PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

G. PATISSIER

Quantification d'une variété symplectique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1986, fascicule 4B
« Séminaire de géométrie », , p. 35-54
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1986___4B_35_0>

QUANTIFICATION D'UNE VARIETE SYMPLECTIQUE

G. PATISSIER

I) LA GEOMETRIE SYMPLECTIQUE COMME MODELE DE LA MECANIQUE CLASSIQUE.

a) Un système dynamique est un couple (M,X) où M est une variété et X un champ de vecteurs (dépendant en général du temps) sur M. Dans un système mécanique réel la variété M est définie par la *cinématique* du problème (les positions, vitesses et les contraintes sur les particules qui constituent le système), le champ X est défini par les *forces* qui agissent sur le système. Les trajectoires de X sont les solutions du système différentiel $\frac{dx}{dt} = X(x(t),t)$ (1.1) et décrivent son évolution au cours du temps. Pour simplifier on suppose à partir de maintenant que le système est autonome (X est indépendant du temps), l'équation (1.1) s'écrit $\frac{dx}{dt} = X_{x(t)}$ (1.2.) et l'évolution du système est entièrement décrite par le flot Φ_t de X.

b) Supposons que $M = T^*(V)$, on note ω la 2-forme symplectique canonique de M. Si $(q_1,\dots,q_n)$ est un système de coordonnées locales de V, on note $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ celui de $T^*(V)$ défini par l'écriture $\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i$ des formes sur V, les variables q_i sont les variables de position, les variables p_i correspondent aux quantités de mouvement. Soit $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, on note X_H le champ de vecteurs hamiltonien défini par H ($X_H \lrcorner\, \omega = - dH$).

Les systèmes dynamiques (M,X_H) sont particulièrement importants en mécanique newtonienne où $H(q,p) = \frac{1}{2\mu} p^2 + v(q)$ est l'énergie totale.

Soient G un groupe de transformations symplectiques de M et une application $\mathcal{J}: M \to g^*$, on pose $\hat{\mathcal{J}}(\xi)(x) = <\mathcal{J}(x),\xi>$ $(x \in M, \xi \in g)$. On note $\hat{\xi}$ le champ de vecteurs sur M engendré par ξ. On dit que $\mathcal{J}$ est un *moment* si $X_{\hat{\mathcal{J}}(\xi)} = \hat{\xi}$.
On suppose de plus que l'action de G est équivariente c'est-à-dire que $\mathcal{J}(s.x) = Ad^*_s . \mathcal{J}(x)$, alors $\hat{\mathcal{J}}([\xi,\eta]) = \{\hat{\mathcal{J}}(\xi), \hat{\mathcal{J}}(\eta)\}$ ([1]) . D'après le théorème de SARD $\mathcal{J}^{-1}(a)$ est une sous-variété de M pour "presque tous" les a. Soit G_a le stabilisateur de a pour la représentation coadjointe, G_a opère sur $\mathcal{J}^{-1}(a)$ et avec de bonnes hypothèses l'ensemble des orbites pour l'action de G_a sur $\mathcal{J}^{-1}(a)$ est une variété symlectique F_a. On dit que F_a est l'espace des phases réduit ([1],[2]). Si $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ est une fonction invariante par G on déduit du théorème de NOETHER que les fonctions $\hat{\mathcal{J}}(\xi)$ sont des intégrales premières du système $\frac{dx}{dt} = X_H$.
Le champ X_H est alors tangent aux variétés $\mathcal{J}^{-1}(a)$ et on montre qu'il définit un champ de vecteurs hamiltonien sur F_a ([1],[2]) , notons le Y_a. Le système dynamique (Y_a,F_a) est utilisé pour étudier les équilibres relatifs du système initial (M,X_H) ([1],[2]) . Donc même les systèmes $(\mathbb{R}^{2n},X_H)$ conduisent à l'étude de systèmes hamiltoniens sur des variétés symplectiques générale.

Nous verrons que c'est ce genre de problème : "étude d'un système sur une variété symplectique" qui est difficile en mécanique quantique.

c) Donc soit (M,ω) une variété symplectique, on rappelle que si $H,K \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ le crochet de POISSON $\{H,K\}$ est défini par

$$\{H,K\} = \omega\,\{X_H , X_K\} = - X_K(H) = X_H(K)$$

D'après le théorème de DARBOUX il existe sur M un système de coordonnées locales (dites canoniques) $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ dans lesquelles

$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Alors $X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ et

$$\{H,K\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} \right).$$

L'équation (1.2) prenant la forme

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dfrac{dp_i}{dt} = - \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n \ .$$

Par définition $\gamma \in C^{\infty}(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une loi de conservation ou une intégrale première du système 1.3 si $\gamma(q(t),p(t),t) = cte$ pour toute solution $(q(t),p(t))$ de 1.3. Il est facile de voir que les lois de conservation sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + X_H(\gamma) = 0$ soit $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \{\gamma, H\}$ (1.4) et qu'alors si γ_1 et γ_2 sont deux lois de conservation il en est de même de

$$\{\gamma_1,\gamma_2\}(.,t) = \{\gamma_1(.,t), \ \gamma_2(.,t)\} \ . \quad (1.5)$$

La relation (1.5) définit une structure d'algèbre de LIE dans l'espace des lois de conservation.

EXEMPLE - LES SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES.

On suppose $M = T^*(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{x = (q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)\}$ et $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Soit H une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$, $H \in C^{\infty}(M)$ et le système 1.3 devient linéaire, il s'écrit $\frac{dx}{dt} = Ax$ où $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Le flot de X_H est $\Phi.\ \mathbb{R} \longrightarrow Sp(n,\mathbb{R})$

$$t \longrightarrow e^{tA}$$

et il est clair que $A \in sp(n,\mathbb{R})$. Cherchons les lois de conservation γ quadratiques en x, c'est-à-dire de la forme

$$\gamma(x,t) = \omega(B(t)x,x) \quad \text{où} \quad B(t) \text{ peut être pris dans } sp(n,\mathbb{R}).$$

L'équation 1.4 s'écrit

$$(1.6) \qquad \frac{dB}{dt} + [B,A] = 0.$$

Les solutions de (1.4) sont de la forme $B(t) = e^{tA}B(o)e^{-tA}$. On remarque que $B(t)$ est une courbe située dans l'orbite de $B(0)$ pour la représentation adjointe. Si B_1 et B_2 sont deux solutions de (1.6) il en est de même de $[B_1,B_2]$ et l'application $\gamma \to B$ est un morphisme d'algèbres de LIE.

On a en mécanique quantique une situation analogue avec des opérateurs B définis sur des espaces de dimension infinie.

2. QUANTIFICATION DANS $\mathbb{R}^n$ ([14])

a) Les espaces utilisés ici sont $\mathbb{R}^n$ (espace de *configuration*) $T^*(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ (espace de *phase*), $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ les éléments normalisés φ i.e. $\int |\varphi|^2 dx = 1$) sont les fonctions d'onde, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ (observables classiques).

Par définition une *observable quantique* est un opérateur hermitien non borné H sur $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on note $\mathscr{D}(H)$ son domaine.

b) DEFINITION : une observable quantique H étant donné, un système dynamique quantique est défini par le groupe d'opérateurs unitaires $e^{i\frac{t}{\hbar}H}$, $D(H) \cap \{\varphi \,|\, ||\varphi||_2 = 1\}$ étant l'ensemble des *états* du système.

Soit $\psi \in \mathscr{D}(H) \cap \{\varphi,\ ||\varphi||_2 = 1\}$ donnant l'*état* du système à l'instant $t = 0$, l'évolution de l'état du système au cours du temps est donné par

$$(2.1) \qquad \psi_t = e^{\frac{it}{h}.H}.\psi$$

Dans ce cas ψ_t est solution de l'équation

$$(2.2) \qquad \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \frac{i}{h} H.\psi_t$$

En général H est un opérateur différentiel et donc (2.2) est une équation aux dérivées partielles, on dit que H est l'opérateur d'*énergie*. De manière analogue au cas de la mécanique classique une loi de conservation est une application $\gamma : \mathscr{D}(H) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(\psi_t,t) = \mathscr{A}^{Cte}$ pour les solutions de 2.2. (2.2) étant un système *linéaire* cherchons, par analogie avec la mécanique classique, les lois de conservation quadratiques en ψ, c'est-à-dire de la forme $\gamma(\psi,t) = \langle B(t)\psi,\psi\rangle$ où $B(t)$ est un opérateur hermitien et $\langle,\rangle$ le produit hermitien de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$. On montre comme pour 1.6 qu'alors

$$\frac{dB}{dt} + \frac{i}{h} [B,H] = 0 \qquad (2.3)$$

c) Un problème typique de la mécanique quantique est, étant donné un système physique dont les propriétés mécaniques classiques sont supposées connues, lui associer un système quantique. ([14]). Il devient maintenant évident qu'il faut chercher un (ou des ?) procédé "automatique" permettant à partir d'un système classique donné de construire le système quantique correspondant. On appelle quantification un tel procédé. En fait on ne peut pas quantifier tous les systèmes classiques et on est conduit en pratique à privilégier une sous-algèbre de Poisson de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

d) <u>Exemple</u> . Soit σ_n l'espace des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^{2n}$ de degré $\leqslant 2$. est une sous-algebre de POISSON $C^\infty(\mathbb{R})^{2n}$ de dimension $(n+1)(2n+1)$. On considère l'opérateur linéaire $\sigma_n \xrightarrow{\Phi} \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ défini sur une base de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Phi(q_i).\psi = q_i\psi & \text{on pose } Q_i = \Phi(q_i) \\ \Phi(p_i).\psi = \frac{h}{i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial q_i} & \text{on pose } P_i = \Phi(p_i) \\ \Phi(p_i q_j) = \frac{1}{2}(P_i Q_j + Q_j P_i) = \Phi(q_j p_i) & \\ \Phi(1) = Id \ , \ \Phi(p_i p_j) = P_i P_j \ , \ \Phi(q_i q_j) = Q_i Q_j . & \end{cases}$$

Ce sont les règles de quantification de SCHRODINGER. Les opérateurs P_i, Q_j vérifient les règles de commutation $[P_i, Q_j] = \frac{h}{i}\ \delta_{ij}$, $[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = 0$.

On vérifie qu'alors

$$\Phi(\{f,g\}) = \frac{i}{h}\ [\phi(f), \Phi(g)] \qquad (2.4)$$

(on dit que Φ vérifie l'axiome de DIRAC).

Soit par exemple l'hamiltonien classique $E(q,p) = \frac{1}{2m}\ p^2 + V(q)$, E est l'énergie mécanique totale d'une particule de masse m se déplaçant dans un champ de force conservatif dont l'énergie potentielle est $V(q)$.

On a $\Phi(E) = \frac{h^2}{2m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + V(q)$ et l'équation (2.2) s'écrit

$\frac{h}{i} \frac{\partial\psi_t}{\partial t} = - \frac{h^2}{2m} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\psi_t}{\partial q_i^2} + V(q)\ \psi_t$, on obtient ainsi l'équation de SCHRODINGER.

Si $V(q) = \frac{m}{2} \cdot q^2$ $\phi(E)$ est l'oscillateur harmonique.

e) Il est nécessaire de définir ce que l'on entend par quantification d'une variété symplectique. Il est très difficile de répondre à cette question et le but de ces exposés est de donner des indications sur les réponses de certains auteurs (KOSTANT-SOURIAU [14], B.F.F.L.S. [3][4] , et MASLOV [10] , [11]).

3. REGLES GENERALES DE LA QUANTIFICATION D'UNE VARIETE SYMPLECTIQUE.

a) Soit (M,ω) une variété symplectique constituant l'espace des *phases*, $C^\infty(M)$ est l'espace des observables *classiques*. Soit (E,p,X) un fibré vectoriel hermitien, une mesure étant donnée sur X on note H l'espace de HILBERT des sections de carré intégrable de E. Une *observable quantique* est un opérateur sur H (en général hermitien et non borné).

b) Soit A une sous-algèbre de $C^\infty(M)$, une *quantification linéaire* ([5]) est une application linéaire $\Phi : A \to \mathscr{L}(H)$ telle que

$$f \to \hat{f}$$

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{i) } \hat{f} \text{ est hermitien. (en général non borné).} \\ \text{ii) } \widehat{\{f,g\}} = \frac{i}{h}\ [\hat{f},\hat{g}] + O(\frac{1}{h}). \\ \text{iii) } \hat{1} = \mathrm{Id} \\ \text{iv) Pour tout } x \text{ de } M \text{ il existe un voisinage ouvert } U \text{ de } x \text{ et } f_1,\dots,f_{2n} \end{cases}$$

dans A tels que $(f_{1/U},\dots,f_{2n/U})$ soit un système de coordonnées canoniques de M.

A ces quatre axiomes peuvent s'en ajouter d'autres (cf. [14] par ex.) qui ne nous intéresse pas directement ici. Ceci se généralise en remplaçant H par les sections d'un faisceau (voir § 8).

4. LA QUANTIFICATION SYMETRIQUE OU QUANTIFICATION DE WEYL.

a) C'est une généralisation de l'exemple 2.d. On prend $M = T^*(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $A = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Pour $f \in A$ on pose

$$\hat{f}.\varphi\,(q) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i<q-q',p>}\ f(\frac{q+q'}{2}, h\,p)\ \varphi(q)dgdp \quad (4.1)$$

On obtient un opérateur sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de noyau

$$K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i<y-x,\xi>}\ f(\frac{x+y}{2}, h\xi)d\xi .$$

La définition précédente s'étend au cas où f est un symbole, c'est-à-dire vérifie pour un certain réel m.

$$(4.2) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \quad \exists C_\alpha \quad , \quad |D^\alpha f(x)| \leqslant C_\alpha (1+|x|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

On dit que f est d'ordre $\leqslant$ m, on note S^m l'espace de ces symboles puis on pose $S = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m$. Quand f dépend de h on impose de plus que $f : [0,h_o[\times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ soit de classe C^∞ et que $h \to \frac{\partial^j}{\partial h^j} f$ soit C^∞ de $[0,h_o[$ dans S^{m-2j} .

Les opérateurs définis par la relation 4.1 sont les opérateurs pseudo-différentiels de WEYL ([13],[9]).

On montre que $\hat{f} \circ \hat{g} = \hat{\ell}$ avec

$$(4.3) \qquad (h,x) \simeq \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ih}{2}\right)^n [P_{q^1} \; \partial_{p^2} - \partial_{p^1} \; P_{q^2}]^n \; f(h,x+x_1) g(h,x+x_2) /_{x_1 = x_2 = 0}$$

où $x_1 = (q^1,p^1), x_2 = (q^2,p^2)$, le symbole $\simeq$ indiquant que la série précédente est une série asymptotique. Le symbole ℓ ainsi obtenu est le produit de MOYAL de f et g ([3],[13]).

Il est alors clair que les relations 3.1 ii à 3.1 iv sont vérifiées, la relation 3.1 i l'étant chaque fois que f est réelle. Une fois obtenue l'observable quantique $\hat{f}$ il reste à résoudre l'équation (2.2)

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \frac{i}{h} \; \hat{f} \; \psi_t \quad .$$

b) Considérons par exemple l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire

$$(4.4) \qquad \lambda \psi = - \frac{h^2}{2m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i^2} + V(q)\psi \quad .$$

Si ψ est une solution de (4.4) $\tilde{\psi}(t) = e^{\frac{i}{h}\lambda t}\,\psi$ est la solution valant ψ pour $t = 0$ de l'équation de SCHRODINGER dépendant du temps.

$$\frac{h}{i}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial q_i^2} + V(q)\,\tilde{\psi} \quad .$$

On peut chercher les solutions asymptotiques (quand $h \to o$) de (4.4) qui s'écrivent sous la forme d'une série asymptotique

$$(4.5) \qquad \psi = e^{\frac{i}{h}\Phi}\sum_{r=o}^{\infty} h^r\, a_r$$

où la phase ϕ est une fonction à valeurs réelles (méthode W.K.B). Par analogie avec le passage de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique on s'attend à ce que le passage à la limite dans (4.6) décrive, d'une certaine façon, le passage de la dynamique quantique à la dynamique classique. Toutefois on se heurte à des difficultés dues à la présence de caustiques. La méthode de MASLOV permet de surmonter ces difficultés ([6] ,[12]), elle consiste à chercher les solutions sous la forme d'un intégrale oscillante.

Plus précisémment soient X une variété de dimension n, U un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une phase $\Phi \in C^\infty(X \times U,\mathbb{R})$ et $a \in C_o^\infty(X \times U \times \mathbb{R})$ une amplitude que l'on suppose définie par une série asymptotique $a \sim \sum_{r=o}^{\infty} (\frac{1}{h})^{\mu-r}\, a_r$ avec $a_r \in C_o^\infty\,(X \times U)$. On cherche les solutions de 4.5 qui s'écrivent sous la forme

$$(4.6) \qquad U(q,h) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\frac{N}{2}} \int \exp i\,\left(\frac{1}{h}\,\Phi(q,\theta) - \frac{\pi}{4}\,N\right).a(q,\theta,h)d\theta \quad .$$

Sans entrer dans trop de détails, la recherche des solutions globale de (4.5) pouvant s'écrire comme une somme d'intégrales de la forme (4.6) impose d'étudier l'effet d'un changement de phase dans (4.6) et conduit aux notions suivantes ([8]).

<u>DEFINITION</u>. Φ *est une phase non dégénérée si* Φ_θ *est une submersion sur*

$$C_\phi = \{(q,\theta),\ \Phi'_\theta = 0\ \} \ .$$

Dans ce cas C_Φ est une sous-variété de dimension n et $i_\Phi : C_\Phi \to \mathbb{R}^{2n}$, $i_\Phi(q,\theta) = (x, \Phi'_q(q,\theta))$ est une immersion lagrangienne, on pose $\Lambda_\Phi = i_\Phi(C_\Phi)$. On montre alors ([8]) que pour toute sous-variété lagrangienne Λ de $T^*(X)$ il existe un recouvrement $\mathcal{L}$ par des ouverts simplement connexes Λ_{Φ_i}, où $\Phi_i : X_i \times \mathbb{R}^{N_i} \to \mathbb{R}$ est une phase non dégénérée.

Si $\Lambda_{\Phi_i} \cap \Lambda_{\Phi_j} \neq \emptyset$ on pose $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$ [sign $\phi''_{i\theta\theta} - N_i$ - sign $\phi''_{j\tau\tau} + N_j$]

les α_{ij} définissent un 1-cocycle de $\mathcal{L}$ à valeur dans Z, on note $[\alpha]$ sa classe dans $H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z})$ et toujours $[\alpha]$ la classe de $H^1(\Lambda, \mathbb{C})$ qui lui correspond par l'isomorphisme de DE RHAM. Les fonctions $e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_{jk}}$ sont les fonctions de transition d'un fibré vectoriel en droites complexe L, L est le fibré de MASLOV. Notons $\Omega_{\frac{1}{2}}$ le fibré des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Λ, quand on effectue un changement de phase dans (4.6) l'application du principe de la phase stationnaire fait apparaître les sections de $L \otimes \Omega_{1/2}$. Notons $[\theta]$ la classe de la restriction de la 1-forme de LIOUVILLE $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ à Λ. On montre que si la projection $\Lambda \to X$ est propre et si $\frac{1}{2\pi h}[\theta] - \frac{1}{4}[\alpha] \in H^1(\Lambda, Z)$ (4.7) (condition de quantification de MASLOV [6],[12]) il existe un isomorphisme $\mathcal{H}(\Lambda) : \dfrac{S^u(\Lambda)}{S^{u-1}(\Lambda)} \to \dfrac{I^\mu}{I^{\mu-1}}$ où $S^\mu(\Lambda)$ est l'ensemble des sections de $L \otimes \Omega_{1/2}$ de la forme $A \simeq \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{h}\right)^{\mu-r} A_r$ et I^μ celui des sommes localement finies d'intégrales oscillantes 4.6 (les phases Φ utilisées étant celles données par un recouvrement $\mathcal{L}$). ([8]).

Un cas simple est celui où Λ est simplement connexe, alors $[\theta] = 0$ et (4.7) se réduit à $[\alpha] \in H^1(\Lambda, Z)$.

Soit $A_i = e^{\frac{i\pi}{4}(\text{sign } \phi''_{i\theta\theta} - N_i)}$ on a $A_i = \alpha_{ij}.A_j$ et on définit ainsi une section nulle en aucun point de Λ, si δ est une $\frac{1}{2}$ -densité fixée de Λ l'application $f \to \mathscr{H}(\Lambda)(fA \otimes \delta)$ définit une application notée $K(\Lambda) : C_o^\infty(\Lambda) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui sera utilisée dans le paragraphe 8. Evidemment $K(\Lambda)$ n'est pas intrinsèque puisque dépendant de $\mathscr{L}$ et de δ.

5) L'EXEMPLE DU TORE ([11]).

Les opérateurs pseudo-différentiels sur S^1 s'écrivent

$$(5.1) \qquad f(e^{i\varphi}, \frac{\partial}{i\partial\varphi}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(e^{i\varphi}, m)\, e^{im\varphi}\, u_m$$

où les u_m sont les coefficients de FOURIER de u et $f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un symbole.

Soit $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\varphi}, e^{i\varphi'}) \in \mathbb{C}^2 , \quad \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}\}$ et

$\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\chi(\varphi,\varphi') = (e^{i\varphi}, e^{i\varphi'})$. La relation (5.1) à encore un sens pour $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ et s'écrit en introduisant h

$$\hat{f} = f(e^{i\varphi} \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(e^{i\varphi}, e^{i\frac{m}{h}})\, e^{im\varphi}\, u_m \quad .$$

Pour que le symbole de l'opérateur précédent soit encore défini sur le tore il suffit de supposer que $\frac{2\pi}{h} \in Z$ ou ce qui est équivalent que $\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{T}^2} \omega \in Z$,

où $\chi^*(\omega) = d\varphi \wedge d\varphi'$ et ω une 2-forme symplectique sur $\mathbb{T}^2$. Cette dernière condition peut s'écrire (5.2) $\frac{1}{2\pi h}[\omega] \in H^2(\mathbb{T}^2, Z)$, elle correspond à la condition de quantification de BOHR et est imposée aux variétés symplectiques intervenant dans la théorie de la quantification géométrique. La relation (5.2) intervient aussi comme nous le verrons au § 8 dans la quantification asymptotique des variétés symplectiques de KARASEV-MASLOV.

Soit $\mathbb{T}^2 \to S^1$, $(q,p) \to q$ les fibres $\{q\} \times S^1$ définissent une distribution lagrangienne sur $\mathbb{T}^2$ (i.e. une polarisation) et on voit que l'opérateur $\hat{f}$ agit sur les fonctions de $\mathbb{T}^2$ indépendantes de p c'est-à-dire sur les fonctions g telles que $X(g) = 0$ pour tous les vecteurs X tangents à la polarisation.

6) <u>LA QUANTIFICATION GEOMETRIQUE</u> ([14]).

Soit (M,ω) une variété symplectique telle que $[\omega] \in H^2(M,Z)$. On note L un fibré en droites complexe dont la classe de CHERN est $[\omega]$. On peut munir L d'une connexion ∇ dont la courbure est $2i\pi\omega$. On suppose qu'il existe sur L une structure hermitienne invariante h (c'est-à-dire pour tout vecteur X et toutes les sections f et g de L on a $\mathscr{L}_X(h(f,g)) = h(\nabla_X f,g) + h(f,\nabla_X g)$). On pose pour $\Phi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ et $s \in C^\infty(L)$

$$\delta(\Phi).s = \frac{1}{2i\pi}.\nabla_{X_\Phi^s} + \Phi.s \quad . \tag{6.1}$$

Alors $\begin{cases} \delta(1) = \text{Id}. \\ \delta(\{\phi,\psi\}) = 2i\pi.\ [\delta(\Phi),\delta(\psi)] \ . \\ \delta \text{ est hermitien.} \end{cases}$

<u>Remarque</u>. Soit G un groupe d'actions hamiltoniennes sur M et $\mathscr{J}: M \to g^*$ un moment équivariant. On pose pour $\xi \in g$ $\hat{\delta}(\xi) = \delta(\hat{\mathscr{J}}(\xi))$, alors puisque $\{\hat{\mathscr{J}}(\xi),\hat{\mathscr{J}}(\eta)\} = \mathscr{J}([\xi,\eta])$ $\hat{\delta}$ est une représentation de g dans l'espace des sections de L.

Pour quantifier M on a besoin en plus d'une polarisation. Une polarisation réelle F est par définition un sous-fibré lagrangien intégrable de T(M). Les sections locales $s : \mathscr{U} \to L$ sont dites polarisées si $\nabla_X s = 0$ pour tout champ X tangent à F. Les sections polarisées forment un faisceau.

Supposons que l'action de G préserve les feuilles de F alors $\hat{\xi}_p \in F_p$, et on montre facilement que $\hat{\delta}(\xi)$ envoie les sections polarisées sur les sections polarisées.

Ces notions s'étendent aux polarisations complexes de $T(M) \otimes \mathbb{C}$. ([14]).

7) LA THEORIE DES DEFORMATIONS ([3] [4]).

Dans la quantification de WEYL de $T^*(\mathbb{R}^n)$ vue au § 4 on peut grâce à l'isomorphisme $f \to \hat{f}$ et au produit de MOYAL 4.3 réinterpréter certaines notions quantiques. Par exemple l'équation (2.3) $\frac{d\hat{f}}{dt} + \frac{i}{h}[\hat{f},\hat{H}] = 0$ donnant les lois de conservation de l'équation de SHRÖDINGER est équivalente via la transformation de WEYL à

$$(7.1) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{i}{ih}(f *_h H - H *_h f) \quad \text{où}$$

$$(7.2) \qquad \frac{1}{ih} f *_h H - H *_h f] = \{f,H\} + \sum_{p=1}^{\infty} (ih)^{2p} L_p(f,H).$$

Dans la série (7.2) les L_p sont des opérateurs bidifférentiels donnés par (4.3). Dans (7.2) apparaît ainsi (au sens de B.F.F.L.S. [3],[4]) une déformation du crochet de POISSON . De façon similaire le produit de MOYAL (4.3) peut être considéré comme une déformation du produit ordinaire des fonctions. Si l'on fait h=0 dans (7.2), (4.3) et (7.1) on obtient le crochet de POISSON $\{f,H\}$, le produit ordinaire des fonctions f.H et l'équation

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}$$

donnant les lois de conservation des systèmes mécaniques classiques associés à l'hamiltonien H. De ce point de vue on peut dire que la mécanique classique est la limite quand $h \to 0$ de la mécanique quantique ou inversement que la mécanique quantique est une déformation de la mécanique classique et c'est ce point de vue qui est utilisé par B.F.F.L.S. ([4]) pour quantifier une variété symplectique.

Soit donc (M,ω) une variété symplectique, on pose $N = C^\infty(M,\mathbb{C})$ et on note $E(N,\lambda)$ l'espace des séries formelles à coefficients dans N. Un star produit est un produit associatif dans $E(N,\lambda)$ défini sur N par

$$u *_\lambda v = u.v + \lambda\{u,v\} + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\lambda^k}{k!} P_k(u,v)$$

où les opérateurs P_k sont bidifférentiels. L'associativité du produit précédant s'exprimant en termes de cohomologie de HOSCHILD de la variété M.

DEFINITIONS ([4])

i) $\Phi \in N$ *est une bonne observable si* X_Φ *est complet.*

ii) $*$ *est invariant par* $a \in N$ *si*

$$\{a, f * g\} = \{a,f\} * g + f * \{a,g\} .$$

iii). Soit $\mathcal{A}$ *une sous-algèbre de LIE de dimension finie de* N *telle que l'application* $\mathcal{J} : M \to \mathcal{A}^*$ *définie par* $x \to \lambda_A . L^A(x)$ *est injective. Ici* $\{L^A\}$ *est une base de* $\mathcal{A}$ *et* $\{\lambda_A\}$ *la base duale de* $\mathcal{A}^*$.

Dans ces conditions une quantification de la variété symplectique (M,ω) est un star produit défini sur $N = C^\infty(M,\mathbb{C})$ invariant par une sous-algèbre suffisamment grande $\mathcal{A} \subset N$ de bonnes osbervables tel que $\frac{1}{ih}(a*f - f*a) = \{a,f\}$ $\forall\, a \in \mathcal{A}$, $\forall\, f \in N$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les observables distinguées ou les coordonnées priviligiées de la quantification.

8) LA QUANTIFICATION ASYMPTOTIQUE DE KARASEV-MASLOV ([10] [11]).

a) RAPPELS SUR LA THEORIE DES FAISCEAUX ([7])

Un faisceau $\mathcal{F}$ est un triplet (S,Π,X) vérifiant :

i) S et X sont des espaces topologiques et $\Pi : S \to X$ est une surjection continue.

ii) Π est un homéomorphisme local.

iii) Il existe sur chaque fibre $S_x = \Pi^{-1}(x)$ une structure de groupe (l'opération est notée + et l'élément neutre o_x).

iv) Soit $S \boxtimes S = \{(\alpha,\beta) \in S \text{ , } \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$ muni de la topologie induite par $S \times S$. On suppose que sur $S \boxtimes S$ les opérations $(\alpha,\beta) \to \alpha+\beta$ et $(\alpha,\beta) \to \alpha-\beta$ sont continues.

Il résulte des axiomes précédents que la topologie induite sur chaque S_x est la topologie discrète et que la section nulle $x \to 0_x$ est continue. Une section de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U de X est une fonction continue $s : U \to S$ telle que $\pi o s = Id_U$, l'ensemble $\Gamma(U,S)$ des sections au-dessus de U est un groupe abélien. Pour construire un faisceau il suffit de connaître tous les $\Gamma(U,S)$, l'ensemble des $\Gamma(U,S)$ définissant ce qu'on appelle un préfaisceau.

En général un préfaisceau sur X est la donnée d'un groupe abélien S_U pour chaque ouvert U de X tel que pour chaque paire d'ouverts U et V de X tels que $V \subset U$ il existe un morphisme de groupes $r_V^U : S_U \to S_V$ tel que

$$\begin{cases} \text{i)} & S_U = (0) \quad \text{si} \quad U = \emptyset \\ \text{ii)} & r_U^U = Id_{S_U} \quad \text{et} \quad r_W^U = r_W^V \circ r_V^U \quad \text{si} \quad W \subset V \subset U \end{cases}$$

On construit un faisceau à partir d'un préfaisceau de la manière suivante : soit S_x la limite inductive des S_U pour $x \in U$

(si $\theta(x)$ est l'ensemble des ouverts de X contenant x, dans $\bigcup_{U \in \theta(x)} S_U$ on considère la relation d'équivalence suivante : $f \in S_U$ et $g \in S_V$ sont équivalents s'il existe $W \in \theta(x)$, $W \subset U$, $W \subset V$ tel que $r_W^U f = r_W^V g$, on note f_x la classe d'équivalence de f en x, on dit que f_x est le germe de $f \in S_U$ en x et on note S_x l'ensemble quotient).

On pose ensuite $S = \bigcup_{x \in X} S_x$, et $\Pi : S \to S_x$ la projection canonique.

Pour $f \in S_U$ soit $f_U = \{f_x, x \in U\}$, l'ensemble des f_U est une base d'ouverts. On munit S de la topologie définie par cette base d'ouverts, alors (S,π,X) est un faisceau.

<u>EXEMPLE</u> : Soit X une variété différentiable, on note $r_V^U : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^k(U) & \hookrightarrow & \mathscr{C}^k(V) \\ f & \longrightarrow & f/V \end{array}$

l'opérateur de restriction. Alors $\{\mathscr{C}^k(U), r_V^U\}$ est un préfaisceau, le faisceau associé est celui des germes des fonctions de classe C^k sur X.

Un morphisme de faisceau $h : (S,\pi,X) \to (\tilde{S},\tilde{\pi},X)$ est défini par une fonction continue $h : S \to \tilde{S}$ telle que $\pi = \tilde{\pi} \circ h$ et telle que pour chaque x de X $h_x : h/S_x : S_x \to \tilde{S}_x$ soit un morphisme de groupes.

On remarque que h est un homéomorphisme local. Un morphisme de préfaisceaux $h : \{ S_U , r_V^U\} \to \{\tilde{S}_U , \tilde{r}_V^U\}$ est un système $\{h_U\}$ de morphismes de groupes

$h_U : S_U \to \tilde{S}_U$ tels que $\tilde{r}^U_V . h_U = h_V . r^U_V$. Tout morphisme de préfaisceaux induit un morphisme sur les faisceaux associés en posant $h_x(f_x) = (h_U(f_U))_x$. Réciproquement tout morphisme de faisceaux $h : (S,\Pi,X) \to (\tilde{S},\tilde{\Pi},X)$ induit un morphisme sur les préfaisceaux des sections de (S,Π,X) et de $(\tilde{S},\tilde{\Pi},X)$ par $h_U(f) = h \circ f$.

b) <u>THEORIE LOCALE DE LA TRANSFORMATION DE WEYL</u> ([10] [11])

On note $CS(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\psi :]o,1] \to C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h \longrightarrow \psi_h$ bornées au sens L^2. Pour chaque $\psi \in CS(\mathbb{R}^n)$ la forme linéaire définie sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ par $f \to (\hat{f}\psi_h,\psi_h)_{L^2}$ définit une fonction ρ^h_ψ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ par $\langle\rho^h_\psi,f\rangle = \langle\hat{f}\psi_h,\psi_h\rangle$. ρ^h_ψ est la fonction de WIGNER de ψ et on la note ρ_ψ . On a :

$$(5.1) \qquad \rho_\psi(q,p) = \int e^{-i\langle z,p\rangle}\, \psi_h(q+ \tfrac{hz}{2})\, \bar{\psi}_h(q - \tfrac{hz}{2})dz.$$

Soit $\psi \in CS(\mathbb{R}^n)$, on définit le support modulo $O(h^{2k})$ $(k > 0)$ de la fonction ρ_ψ comme le complémentaire de l'ensemble des points z_o pour lequel il existe un voisinage U tel que pour tout $f \in C_o^\infty(U)$ $\langle\rho_\psi,f\rangle = O(h^{2k})$. On note $osc^k(\psi)$ ce support, pour $k = +\infty$ on a une notion analogue au front d'onde d'une distribution ([8]).

<u>LEMME</u> : *i)* $osc^2(\psi + x) \subset osc^2(\psi) \cup osc^2(X)$

ii) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $osc^2(\hat{f}\psi) \subset osc^2(\psi) \cap \operatorname{supp} f$.

Donc si B est une partie fermée de $\mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble [B] de toutes les fonctions $\psi \in CL^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $osc^2(\psi) \subset B$ est un sous-espace vectoriel. On pose pour tout ouvert $D \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$\Gamma(D) = CS(\mathbb{R}^n) \,/\, _{[\mathbb{R}^{2n} - D]}$$

Si $D_1 \subset D_2$ il existe une application linéaire canonique $r^{D_2}_{D_1} : \Gamma(D_2) \to \Gamma(D_1)$ notée ψ/D_1.

Par suite pour tout ouvert D de $\mathbb{R}^n$ $\{\Gamma(D_i), r_{D_j}^{D_i}\}$, où D_i parcourt l'ensemble des ouverts de D, est un faisceau noté $\pi(D)$ et toute fonction $f \in C_o^\infty(D)$ définit un morphisme des sections de ce faisceau. La localisation désirée est ainsi construite.

c) MORPHISME DE FAISCEAUX ASSOCIE A UN CHANGEMENT DE COORDONNEES SYMPLECTIQUE.

Soient $\tilde{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\gamma : \tilde{D} \to \gamma(\tilde{D})$ un difféomorphisme symplectique. Si D est un ouvert relativement compact tel que $\bar{D} \subset \tilde{D}$ on associe à γ un morphisme de faisceaux $T(\gamma) : \pi(D) \to \pi(\gamma(D))$ de la manière suivante :

$\Lambda_\gamma = \mathrm{Grap}(\gamma) = \{(z,\gamma(z)), z \in D\}$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}_{(q,p)} \times \mathbb{R}^{2n}_{(q',p')}$ muni de la 2-forme $dp \wedge dq - dp' \wedge dq'$ (car φ est symplectique).

Soit $\Theta_\gamma : \tilde{D} \to \Lambda_\gamma$ le difféomorphisme $z \to (z,\gamma(z))$, on note d la $\frac{1}{2}$ densité de Λ_γ telle que $\Theta_\gamma^* .d$ soit la $\frac{1}{2}$-densité canonique de $\tilde{D}$.

Maintenant soit $\mathscr{L} = (\Lambda_{\phi_j})$ un atlas lagrangien de Λ_γ et on suppose que chaque Λ_{ϕ_j} est simplement connexe. On prend D simplement connexe de telle sorte que la condition (4.7) soit vérifiée. On considère l'opérateur $K(\Lambda_\gamma) : C_o^\infty(\Lambda_\gamma) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Si φ est une fonction valant 1 sur $\Theta_\gamma(\bar{D})$, $(2\pi i h)^{-n/2} K(\Lambda_\gamma)\,\varphi$ est le noyau d'un opérateur intégral $\tau(\gamma) : C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION ([10] , [11])

i) $\mathrm{osc}^2\tau(\gamma)\psi \subset \gamma(\mathrm{osc}^2(\psi))$, *par suite* $\tau(\gamma)$ *engendre un morphisme de faisceaux* $T(\gamma) : \pi(D) \to \pi(\gamma(D))$ *et* $T(\gamma)$ *est indépendant de* φ

ii) $T(\gamma^{-1}) = T(\gamma)^{-1}$.

iii) Si $f \in C_o^\infty(D)$ $\hat{f} \circ T(\gamma) = T(\gamma) \circ (\gamma \circ f)^{\wedge}$.

iv) Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *trois difféomorphismes symplectiques tels que* $\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1 = \mathrm{Id}$. *Alors*

$$T(\gamma_3) \circ T(\gamma_2) \circ T(\gamma_1) = \exp(iC_{321})\,[\mathrm{Id} + ih\,\hat{R}_{321}] \;.$$

d) THEORIE GLOBALE MODULO $O(h^2)$

Soient (M,ω) une variété symplectique, $\tilde{\mathscr{A}} = \{\varphi_i : \tilde{U}_i \to \tilde{V}_i,\ i \in I\}$ un atlas canonique de M (i.e. $\omega = \varphi_i^* dp \wedge dq$ sur $\tilde{U}_i$) on suppose que toutes les intersections finies des $\tilde{U}_i$ ont une homologie triviale. On associe à $\tilde{\mathscr{A}}$ un atlas $\mathscr{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\ ,\ i \in I\}$ ayant les mêmes propriétés que $\tilde{\mathscr{A}}$ et tel que $\overline{U}_i \subset \tilde{U}_i$ pour tout i.

A chaque carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ on associe le faisceau $\pi_i = \pi(V_i)$, si $W \subset U_i$ on note π_i/W le faisceau $\pi(\varphi_i(W))$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on pose $T_{ij} = T(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$, $T_{ij} = T(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) : \pi_j/U_i \cap U_j \to \pi_i/U_i \cap U_j$. Alors d'après la proposition précédente

$$T_{ij} \circ T_{ji} = Id\ ,\ T_{i_1i_2}\, T_{i_2i_3} \circ T_{i_3i_1} = \exp\,(iC_{i_2i_3i_1})(Id + ih\,\hat{R}_{i_2i_3i_1})$$

PROPOSITION. $C_{i_1i_2i_3} = \frac{1}{h} \cdot \omega_{i_1i_2i_3} + \frac{\pi}{2} k_{i_1i_2i_3}$ $\omega_{i_1i_2i_3}$ *est un deux-cocycle pour la cohomologie de CECH de* M *(à valeur dans* $\mathbb{R}$ *) définissant la classe* $[\omega]$ *dans* $H^2(M,\mathbb{R})$, k *est un deux-cocycle à valeurs entières. On montre que* $k = \omega_2$ (mod2) *où* ω_2 *est la deuxième classe de STIEFEL-WHITNEY de la variété.*

Posons ensuite $\rho_{ijk} = \varphi_k^* R_{ijk}$, on montre que ρ_{ijk} est un deux-cocycle à valeurs dans le faisceau des germes de fonctions C^∞ sur M. $((\partial\rho)_{ijk\ell} = $ $= \rho_{k\ell i} - \rho_{jki} + \rho_{j\ell i} - \rho_{j\ell k} = 0)$. Soit maintenant $\{e_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) on pose $\rho_{ij} = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^*(\sum_{U_k \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset} e_k\,\rho_{ikj})$ et on considère ensuite l'homomorphisme de faisceaux $\tilde{T}_{ij} : \Pi_j/ U_i \cap U_j \to \pi_i/U_i \cap U_j$ défini par $\tilde{T}_{ij} = T_{ij}(Id + \hat{\rho}_{ij})$. Alors

PROPOSITION : $\tilde{T}_{ij} \circ \tilde{T}_{jj} = Id$, *et sur* $\pi_\alpha/U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ *on a*

$$\tilde{T}_{ij} \circ \tilde{T}_{jk} \circ \tilde{T}_{ki} = \exp(ic_{jki})Id.$$

Par suite si $\frac{1}{2\pi h}[\omega] - k/4 \in H^2(M,Z)$ les conditions précédentes permettent de définir un faisceau $\Pi(M)$. On note $\Gamma(M)$ l'espace des sections de ce faisceau. On dit que $\pi(M)$ est le faisceau des paquets d'ondes sur M, une section de ce faisceau est un paquet d'ondes. Maintenant si $f \in C_o^\infty(M)$ f définit un opérateur sur

$\Gamma(M)$ de la manière suivante. Soit $\psi \in \Gamma(M)$, ψ/U_i définit un élément $\psi_i \in \pi(U_i)$ on pose pour $f \in C_o^\infty(M)$ $f_i = f \circ \varphi_i^{-1}$ puis $\hat{f}(\psi)_i = \hat{f}_i(\psi_i) \circ \varphi_i$.

Sur $U_i \cap U_j$ $\hat{f}(\psi)_i = \hat{f}(\psi)_j + O(h^2)$, donc modulo $O(h^2)$ on a défini un opérateur $\hat{f} : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ et on a

$$\hat{f} \circ \hat{g} = \widehat{fg} - \frac{ih}{2} \widehat{\{f,g\}} + O(h^2).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ABRAHAM, MARSDEN, Foundations of Mechanics, Ed. Benjamin (1978).

[2] V.I. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la Mécanique classique. Editions MIR.

[3] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Deformation theory and Quantization I , Annals of Physics (1978), 61-151.

[4] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRAONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Deformation theory and Quantization II, Annals of Physics (1978).

[5] F.A. BEREZIN, M.A. SUBIN, Symbols of operators and quantization , Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 5, Hilbert spac. op. Tihany (Hungary) (1970).

[6] GUILLEMIN, S. STERNBERG, Geometric asymptotics, Math. Surveys, n° 14 (1977).

[7] HIRZEBRUCH, Topological methods in algebraic geometry, Springer (1966).

[8] L. HORMANDER, Fourier integral operators I, Acta Mathematica 127, (1971), p. 79-183.

[9] L. HORMANDER, The WEYL calculus of pseudo differential operators, Comm. Pure, Appl. Math. 32 (1979), p. 359-443.

[10] M.V. KARASEV, V.P. MASLOV, Pseudo-differential operators and a canonical operator in general symplectic manifold. Math USSR. Izvestiya, Vol. 23 (1984), n° 2.

[11] M.V. KARASEV, V.P. MASLOV, Asymptotic and geometric Quantization, Russian Math. Surveys 39 : 6 (1984), p. 133-205.

[12] V.P. MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod, Paris (1972).

[13] VOROS, An algebra of pseudo-differential operators and the asymptotics of Quantum Mechanics. Journal of funct. analysis, Vol. 29, n° 1, (1978), p. 104-132.

[14] N.R. WALLACH, Symplectic Geometry and FOURIER Analysis, Math. SCI PRESS (1977).