manière plus exhaustive certains des sujets abordés ici particulièrement les distributions et opérateurs différentiels algébriques.

L'article se divise en gros en deux parties ; la première partie qui fait l'objet de cette publication est consacrée aux opérateurs différentiels algébriques et aux distributions sur un groupe algébrique affine ; leurs liens avec les équations différentielles à coefficients constants sont établis en dimension 1.

Dans la deuxième partie seront abordées les questions concernant les équations différentielles à coefficients variables et les équations différentielles à plusieurs variables. Les méthodes mises au point par P. Deligne; N. Katz, B. Malgrange, R. Gerard et A.H.M. Levelt, nous seront particulièrement utiles pour l'élaboration de cette partie.

## NOTATIONS ET DEFINITIONS.

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0, G est un groupe algébrique affine et $\mathbb{K}(G) = A$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions régulières sur G, est une $\mathbb{K}$-algèbre affine réduite de type fini.

$G = \mathrm{SPIN}(A)$ est le spectre maximal de A.

Notons suivant A. Borel [2] :

$A(\mathbb{K}) = \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}-ev}(A,\mathbb{K})$ : le dual de A.

$A(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}-ev}(A,A) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ : la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de A.

Soit $\mu : G \times G \to G$

$$(x,y) \to \mu(x,y) = xy$$

la loi de groupe de G ; $\mu$ induit un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres noté $\mu_o$ de A dans $A \otimes_{\mathbb{K}} A$, appelé le comorphisme de $\mu$.

## 1. Convolution - Distributions et opérateurs différentiels.

### 1.1 CONVOLUTION.

$\forall (u,u') \in A(\mathbb{K})^2$, posons : $u * u' = (u \otimes u') \circ \mu_o$, $u * u'$ est alors une forme linéaire sur A

$$A \xrightarrow{\mu_o} A \otimes_{\mathbb{K}} A \xrightarrow{u \otimes u} \mathbb{K} \quad , \text{ et } (u,u') \longrightarrow u * u' \text{ , ...}$$

défini une multiplication dans $A(\mathbb{K})$ appelée le produit de convolution.

Soit e l'élément neutre de G et soit $\varepsilon_e$ le morphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre A dans $\mathbb{K}$, dont le noyau est e ; pour tout élément f de A, on a $\varepsilon_e(f) = f(e)$ on vérifie alors sans peine que $\varepsilon_e$ est l'élément neutre de $A(\mathbb{K})$ muni du produit de convolution.

PROPOSITION 1.

*1°) $A(\mathbb{K})$, muni du produit est une $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère.*

*2°) $A(\mathbb{K})$ , est commutative ssi, $G$ est abélien.*

PREUVE.

1°) est un fait bien connu (voir par exemple [2]).

2°) Soit $\varepsilon_o : G \longrightarrow A(\mathbb{K})$ , où $\varepsilon_g$ est le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres :
$g \longrightarrow \varepsilon_g$

$\varepsilon_g : A \to \mathbb{K}$ dont le noyau est g.

$$\forall f \in A , \forall g \in G , \quad \varepsilon_g(f) = f(g)$$

$\forall (g,g') \in G^2 , \quad \varepsilon_{gg'}(f) = f(gg')$, pour tout f de A, donc :

$$\varepsilon_{gg'}(f) = f \circ \mu(g,g')$$

Soit f un élément de A, posons

$\mu_o(f) = \sum_i f_i \otimes h_i$ , il vient

$$f(gg') = \sum_i f_i(g)\, h_i(g') = \sum_i \varepsilon_g(f_i)\varepsilon_g(h_i)$$

$$= (\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g'}) \left( \sum_i f_i \otimes h_i\right)$$

$$= (\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g'}) \circ \mu_o(f)$$

$= \varepsilon_g * \varepsilon_{g'}(f)$ , d'où l'on tire

$$\varepsilon_{gg'} = \varepsilon_g * \varepsilon_{g'}$$

par conséquent si $A(\mathbb{K})$ est commutative on a $\varepsilon_{gg'} = \varepsilon_g * \varepsilon_{g'} = \varepsilon_{g'} * \varepsilon_g = \varepsilon_{g'g}$.

Comme $\varepsilon_.$ est injective, on en déduit que : $\forall (g,g') \in G^2$ , $gg' = g'g$. Par conséquent G est abélien.

Réciproquement, si g est abélien, on a $\forall\ (x,y) \in G^2$ , $\forall\ f \in A$

$f(xy) = f(yx)$ ; donc si $\mu_o(f) = \sum_i f_i \otimes h_i$

$$f(xy) = f \circ \mu(x,y) = \mu_o(f)(x,y)$$

$$= \sum_i f_i(x), h_i(y)$$

$$= \sum_i h_i(x) f_i(y) = (\sum_i h_i \otimes f_i)(x,y) ,$$

on en déduit alors que

$$\sum_i f_i \otimes h_i = \sum h_i \otimes f_i$$

$\forall (u,u') \in A(K)^2$ , $\forall\ f \in A$, on a

$$u * u'(f) = u \otimes u'( \sum_i f_i \otimes h_i)$$

$$= \sum_i u\ (f_i) u'(h_i)$$

$$= \sum_i u'(f_i) u(h_i)$$

$$= u' * u(f) \quad , \text{ d'où}$$

$u * u' = u' * u$ , donc $A(K)$ est commutative. C.Q.F.D.

REMARQUE.

Considérons $\varepsilon_{\cdot} : G \longrightarrow A(K)$ , $\forall (g,g') \in G$ on a
$g \longmapsto \varepsilon_g$

on a $\varepsilon_{\cdot}(gg') = \varepsilon_{gg'} = \varepsilon_g * \varepsilon_{g'}$ , $\varepsilon_{gg^{-1}} = \varepsilon_g * \varepsilon_{g^{-1}} = \varepsilon_e$

donc $\varepsilon_{\cdot}$ est un monomorphisme de G dans le groupe U(A(K)), des éléments inversibles de A(K) ; on peut alors identifier G à un sous-groupe du groupe abstrait U(A(K)).

## I.2. Les applications $I.$ et $\varepsilon_e o$ .

Posons : $I = id_A$ l'application identique de $A$, dans $A$, et pour tout élément $u$ de $A(\mathbb{K})$ $I.u = (I \otimes u) \circ \mu_o$ ; $I.$ est alors l'application composée $A \xrightarrow{\mu_o} A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \xrightarrow{I \otimes u} A$ , il est clair que $I.u \in A(A)$ ce qui permet de définir l'application $I. : \begin{array}{l} A(\mathbb{K}) \to A(A) \\ u \to I.u \end{array}$ $\forall D \in A(A)$, $\varepsilon_e o\ D \in A(\mathbb{K})$ , d'où l'application $\varepsilon_e\ o : \begin{array}{l} A(A) \longrightarrow A(\mathbb{K}) \\ D \longrightarrow \varepsilon_e \circ D \end{array}$

PROPOSITION 2.

*$I.$ est un isomorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $A(\mathbb{K})$ , sur la $\mathbb{K}$-algèbre des éléments de $A(A)$ invariants par les translations à gauche $(Lg)_{g \in G}$ , dont l'isomorphisme réciproque $(I.)^{-1}$ , est la restriction de $\varepsilon_e o$ à la $\mathbb{K}$ -algèbre des éléments de $A(A)$ invariants par les translations à gauche.*

PREUVE.

La linéarité de $I.$ (resp. $\varepsilon_e o$) est évidente ; montrons que $I.$ est un morphisme d'anneaux

$\forall (u,v) \in A(\mathbb{K})^2$ , on a :

$$\begin{aligned} I.(u * v) &= I \otimes (u*v) \circ \mu_o \\ &= I \otimes [(u \otimes v) \circ \mu_o] \circ \mu_o \\ &= [(I \otimes u \otimes v) \circ \mu_o] \circ \mu_o \\ &= [(I \otimes u \circ I \otimes v) \circ \mu_o] \circ \mu_o \\ &= [(I \otimes u) \circ I.v\ ] \circ \mu_o \\ &= I \otimes [u \circ (I.v)] \circ \mu_o \\ &= I.(u \circ (I.v)) \\ &= I.u \circ I.v \end{aligned}$$

, donc $I.$ est un morphisme d'anneaux.

Montrons que tout élément $D$ de $Im(I.)$ est invariant par les translations à gauche (induites par les éléments de $G$ ; : $\forall g \in G$ notons $\gamma_g{-1} : \begin{array}{l} G \to G \\ x \to g^{-1}x \end{array}$ la translation à gauche dans $G$ induite par $g^{-1}$ , le comorphisme $(\gamma_g{-1})_o : A \to A$

induit par $g^{-1}$ est noté $L_g$ ; $D \in A(A)$ est dit invariant par les translations à gauche, si $\forall g \in G$, $L_g \circ D = D \circ L_g$.

Soit $D = I.u \in Im(I.)$

$\forall f \in A$ , $\forall (g,x) \in G^2$ , on a

$$\begin{aligned} L_g \circ D(f)\ (x) &= L_g \circ (I.u)(f)(x) \\ &= I.u(f) \circ \gamma_{g^{-1}}(x) \\ &= I.u(f)(g^{-1}x) \\ D \circ L_g(f)(x) &= I.u \circ L_g(f)(x) \\ &= I.u(f \circ \gamma_{g^{-1}})(x) \\ &= i.u(f(g^{-1}x)) \end{aligned}$$

d'où $\quad D \circ L_g(f)(x) = I.u(f)(g^{-1}x)$

donc $Lg \circ D = D \circ L_g$.

Désignons par $Inv_G(A(A))$, les éléments de $A(A)$ invariants par les translations à gauche $L_g$ , $g \in G$.

La restriction de $\varepsilon_e o$ au $\mathbb{K}$-espace vectoriel $Inv_G(A(A))$ est injective ; en effet soit $D \in Inv_G(A(A))$ alors : $\forall g \in G$, $\forall f \in A$ , on a :

$$\varepsilon_e \circ (L_g \circ D)(f) = \varepsilon_e \circ (D \circ L_g)(f) \Rightarrow$$

$$L_g \circ D(f)(e) = \varepsilon_e \circ (D \circ L_g)(f) \Rightarrow$$

$$D(f)(g^{-1}) = (\varepsilon_e \circ D) \circ L_g(f).$$

Si $D \in \ker(\varepsilon_e o)$ alors $\varepsilon_e \circ D \circ L_g = 0 \quad \forall g \in G$ d'où

: $Df(g^{-1}) = 0 \quad \forall g \in G$ , $\forall f \in A$ donc $D = 0$ donc la restriction de $\varepsilon_e o$ à $Inv_G(A(A))$ est un monomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$\forall f \in A$ , $\forall u \in A(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_e o\ (I;u)(f) &= \varepsilon_e\ o\ (I \otimes u)\ o\ \mu_o(f) \\
&= \varepsilon_e\ o\ I \otimes u\ (\sum_i f_i \otimes h_i) \\
&= \varepsilon_e(\sum_i f_i\ u(h_i)) \\
&= \sum_i f_i(e)u(h_i) \\
&= u(\sum_i f_i(e)h_i) \\
&= u(f)
\end{aligned}$$

car si $\mu_o(f) = \sum_i f_i \otimes h_i$ alors $f = \sum_i f_i(e)h_i = \sum_i h_i(e)f_i$ donc $\varepsilon_e\ o\ (I.)(u) = u$, $\forall\, u \in A(\mathbb{K})$ d'où $\varepsilon_e o(I.) = id_{A(\mathbb{K})}$ donc la restriction de $\varepsilon_e o$ à $Inv_G(A(A))$ est un isomorphisme dont la bijection réciproque est I. d'où $Inv_G(A(A)) = Im(I.)$.

Il reste à prouver que $\varepsilon_e o$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres

$$\forall\ (D,D') \in Im(I.)^2\ \exists (u,u') \in A(\mathbb{K})^2$$

$$D = I.u\ ,\ D' = I.u'$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_e\ o\ (D\ o\ D') &= \varepsilon_e o(I.u\ o\ I.u') \\
&= \varepsilon_e o(I.(u * u') \\
&= u * u' \\
&= (\varepsilon_e\ o\ D) * (\varepsilon_e\ o\ D'). \qquad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

## 1.3 DISTRIBUTIONS SUR G.

DEFINITION . Posons $J = \ker(\varepsilon_e)$ ; soit $u \in A(\mathbb{K})$ , on dit que u est une distribution (ponctuelle) sur G, s'il existe un entier naturel n tel que $u(J^{n+1}) = 0$.

Notons Dist(G), l'ensemble des distributions (ponctuelles) sur G. Soit u un élément de Dist(G) on dit que u est une distribution d'ordre inférieur ou égal à k si k est le plus petit entier naturel tel que $u(J^{k+1}) = 0$.

L'ensemble des distributions sur G d'ordre inférieur ou égal à n, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $Dist_n(G)$.

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$ , $J^{n+2} \subset J^{n+1}$ , on en déduit que $Dist_n(G) \subset Dist_{n+1}(G)$ et par conséquent $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^1$ $n \leqslant m \Rightarrow Dist_n(G) \subset Dist_m(G)$; $(Dist_n(G))_{n \in N}$ est donc une famille filtrante croissante et $Dist(G) = \bigcup_{n \in N} Dist_n(G)$ ; ainsi, $Dist(G)$ est filtré par les $Dist_n(G)$, $n \in N$.

## 1.4 CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS.

$\forall (u,v) \in Dist(G)^2 \subset A(\mathbb{K})^2$ , $u * v \in A(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 3.

*a)* $Dist(G)$ *est une sous-algèbre de* $A(\mathbb{K})$.

*b)* $Dist_o(G)$ *est une sous-algèbre de* $Dist(G)$ .

PREUVE.

a) $\forall (u,v) \in Dist(G)^2$ , $\exists (m,n) \in N^2$ , tel que $u \in Dist_n(G)$, $v \in Dist_m(G)$ ; montrons que $u * v \in Dist_{m+n}(G)$.

$\forall\, f \in A$, $\mu_o(f) = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes h_i$ , d'où $\forall x \in G$

$$f(x) = f(xe) = f \circ \mu(x,e) = \mu_o(f)(x,e)$$

d'où $f(x) = \sum_{i=1}^{r} h_i(e) f_i(x) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{r} h_i(e) f_i$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i(e) h_i$$

$\forall\, f \in J^{m+n+1}$ , $u(f) = v(f) = 0 \Rightarrow f \in \ker(u) \cap \ker(v)$ , comme $f = \sum_{i=1}^{r} h_i(e) f_i$ $= \sum_{i=1}^{r} f_i(e) h_i$ et que pour $1 < i < r$ , $f_i(e) \in \mathbb{K}$ et $h_i(e) \in \mathbb{K}$ , on peut prendre $f_i$ (resp. $h_i$) dans $\ker(u)$ (resp. $\ker(v)$) ; d'où

$$u * v(f) = u \otimes v \left( \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes h_i \right) = \sum_{i=1}^{r} u(f_i)\, v(h_i) = 0$$

donc $u * v\, (J^{m+n+1}) = 0 \Rightarrow u * v \in Dist_{m+n}(G)$ par conséquent $\forall (u,v) \in Dist(G)^2$ , $u * v \in Dist(G)$ il est alors clair que $Dist(G)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

b) $\mathrm{Dist}_o(G)$ est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathrm{Dist}(G)$ ; $\forall\ (u,v) \in \mathrm{Dist}_o(G)^2$, $u * v \in \mathrm{Dist}_o(G)$ d'après a) donc $\mathrm{Dist}_o(G)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Dist}(G)$.

DEFINITION.

*La* $\mathbb{K}$*-algèbre associative* $\mathrm{Dist}(G)$ *est appelée l'algèbre des distributions (ponctuelles) sur* $G$*,* $\mathrm{Dist}(G)$ *est unifère et son élément neutre est* $\varepsilon_e$ *. Posons* $\mathrm{Dist}^+(G) = \{u \in \mathrm{Dist}(G)/u(1) = 0\}$ *où* $1$ *désigne l'élément neutre de* $A$.

PROPOSITION 4.

$\mathrm{Dist}^+(G)$ *est un idéal bilatère de* $\mathrm{Dist}(G)$ *et* $\mathrm{Dist}(G) = \mathrm{Dist}_o(G) \oplus \mathrm{Dist}^+(G)$.

PREUVE.

Il est clair que $\mathrm{Dist}^+(G)$ , est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Dist}(G)$ ;

$$\forall\ u \in \mathrm{Dist}^+(G)\ ,\ \forall\ v \in \mathrm{Dist}(G)$$

$$u * v(1) = u \otimes v\ (1 \otimes 1) = u(1)v(1) = 0$$

donc $u * v$ et $v * u$ sont dans $\mathrm{Dist}^+(G)$ d'où $\mathrm{Dist}^+(G)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{Dist}(G)$.

Soit $u \in \mathrm{Dist}_o(G)$ , on a $u(J) = 0$ , d'où $J \subset \ker(u)$ par conséquent $\ker(u) = A$ ou $\ker(u) = J = \ker(\varepsilon_e)$.

$\ker(u) = A \Longleftrightarrow u = 0$ , supposons $u \neq 0$ alors $\ker(u) = \ker(\varepsilon_e)$ d'où $u = \lambda\varepsilon_e$, $\lambda \in K$ d'où $\mathrm{Dist}_o(G) = \mathbb{K}\varepsilon_e$.

$\forall\ u \in \mathrm{Dist}^+(G) \cap \mathrm{Dist}_o(G)$, $u = \lambda\varepsilon_e$ et $u(1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ d'où $u = 0$ ;

donc $\mathrm{Dist}^+(G) \cap \mathrm{Dist}_o(G) = (0)$.

$\forall\ u \in \mathrm{Dist}(G)$ , posons $v = u-u(1)\varepsilon_e$ , alors $v \in \mathrm{Dist}(G)$ et $v(1) = 0$ d'où $v \in \mathrm{Dist}^+(G)$ donc $u = u(1)\varepsilon_e + v \in \mathrm{Dist}_o(G) + \mathrm{Dist}^+(G)$ on en déduit alors que

$$\mathrm{Dist}(G) = \mathrm{Dist}_o(G) \oplus \mathrm{Dist}^+(G) \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

1.5. OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR A.

Soient $n \in \mathbb{N}$ , $D \in A(A)$, $a \in A$ $\forall\ x \in A$ , on pose $ad(a)(D)(x) = D(ax)$ $ad(a)(D)(x) = D(ax)-aD(x)$.

DEFINITION.

*On dit que* D *est un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à* n *si* $\forall (a_i)_{o \leqslant i \leqslant n} \in A^{n+1}$ *, on a :*

$ad(a_o) \circ ad(a_1) \circ \ldots \circ ad(a_n)(D) = 0.$

On note $Dif^n(A)$, l'ensemble des opérateurs différentiels sur A d'ordre inférieur ou égal à n , et $Dif(A) = \bigcup_{n \in N} Dif^n(A)$.

$Dif^n(A)$, est un A-module à gauche et $(Dif^n(A))_{n \in N}$ , est une famille filtrante croissante qui fait de Dif(A) un A-module à gauche filtré.

On note Symb(A), l'algèbre graduée associée à Dif(A) ; Symb(A) est l'algèbre des symboles (principaux) de A.

Lorsque $A = \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ , est une algèbre de polynômes à n indéterminées $X_i$ , la structure de Dif(A) est bien connue (voir [1] ou [9]), c'est l'algèbre de Weyl à 2n indéterminées $\mathbb{K}< X_1,\ldots,X_n , \frac{\partial}{\partial X_1},\ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} >$ l'algèbre non commutative des polynômes en $(X_i , \frac{\partial}{\partial X_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ , à coefficients dans $\mathbb{K}$ , et Symb(A), muni du crochet de Poisson est une algèbre de Poisson (voir [1] , [5] , [9] ou [21]).

PROPOSITION 5.

*1°)* $\forall D \in Dif(A)$ , $\varepsilon_e \circ D \in Dist(G)$ ; *en particulier* $\forall D \in Der_{\mathbb{K}}(A,A) = Der_{\mathbb{K}}(A)$ *le* A*-module des* $\mathbb{K}$*-dérivations de* A *dans* A *,* $\varepsilon_e \circ D \in Der_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})$ *le* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel des* $\mathbb{K}$*-dérivations de* A *dans* $\mathbb{K}$.

*2°)* $\forall n \in N$ , $\forall D \in Dif^n(A)$

$\varepsilon_e \circ D \in Dist_n(G)$ .

*3°) La restriction de* I. *à* Dist(G) *, est un isomorphisme de* Dist(G) *sur la sous-algèbre de* Dif(A) *, notée* $\mathcal{D}$if(A) *formée des éléments de* Dif(A) *invariants par les translations à gauche.*

PREUVE.

$\forall D \in Dif(A)$, $\varepsilon_e \circ D \in A(\mathbb{K})$ ; montrons que $\varepsilon_e \circ D \in Dist(G)$.

$D \in \mathrm{Dif}(A) \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ D \in \mathrm{Dif}^n(A)$ ; donc $\forall\,(a_o,a_1,\ldots,a_n) \in A^{n+1}$.

$$D(a_o,a_1\ldots a_n) = \sum_{\substack{H \subseteq I \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{\mathrm{card}(H)-1}\, a_H\, D(a_{I-H}) \ , \text{ où}$$

$$I = \{0,1,\ldots,n\} \ , \ a_H = \prod_{h \in H} a_h \ , \ D(a_\emptyset) = 1$$

$\forall\,(a_o,a_1,\ldots,a_n) \in J^{n+1}$ , on a

$$\varepsilon_e \circ D(a_oa_1\ldots a_n) = \sum_{\substack{H \subseteq I \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{\mathrm{card}(H)-1}\, \varepsilon_e(a_H)\,\varepsilon_e \circ D(a_{I-H})$$

or $\varepsilon_e(a_H) = 0$ , $\forall\, H,\ H \subseteq I - \emptyset$ , donc $\varepsilon_e \circ D(J^{n+1}) = 0$ , d'où

$\varepsilon_e \circ D \in \mathrm{Dist}_n(G)$. Si $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$, on vérifie sans peine que $\varepsilon_e \circ D$ est une $\mathbb{K}$-dérivation de A dans $\mathbb{K}$ ce qui démontre 1°) et 2°).

$\forall\, u \in \mathrm{Dist}_n(G)$, montrons que $I.u \in \mathrm{Dif}^n(A)$ la démonstration pour $n > 1$ est la même que pour $n = 1$ mais les calculs sont évidemment plus longs ; montrons comment on procède pour $n \leqslant 1$.

Pour $n = 0$ , $u \in \mathrm{Dist}_o(G) \Longleftrightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ u = \lambda\varepsilon_e$ ; donc $I.u = \lambda I.\varepsilon_e = \lambda I$ donc $I.u = \lambda I.\varepsilon_e = \lambda I \in \mathscr{D}\mathrm{if}^o(A)$.

Pour $n = 1$ , soit $u \in \mathrm{Dist}_1(G)$, alors $\forall (a_o,a_1) \in A^2$ , on a

$I.u(a_oa_1) = I \otimes u(\mu_o(a_o)\mu_o(a_1))$.

Posons $\mu_o(a_o) = \sum_i f_{oi} \otimes h_{oi}$ , $\mu_o(a_1) = \sum_j f'_{1j} \otimes h'_{1j}$.

Il vient $\mu_o(a_o)\mu_o(a_1) = \sum_i \sum_j f_{oi}\, f'_{1j} \otimes h_{oi}\, h'_{1j}$ d'où

$I.u(a_oa_1) = \sum_i \sum_j f_{oi}\, f'_{1j}\, u(h_{oi}\, h'_{1j})$. Posons $h_{oi} = \theta_{oi} + \omega_{oi}$ où $(\theta_{oi},\ \theta'_{1j}) \in J^2$

$$h'_{1j} = \theta'_{1j} + \omega'_{1j} \qquad (\omega_{oi},\ \omega'_{1j}) \in (\mathbb{K}.1)^2$$

on a alors $\quad h_{oi}\, h'_{1j} = \theta_{oi}\, \theta'_{1j} + \omega'_{1j}\ \theta_{oi} + \omega_{oi}\ \theta'_{1j} + \omega_{oi}\,\omega'_{1j}$

$$\theta_{oi}\, \theta'_{1j} \in J^2 \Rightarrow u(\theta_{oi}\, \theta'_{1j}) = 0 \ , \text{ d'où}$$

$$I.u(a_o a_1) = \sum_i \sum_j f_{oi} f'_{1j} [\omega'_{1j} u(\theta_{oi}) + \omega_{oi} u(\theta'_{1j}) + \omega_{oi}\omega'_{1j} u(1)\ ]$$

$$= \sum_i \sum_j \omega'_{1j} u(\theta_{oi}) f_{oi} f'_{1j} + \sum_i \sum_j \omega_{oi}\ f_{oi} u(f'_{1j}) f'_{1j} + \sum_i \sum_j (\omega_{oi} f_{oi})(\omega'_{1j} f'_{1j}) u(1)$$

$$= \sum_i \sum_j [\ u(h_{oi}) - \omega_{oi} u(1)]\ f_{oi}(\omega'_{1j} f'_{1j})$$

$$+ \sum_i \sum_j \omega_{oi} f_{oi} [u(h'_{1j}) - \omega'_{1j} u(1)]\ f'_{1j}$$

$$+ \sum_i \sum_j (\omega_{oi} f_{oi})(\omega'_{1j} f'_{1j}) u(1)$$

$$= \sum_i [\ u(h_{oi}) f_{oi} - \omega_{oi} f_{oi} u(1) \sum_j \omega'_{1j}\ f'_{ij}$$

$$+ \sum_i \omega_{oi} f_{oi}\ [\sum_j u(h'_{1j}) f'_{1j} - \sum_j \omega'_{1j}\ f'_{1j}\ u(1)]$$

$$+ (\sum_i \omega_{oi} f_{oi} \sum_j \omega'_{1j}\ f'_{1j}) u(1)$$

$$= a_1 I.u(a_o) - a_1 a_o u(1) + a_o I.u(a_1) - a_o a_1 u(1) + a_o a_1 u(1)$$

$$= a_o I.u(a_1) + a_1 I.u(a_o) - a_o a_1 u(1)$$

donc $I.u \in \mathcal{D}if^1(A)$ .

Dans le cas où $A = \mathbb{K}[T]$ , cas que nous traiterons ultérieurement il suffit de prouver qu'il existe $D = \sum_{h=o}^{n} a_h(T) \frac{d^h}{dT^h}$ tel que $u = \varepsilon_e \circ D$ ; mais D est entièrement déterminé par les $a_h(T)$ en supposant les $a_h(T) = a_h$ constants on obtient un système de Cramer qui prouve l'existence et l'unicité de D

$\forall u \in Dist(G)$ , $\varepsilon_e \circ (I.u) = u$ ,

par conséquent la restriction de $\varepsilon_e$ o à $\mathcal{D}if(A)$ a pour isomorphisme réciproque la restriction de I. à Dist(G).

Le reste de la proposition découle de la proposition 2.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ , notons $\mathcal{D}if^n(A)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des éléments de $\mathcal{D}if(A)$ d'ordre inférieur ou égal à n $(\mathcal{D}if^n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration croissante du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}if(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}if^n(A)$

## 2. Le cas où $A = \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ .

Lorsque $A = \mathbb{K}[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à n indéterminées $X_i$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ , on sait que $\mathrm{Dif}(A) = \mathbb{K}\langle X_1,\ldots,X_n , \frac{\partial}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_n}\rangle$ : l'algèbre de Weyl à 2n indéterminées $(X_i, \frac{\partial}{\partial X_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ c'est une algèbre non commutative.

Le cas n=1, nous servira d'introduction à l'étude des équations différentielles.

### 2.1. <u>LE GROUPE AFFINE $G = (\mathbb{K},+)$</u>

On a pour $G = (\mathbb{K},+)$, $A = \mathbb{K}[T]$ , $\mathrm{Dif}(A) = A\langle \frac{d}{dT}\rangle$ $\varepsilon_e = \varepsilon_o$ , $\varepsilon_o(T) = T(0) = 0$, et $\mu_o(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ . Soit $\Delta_j$ , la j-ième forme coordonnée sur A relativement à la base $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A on a alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ , $\langle T^i, \Delta_j\rangle = \delta_{ij}$ : le symbole de Kronecker.

Posons $\Delta_o = I$ , $\Delta_1 = \Delta$ , on a la

<u>PROPOSITION 6.</u>

*1°) muni du produit de convolution* $A(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[[\Delta]]$: *la* $\mathbb{K}$*-algèbre des séries formelles en* $\Delta$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ .

*2°)* $\mathrm{Dist}(G) = \mathbb{K}[\Delta]$ : *la* $\mathbb{K}$ *-algèbre des polynômes en* $\Delta$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ .

*3°)* $\mathcal{D}if(A) = \mathbb{K}[\frac{d}{dt}]$ : *la* $\mathbb{K}$ *-algèbre des opérateurs différentiels sur A à coefficients constants.*

<u>PREUVE.</u>

1°) $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $A(\mathbb{K})$ donc :

$\forall u \in A(\mathbb{K}) \quad , u = \sum_{k \in N} \alpha_k \Delta_k \quad , \alpha_k \in \mathbb{K}$

$\forall k \in N$ , on a : $\Delta_k = \frac{1}{k!} \Delta^k$ , en effet

$$\Delta(T^k) = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 1 \\ 0, \text{ si } k \neq 1 \end{cases}$$

$$\Delta^2(T^k) = (\Delta \otimes \Delta) \circ \mu_o(T^k$$

$$= \Delta \otimes \Delta \left( \sum_{r=o}^{k} C_k^r \, T^r \otimes T^{k-r} = \sum_{r=o}^{k} C_k^r \, \Delta(T^r)\Delta\,(T^{k-r}) \right.$$

$$= \begin{cases} 2 \text{ , si } k = 2 \\ 0, \text{ si } k \neq 2 \end{cases}$$

d'où $\Delta^2 = 2! \, \Delta_2$ .

Supposons la propriété vraie pour $k-1>2$

alors : $\Delta^{k-1} = (k-1)! \, \Delta_{k-1}$

$$\forall m \in N \quad , \Delta^k(T^m) = \Delta \otimes \Delta^{k-1}\left( \sum_{b=o}^{m} C_m^r \, T^r \otimes T^{m-r} \right)$$

$$= \sum_{=o}^{m} C_m^r \, \Delta(T^r) \, \Delta^{k-1}(T^{m-r})$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ si } m \neq k \\ (k-1)! \; C_k^1 \text{ , si } m = k \end{cases}$$

d'où $\Delta^k = k! \, \Delta_k$

Donc $\forall u \in A(\mathbb{K})$ , $u = \sum_{k \in N} a_k \underline{\Delta}^k$ , $a_k \in \mathbb{K}$ donc $u \in \mathbb{K}[[\Delta]]$ .

Il est clair que tout élément de $\mathbb{K}[[\Delta]]$ appartient à $A(\mathbb{K})$ puisque $\forall u \in \mathbb{K}[[\Delta]]$ , $\forall f \in A$, $u(f)$ est la somme d'un nombre fini de termes ; $\forall (k,m) \in N^2$ , $\varepsilon_o \circ \frac{d^k}{dT^k}(T^m) = \frac{m!}{(m-k)!}$ , $\varepsilon_o(T^{m-k})$

$$= \begin{cases} o, \text{ si } m \neq k \\ k! \text{ , si } m = k \end{cases} ,$$

d'où $\varepsilon_o \circ \frac{d^k}{dT^k} = k\,!\ \Delta = \Delta^k \in \mathrm{Dist}(G)$

$\forall D \in \mathcal{D}if(A)$ , $D = \sum_{k=o}^{m} a_k(T) \frac{d^k}{dT^k}$ , d'où

$$\varepsilon_o \circ D = \sum_{k=o}^{m} a_k(0)\ \varepsilon_o \circ \frac{d^k}{dT^k} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\ \Delta^k .$$

On en déduit alors que $\mathrm{Dist}(G) = \mathbb{K}[\Delta]$ et d'après la proposition 5 :

$$\mathcal{D}if(A) = I.(\mathrm{Dist}(G))$$

3°) $\forall D \quad \mathcal{D}if(A)$ , $D = I.u$ , $u = \sum_{k=o}^{m} \alpha_k\ \Delta^k$ .

d'où $\quad I.u = \sum_{k=o}^{m} \alpha_k\ I.(\varepsilon_o \circ \frac{d^k}{dT^k})$

$$= \sum_{k=o}^{m} \alpha_k \frac{d^k}{dT^k} \quad ; \text{ donc } \quad \mathcal{D}if(A) = \mathbb{K}[\tfrac{d}{dT}] .$$

PROPOSITION 7.

$$\forall g \in G\ ,\ \varepsilon_g = \sum_{k \in N} \frac{(g\Delta)^k}{k!} ,$$

$$= \exp(g\Delta)$$

*en particulier* $\varepsilon_o = \Delta^o$ ; *la distribution de Dirac à l'origine.*

PREUVE.

$\forall g \in G,\ \varepsilon_g = \sum_{k=o}^{+\infty} \alpha_k\ \Delta_k$ ; $\alpha_k = \varepsilon_g(T^k) = (\varepsilon_g(T))^k = g^k$ donc

$$\varepsilon_g = \sum_{h=o}^{+\infty} g^k\ \Delta_k = \sum_{k=o}^{+\infty} \frac{g^k \Delta^k}{k!} \text{ , d'où } \varepsilon_g = \sum_{k=o}^{+\infty} \frac{(g\Delta)}{k!} = \exp(g\Delta).$$

COROLLAIRE.

$$\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(A,\mathbb{K}) \ ,\ u = \sum_{h=o}^{+\infty} \frac{(\alpha\Delta)^h}{h!} \text{ , où } \alpha = u(T).$$

PREUVE.

G étant identifié à $\{\varepsilon_g, g \in G\}$ , on a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(A,\mathbb{K}) = G$. (Théorème des zéros de Hilbert).

PROPOSITION 8.

*1°)* $u \in A(\mathbb{K})$ *est inversible ssi* $u(1) \neq 0$

*2°)* $u \in \mathrm{Dist}(G)$ *est inversible ssi* $u = a_o \varepsilon_o$ , *où* $a_o \in \mathbb{K}^*$.

PREUVE.

1°) $u \in A(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\exists u' \in A(\mathbb{K})$ tel que $u * u' = \varepsilon_o$ , par conséquent si u est inversible $u * u'(1) = 1 \Rightarrow u \otimes u'\ (1 \otimes 1) = U(1)u'(1) = 1 \Rightarrow u(1) \neq 0$ réciproquement si $u(1) = a_o \neq 0$ montrons qu'il existe $u' \in A(\mathbb{K})$ tel que $u * u' = \varepsilon_o$.

On a $u = \sum_{k \in N} a_k \Delta_k$ , u' est déterminé par les $u'(T^k) = \alpha_k$, $k \in N$.

$u \otimes u'\ (1 \otimes 1) = 1 = u(1)u'(1) \Rightarrow a_o u'(1) = 1$ d'où $u'(1) = a_o^{-1} = \alpha_o$.

$u \otimes u'(T \otimes 1 + 1 \otimes T) = a_1\ u'(1) + u(1)u'(T) = \varepsilon_o(T) \Rightarrow a_1 a_o^{-1} + a_o u'(T) = 0$ , d'où $u'(T) = \alpha_1 = - a_1\ a_o^{-2}$ .

Supposons $u'(T^{m-1})$ déterminé en fonction de $(a_i)_{o \leqslant i \leqslant m-1}$ , $m-1 \geqslant 2$ ; on a $u * u'(T^m) = u \otimes u'\ (\sum_{k=o}^{m} C_m^k\ T^{m-k} \otimes T^k) = \sum_{k=o}^{m} C_m^k\ u(T^{m-k})u'(T^k) = 0$

$$= \sum_{k=o}^{m-1} C_m^k\ u(T^{m-k})u'(T^k) + u(1)u'(T^m)$$

$$u'(T^m) = - \sum_{k=o}^{m-1} a_o^{-1} C_m^k\ u(T^{m-k})u'(T^k)$$

$$= - \sum_{k=o}^{m-1} a_o^{-1}\ a_{m-k}\ C_m^k\ u'(T^k)$$

donc $\forall k \in N$ , $u'(T^k)$ est déterminé et par conséquent u est inversible.

2°) Il est clair que tout élément de $\mathbb{K}^* \varepsilon_o$ est inversible ; réciproquement soit $\sum_{p=o}^{m} a_p\ \Delta^p$ , un élément inversible de Dist(G), d'ordre $m > 0$ ; alors son inverse $u' = \sum_{q=o}^{m'} b_q\ \Delta^q$ est un élément de Dist(G) d'ordre $m' > 0$.

$$u*u' = \sum_{r=0}^{m+m'} C_r \Delta^r , \text{ où } C_r = \sum_{p+q=r} a_p b_q$$

puisque $u*u' = \varepsilon_o$ , on en déduit que $a_m b_{m'} = 0$ , absurde donc $m = m' = 0$
d'où $u = a_o\varepsilon_o$ , $u' = b_o\varepsilon$ , $a_o b_o = 1 \Rightarrow a_o \in \mathbb{K}^*$.

COROLLAIRE .

*Les éléments inversibles de* $\mathcal{D}if(A)$ *sont de la forme* $D = a_o I$ , $a_o \in \mathbb{K}^*$.

2.2. SUR LES AUTOMORPHISMES DE $A = \mathbb{K}[T]$

Désignons par $\Gamma$ le groupe des automorphismes de l'anneau A, par $\Lambda$ le groupe des automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre A, et par $\Omega$ , le groupe des automorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel A.

PROPOSITION 9.

*Tout automorphisme* s *de l'anneau* A, *laisse (globalement ) invariant* $\mathbb{K}$ *et* s *est défini par* $s(T) = \lambda T+\mu$ , *où* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ .

*Le couple* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$, *détermine* s *de manière unique et la restriction* $\tilde{\sigma}_s$ *de* s *à* $\mathbb{K}$, *est un automorphisme de* $\mathbb{K}$.

Ces faits sont bien connus.

Avec les notations précédentes on a la :

PROPOSITION 10.

*1°)* $\Lambda = \Gamma \cap \Omega$

*2°)* $\Lambda$ *, est un sous-groupe normal de* $\Gamma$ *et le groupe quotient* $\Gamma/\Lambda$ *, est isomorphe au groupe* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ *des automorphismes du corps* $\mathbb{K}$ .

*3°)* $\Lambda$ *, est isomorphe au produit semi-direct* $\mathbb{K}^* \times_\theta \mathbb{K}$ *, où* $\theta$ *, est l'homomorphisme de* $\mathbb{K}^*$ *dans* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K},+)$ *, défini par :* $\forall a \in \mathbb{K}^*, \forall x \in \mathbb{K}$
$\theta(a)(x) = \gamma_a(x) = ax$.

PREUVE.

1°) résulte de la définition de ces groupes.

2°) soit res : $\Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$, définie par $\forall\ s \in \Gamma$, $\mathrm{res}(s) = \sigma_s$ : la restriction de s à $\mathbb{K}$; res est alors un épimorphisme de groupes et son noyau est $\Lambda$ ; donc $\Gamma/\Lambda \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$.

3°) $\forall\ \gamma \in \Lambda$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^* \quad \mathbb{K}$, tel que :

$\gamma(T) = \lambda T + \mu$ ; on peut alors identifier les ensembles $\Lambda$ et $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ ; la loi de groupe de $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ est définie par :

$$\forall\ \gamma = (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K},\ \forall \gamma' = (\lambda',\mu') \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} \gamma \circ \gamma' = (\lambda,\mu)(\lambda',\mu') &= (\lambda\lambda',\mu' + \lambda'\mu) \\ &= (\lambda\lambda',\mu' + \theta(\mu)(\lambda')) \ . \end{aligned}$$

On peut alors identifier $\Lambda$ au produit semi-direct $\mathbb{K}^* \times_\theta \mathbb{K}$ , d'où la suite exacte $0 \to \mathbb{K} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}^* \longrightarrow 1$ , $\Lambda$ , est par conséquent une extension du groupe additif $\mathbb{K}$ par le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$.

## 2.3. LES ALGEBRES $\widehat{\mathrm{Dif}}(A)$ et $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}}(A)$.

Soit $u \in A(\mathbb{K})$ alors, $u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Delta^k$ ,

comme $I.\Delta^k = I.(\varepsilon_e \circ \frac{d^k}{dT^k}$ , $\forall\ k \in \mathbb{N}$ , on en déduit que $I.u = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{d^k}{dT^k} \in A(A)$

car $\forall\ f \in A$, $I.u(f)$ est une somme finie.

Posons $\widehat{\mathrm{Dif}}(A) = A \ll \frac{d}{dT} \gg$ et $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}}(A) = \mathbb{K}[[\frac{d}{dT}]]$. $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}}(A)$ est alors une sous-algèbre commutative unifère de $\widehat{\mathrm{Dif}}(A)$ et on a la

PROPOSITION 11.

*L'application* $I.$ *de* $A(\mathbb{K})$ *dans* $A(A)$ *est un isomorphisme de la* $\mathbb{K}$*-algèbre* $A(\mathbb{K})$ *sur la* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}}(A)$ *et l'isomorphisme réciproque* $(I.)^{-1}$ *est la restriction de* $\mathcal{E}_o\ 0$ *à* $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}}(A)$.

PREUVE.

Se reporter à la proposition 2.

COROLLAIRE 1.

*$\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}(A)}$ est l'ensemble des éléments de A(A) invariants par les translations à gauche.*

COROLLAIRE 2.

*Soit U' (resp. U") le groupe des éléments inversibles de $A(\mathbb{K})$ (resp. Dist(G)) alors $I.U' = \hat{U}'$ (resp. $I.U'' = U''_o$ ) est le groupe des éléments inversibles de $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}(A)}$ (resp. Dif(A) ).*

COROLLAIRE 3.

*Soit $D = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \frac{d^k}{dT^k}$ , un élément de $\widehat{\mathcal{D}\mathrm{if}(A)}$ , si $\alpha_o \neq 0$ , alors D est un automorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel A ; par conséquent l'équation différentielle Df = 0, n'a pas de solution non triviale dans A.*

Ceci nous amènera dans la suite de cet article à élargir notre champ d'action en prenant pour cadre de nos investigations l'algèbre $A = \mathbb{K}[[T]]$ des séries formelles à une variable T et à coefficients dans $\mathbb{K}$ , ou son corps des quotients $\mathbb{K}((T))$.

Avant de clore cette partie, revenons encore à $\mathcal{D}\mathrm{if}(A)$.

## 2.4. LE CORPS DES QUOTIENTS DE $\mathcal{D}\mathrm{if}(A) = \mathbb{K}\left[\frac{d}{dT}\right]$

Il est bien connu que $\mathcal{D}\mathrm{if}(A)$ est un anneau euclidien ; le stathme étant, comme pour l'anneau des polynômes, la division euclidienne ; l'ordre d'un opérateur jouant ici le rôle du degré l'anneau $\mathcal{D}\mathrm{if}(A)$ est donc principal. Posons $K = \mathbb{K}(\frac{d}{dT})$ le corps des fractions de $\mathcal{D}\mathrm{if}(A)$.

$$D \in K \iff \exists (D_1, D_2) \in \mathcal{D}\mathrm{if}(A)^2 \;/\; D_2 \neq 0,\; D = D_1/D_2$$

posons $D_1 = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \frac{d^k}{dT^k}$ , $D_2 = \sum_{r=o}^{q} \beta_r \frac{d^r}{dT^r}$

les $\beta_r$ étant non tous nuls.

1°) Si $\beta_o \neq 0$ alors, $D_2$ est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}if(A)}$ donc $D_1 D_2^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}if(A)}$

2°) si $\beta_o = 0$ , soit $\ell$ le plus petit entier strictement positif tel que $\beta_\ell \neq 0$ ;

on a $$D_2 = \frac{d^\ell}{dT^\ell}(\beta_\ell \, Id + \beta_{\ell+1}\frac{d}{dT} + \ldots + \beta_q \frac{d^{q-\ell}}{dT^{q-\ell}})$$

$\beta_\ell \neq 0 \Rightarrow \sum_{r=o}^{q-\ell} \beta_{\ell+r} \frac{d^\ell}{dT^\ell}$ , inversible dans $\widehat{\mathcal{D}if(A)}$ , d'où $D = (\frac{d}{dT})^{-\ell} \circ D'$ ,

où $D' \in \widehat{\mathcal{D}if(A)}$ , on a alors la

PROPOSITION 12.

*Tout élément* $D$ *de* $K = \mathbb{K}(\frac{d}{dT})$ *, est de la forme* $D = (\frac{d}{dT})^k \circ D_1$ *ou* $k \in Z$ , $D_1 \in \widehat{\mathcal{D}if(A)}$.

*Soit* $\nu$ *l'application de* $\mathbb{K}(\frac{d}{dT})$ *dans* $\mathbb{K}$ *définie par* $\forall\, D = (\frac{d}{dT})^k \circ D_1 \in \mathbb{K}(\frac{d}{dT})$

$\nu(D) = k$ ; $\nu$ *est une valuation sur* $\mathbb{K}$ *, dont l'anneau est* $\widehat{\mathcal{D}if(A)}$ *et l'idéal maximal* $\mu_\nu = \{D \in K \ / \ \nu(D) > 0\}$*; par conséquent* $\widehat{\mathcal{D}if(A)}$ *est un anneau de valuation discrète (cette propriété peut aussi se déduire du fait que* $\widehat{\mathcal{D}if(A)} = \mathbb{K}[[\frac{d}{dT}]]$ . (voir [3] ou [19] ).

## 3. Convolution - Distribution - opérateurs différentiels et équations différentielles.

Dans cette partie, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; posons : $A = \mathbb{C}[[T]]$, la $\mathbb{C}$-algèbre des séries formelles à une variable T, à coefficients dans $\mathbb{C}$, G : le groupe affine $(\mathbb{C},+)$.

### 3.1. DISTRIBUTIONS ET OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR $A = \mathbb{C}[[T]]$.

Rappelons que A est un anneau de valuation discrète dont l'unique idéal maximal que nous noterons $\mathcal{M}_o$ est $\mathcal{M}_o = T$

Le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\varepsilon_o : \mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}$ se prolonge sur A en posant :

$\forall\, S(T) \in A$ , $\varepsilon_o(S(T)) = S(0)$ : le terme constant de S(T).

Si on note comme précédemment J le noyau de la restriction de $\varepsilon_o$ à $\mathbb{C}(T)$ on a :

$$\mathcal{M}_o = \ker(\varepsilon_o) \text{ et } J = \mathcal{M}_o \cap \mathbb{C}[T].$$

DEFINITION.

*Une distribution ponctuelle sur* A, *est une forme linéaire* u *sur* A, *telle qu'il existe un entier naturel* n *tel que* $u(\mathcal{M}_o^{n+1}) = 0$.

*Notons* $\mathcal{U}$ *l'ensemble des distributions ponctuelles sur* A.

PROPOSITION 13.

*1°)* $\mathcal{U}$ = Dist(G).

*2°)* Dif($\mathbb{C}$[T]), *est uns sous-algèbre de* Dif(A).

PREUVE.

1°) Soit $u \in \mathcal{U}$, la restriction de u à $\mathbb{C}$[T] est une forme linéaire et $u(\mathcal{M}_o^{n+1}) = 0 \Rightarrow u(J^{n+1}) = 0$ donc $u \in$ Dist(G) ; comme tout élément u de Dist(G) se prolonge de manière unique en un élément de $\mathcal{U}$, on en déduit que Dist(G) = $\mathcal{U}$.

2°) résulte du fait bien connu que Dif(A) = $A < \frac{d}{dT} >$ (voir [1]) on voit alors que I. (resp. ($\varepsilon_o$ 0) sont des morphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre de manière plus précise.

PROPOSITION 14.

*1°)* $\forall D \in$ Dif(A) , $\varepsilon_o$ o D $\in$ Dist(G)

*2°)* $\forall u \in$ Dist(G) , I.u $\in \mathcal{D}$if(A) = $\mathbb{C}\ [\frac{d}{dT}]$ .

*3°)* I. *et la restriction de* $\varepsilon_o$ *à* $\mathcal{D}$if(A) *sont des isomorphismes de* $\mathbb{C}$ *-algèbres et* $\varepsilon_o$ o (I.) = $Id_{Dist(G)}$.

3.2. SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ALGEBRIQUES.

Dans toute la suite, $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z\}$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de 0.

$\hat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[z]]$ , est l'anneau des séries formelles à une variable z, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

A est l'anneau des fonctions entières sur $\mathbb{C}$.

A et $\mathcal{O}$, s'identifient a des sous-anneaux de $\hat{\mathcal{O}}$.

G est le groupe algébrique affine $(\mathbb{C},+)$ $\mathbb{C}[z]$ est alors une sous-algèbre de A. $\hat{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}$ sont des anneaux de valuation discrète (voir [19]).

L'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}$ est $\hat{\mathcal{M}} = z\hat{\mathcal{O}}$ et l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ est $\mathcal{M} = z\mathcal{O}$.

D'après 3-1, on a les résultats suivants $\mathrm{Dist}(G) = \mathbb{C}[\Delta]$ .

Les applications : I. : $\mathrm{Dist}(G) \to \mathcal{D}\mathrm{if}(\hat{\mathcal{O}})$ et $\varepsilon_o o : \mathcal{D}\mathrm{if}(\hat{\mathcal{O}}) \to \mathrm{Dist}(G)$ sont des isomorphismes tels que $(I.)^{-1} = \varepsilon_o o$ .

Les éléments inversibles de Dist(G) sont de la forme $\alpha_o \varepsilon_o$ , $\alpha_o \in \mathbb{C}^*$ .

On en déduit que les éléments inversibles de $\mathcal{D}\mathrm{if}(\hat{\mathcal{O}})$ sont de la forme $\alpha_o I$ , où $\alpha_o \in \mathbb{C}^*$ ; par conséquent pour tout élément D de $\mathcal{D}\mathrm{if}(\hat{\mathcal{O}})$ d'ordre $m \geq 1$ $\ker D \neq 0$ d'où

THEOREME 1 (existence).

*Toute équation différentielle* $\sum_{k=o}^{m} \frac{d^k f}{dz^k} = 0$ , *d'ordre* $m \geq 1$ , *à coefficients constants a dans* $\hat{\mathcal{O}}$ *des solutions non triviales.*

THEOREME 2 (existence).

*Toute équation différentielle* $\sum_{k=o}^{m} a_k \frac{d^k f}{dz^k} = 0$ , *d'ordre* $m \geq 1$ , *à coefficients constants possède dans* A, *des solutions non triviales.*

PREUVE.

Elle est basée sur un calcul élémentaire d'indice ; rappelons que si E et F sont des espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F; on dit que u est à indice si la dimension de Ker(u) (resp. coker(u)) est finie ; l'indice de u, noté $\chi(u) = \dim(\ker(u)), \dim \mathrm{coker}(u))$. Soit $\hat{D} = \sum_{k=o}^{m} a_k \frac{d^k}{dz^k} \in \mathcal{D}\mathrm{if}(\hat{\mathcal{O}})$ , $m \in \mathbb{N}^*$ et soit D (resp $\tilde{D}$ ) la restriction de $\tilde{D}$ à $\mathcal{O}$(resp. A). Les opérateurs $\hat{D}$ et D sont à indice (voir B. Malgrange [16]). On en déduit que D est à indice et l'indice $\chi(D)$ de D est égal à $m(1-b^1) - v(a_m,\mathbb{C})$, où $b^1 = \dim(H^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{C}))$ et $v(a_m,\mathbb{C})$ est le nombre des zéros de $a_m$ dans $\mathbb{C}$ , comptés avec leurs ordres de multiplicité (B. Malgrange [16] ).

Posons $H^1(\mathbb{C}) = H^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{C}) = Z^1(\mathbb{C})/B^1(\mathbb{C})$ où $Z^1(\mathbb{C}) = Z^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (resp. $B^1(\mathbb{C}) = B^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{C})$) est le groupe des 1-cocycles (resp. 1-cobords).

$\forall f \in Z^1(\mathbb{C})$ , $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{+2}$ , on a $f(zz') = zfz') + f(z)$ ; par conséquent si $a \in \mathbb{C}^*$ et si $a \neq 1$, on a pour tout $z$ de $\mathbb{C}^*$ :

$$\begin{aligned} f(za) &= zf(a) + f(z) \\ &= af(z) + f(a) \quad , \text{ d'où} \end{aligned}$$

$(a-1)f(z) = (z-1)f(a)$ , d'où l'on tire $f(z) = \frac{f(a)}{a-1}(z-1)$.

Donc $f \in B^1(\mathbb{C})$ et par conséquent $H^1(\mathbb{C})=(0)$ , donc $b^1 = 0$.

Comme $a_m \in \mathbb{C}^*$ , on a $v(a_m,\mathbb{C}) = 0$ donc $\chi(\tilde{D}) = m = \chi(\hat{D}) = \chi(D)$ d'où l'existence des solutions entières.

COROLLAIRE;

*Toute équation différentielle* $\sum_{k=o}^{m} \frac{d^k f}{dz^k} = 0$ , *d'ordre* $m \geqslant 1$ *à coefficients constants a des solutions non triales dans* $\mathcal{O}$ *qui se prolonge sur tout* $\mathbb{C}$.

## Bibliographie.


[1] BJORK J.E., Rings of differential operators - North-Holland (1979).

[2] BOREL A/ , Linear Algebraic Groups, Benjamin INC. N.Y. (1979).

[3] BOURBAKI N., Livre II, Algèbre, Chap. 4, Hermann Paris (1959).

[4] BOURBAKI N., Groupes et algèbres de Lie, chap. 2 et 3, Hermann Paris (1972).

[5] BRACONNIER J., C.R.A.S. Paris, série A, 284 (1977), 135-1348.

[6] DELIGNE P., Equations differentielles à points singuliers réguliers, Lecture note in Math. 1963, Springer-Verlag (1970).

[7] DEMAZURE M., GABRIEL P., Groupes algébriques, tome 1, Masson & Cie Editeur, Paris (1970).

[8] DUBROVIN B.A., MATVEEV V.B., NOVIKOV S.P., Non linear equations of KORTEWEG de Vrie-type, finite zone linear operators and abelian varieties, Russian Math. survey, 31-1 (1976) 59-146 from USPEKHI Math. NAUK 31-1 (197 ).

[9] EKONG S.D., Sur l'algèbre de Poisson des symboles d'une algèbre de polynômes Pub. Dep. Math. Lyon, tome 17-2 (1980).

[10] GERARD R. et LEVELT A.H.M., Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires, Ann. Inst. Fourier T. XXIII, Fasc. I (1973).

[11] JURKAT W.B. and LUTZ D.A., On the order of solutions of analytic linear differential equations, Proc. London Math. soc. 3 (1971), 465-482 .

[12] KASHIWARA M. and T. OSHIMA, systèmes of differential equation with regular singularities, Ann. of Math. 106 (1977) p. 145-200.

[13] KATZ N., Nilpotent connections and the monodromie theorem ; Application of a result of TURRITIN , Pub. Math. I.H.E.S. 39 (1970) p. 176-232.

[14] KRICEVER I.M., Algebraîc-geometric construction of the ZAHAROV-SABAT equations and their periodic solutions , DOK. AKAD. NAUK SSSR, tome 227 (1976) n° 2 TRANS. SOVIET MATH. DOKL , vol. 17 (1976) n° 2, 394-397.

[15] KRICEVER I.M.; Algebraic curves and commuting matricial differential operator, Fonct. Anal. and it appl. VOL. 10 n° 2 (1976) April-June.

[16] MALGRANGE B. , Sur les points singuliers des équations différentielles, L'ENSEIGNEMENT MATH., tome 20 (1974) p. 147-176.

[17] MANIN YU.I., Aspects algébriques de la théorie des équations différentielles ITOGI NAUKI.

[18] MOSER J., The order of a singularity in Fuch's theory. Math. Zeitschrift 71 (1960 (1960) 379-398.

[19] SERRE J.P. ,Corps locaux, Hermann, Paris (1962).

[20] SERRE J.P.: Lie algebras and Lie groups W.A. BENJAMIN N.Y. (1962).

[21] WOLLENBERG L.S., Derivations of the Lie algebras of polynomial under Poisson Bracket, proc. Ame. Math. soc. 20 (1969) 315-320.