ANDRÉ UNTERBERGER

Quantification et équations aux dérivées partielles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 101-115
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_101_0>

QUANTIFICATION ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par André UNTERBERGER

Les méthodes de quantification interviennent dans les équations aux dérivées partielles via l'analyse pseudo-différentielle. Ici comme dans d'autres domaines de leurs applications, ce sont le calcul de Weyl des opérateurs et le groupe d'Heisenberg qui servent de modèle. Parmi les nombreux calculs symboliques covariants que l'on peut construire, il en est (mais c'est l'exception) qui constituent un calcul efficace des opérateurs : nous décrirons des succès récents obtenus dans cette direction. A l'opposé, nous montrerons également en quoi la plupart des calculs symboliques covariants ne peuvent être considérés comme conduisant à un calcul acceptable des opérateurs.

Une brève description du calcul de Weyl permettra de mettre en évidence les faits qui rendent ce calcul utilisable, d'asseoir les généralisations que nous en proposerons, et de familiariser le lecteur avec les méthodes hilbertiennes (introduites dans [7]) qui ont permis de traiter des modèles plus complexes.

1. Le groupe d'Heisenberg et le calcul de Weyl.

La formule

$$(1.1)\qquad \mathrm{Op}(f)u(x) = \iint f\left(\frac{x+y}{2},\eta\right) e^{2i\pi\langle x-y,\eta\rangle} u(y)\, dy\, d\eta$$

permet d'associer à toute distribution $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (un symbole) un opérateur linéaire continu Op(f) de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. Soit φ la fonction gaussienne standard sur $\mathbf{R}^n$, définie par $\varphi(t) = 2^{n/4} \exp -\pi|t|^2$; faisant agir le groupe d'Heisenberg, on définit également, pour tout $X \doteq (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, la fonction

$$\varphi_X(t) = \varphi(t-x) \exp 2i\pi < t - \frac{x}{2} ,\xi >.$$

Pour toute distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, u appartient à $L^2(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$) si et seulement si $\int |(u,\varphi_X)|^2 dX < \infty$ (resp. $\int (1+|X|^2)^k |(u,\varphi_X)|^2 \, dX < \infty$ pour tout k).

Appelons fonction-poids sur $\mathbf{R}^{2n}$ toute fonction $m > 0$ vérifiant, pour un couple de constantes C_1 et N_1 , l'inégalité

$$m(X) \leqslant C_1 \, m(X') \, [1 + |X - X'|^2]^{N_1}$$

quels que soient X et $X' \in \mathbf{R}^{2n}$. Un symbole $f \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ sera appelé un symbole de poids m si pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^{2n}$ la fonction $m^{-1} D^\alpha f$ est bornée sur $\mathbf{R}^{2n}$.

THEOREME 1.1. *Soit* $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$: *c'est un symbole de poids* m *si et seulement si, pour tout* k, *il existe* $C > 0$ *telle que l'on ait*

$$|(\mathrm{Op}(f)\varphi_X,\varphi_{X'})| \leqslant C(1+|X-X'|^2)^{-k} \, m \left(\frac{X+X'}{2} \right)$$

quels que soient X *et* $X' \in \mathbf{R}^{2n}$.

Compte tenu de l'identité (de Parseval)

(1.2) $$(\mathrm{Op}(f)u,v) = \iint (\mathrm{Op}(f)\varphi_X,\varphi_{X'})(u,\varphi_X)(\varphi_{X'},v) \, dX \, dX'$$

valable si $u,v \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ et des caractérisations vues plus haut des espaces $L^2(\mathbf{R}^n)$ et $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, des corollaires immédiats du théorème 1.1 sont les suivants. Appelons opérateur de poids m tout opérateur de la forme Op(f) où f est un symbole de poids m : alors tout opérateur de poids m opère continûment de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ dans

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; le produit de deux opérateurs de poids m_1 et m_2 est un opérateur de poids $m_1 m_2$; enfin, tout opérateur de poids $m = 1$ s'étend en un opérateur continu de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Ce dernier résultat est dû à Calderon-Vaillancourt.

La preuve du théorème 1.1 est facile et basée sur l'étude de la fonction de Wigner $W_{X,X'}$ de φ_X et $\varphi_{X'}$. Cette fonction sur $\mathbf{R}^{2n}$ intervient dans les identités

$$(1.3) \qquad (\mathrm{Op}(f)\varphi_X, \varphi_{X'}) = \int f(Y)\, W_{X,X'}(Y)\, dY$$

et

$$(1.4) \qquad f(Y) = \iint (\mathrm{Op}(f)\varphi_X, \varphi_{X'})\, W_{X,X'}(Y)\, dX\, dX'.$$

Définissant la forme symplectique $[\ ,\ ]$ sur $\mathbf{R}^{2n}$ par

$$(1.5) \qquad [(x,\xi),(x',\xi')] = \langle x',\xi \rangle - \langle x,\xi' \rangle$$

on explicite la fonction de Wigner sous la forme

$$(1.6) \qquad W_{X,X'}(Y) = 2^n e^{-i\pi[X,X']} e^{-2i\pi[Y,X-X']} \exp - 2\pi \left| Y - \frac{X+X'}{2} \right|^2 .$$

Le théorème 1.1 se déduit alors facilement de l'identité (1.3) et d'une intégration par parties d'une part, de l'identité (1.4) d'autre part.

Les symboles des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sont les fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ dont le comportement par rapport à la variable grecque est polynomial. Pour deux symboles différentiels f et g, on peut exprimer le composé f o g (qui correspond par définition à la composition des opérateurs) sous la forme

$$(1.7) \qquad (f \circ g)(x,\xi) = \Sigma \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\, \beta!} \left(\frac{1}{4i\pi} \right)^{|\alpha|+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi) . \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha g(x,\xi) ,$$

le membre de droite n'ayant dans ce cas qu'un nombre fini de termes non nuls. Avec $Y = (y,\eta)$ et $Z = (z,\zeta)$, soit L l'opérateur sur les fonctions de (Y,Z) tel que

$$(1.8) \qquad i\pi L = (4i\pi)^{-1} \, \Sigma \left(- \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \zeta_j} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \eta_j} \right) :$$

on peut alors écrire (1.7) sous la forme

$$(1.9) \qquad (f \circ g)(X) = [\, e^{i\pi L}(f(X+Y)g(X+Z))](Y = Z = 0) \; ;$$

la version intégrale de cette identité est valable pour des symboles non différentiels.

Pour tout nombre réel μ, appelons symbole classique d'ordre μ tout symbole $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ vérifiant les inégalités

$$(1.10) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \, (1+|\xi|)^{\mu - |\beta|}.$$

Si f et g sont deux symboles classiques, (1.7) est encore partiellement valable au sens d'un développement asymptotique : plus précisément, si l'on ne conserve au second membre que les termes tels que $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$, alors l'erreur commise est un symbole classique dont l'ordre tend vers $-\infty$ quand $k \to \infty$. Ce fait est essentiel pour permettre une manipulation aisée des opérateurs pseudo-différentiels. De plus, observant que le premier terme du développement est le produit ordinaire fg, on parvient sans peine à la notion d'opérateur elliptique et à celle, introduite par L. Hörmander (et par Sato dans le cas des hyperfonctions) de front d'onde d'une distribution, qui permet la microlocalisation des singularités ; le second terme est $(4i\pi)^{-1}\{f,g\}$, où $\{f,g\}$ est le crochet de Poisson de f et g, ce qui explique le rôle joué par les flots hamiltoniens dans les problèmes de propagation des singularités.

On aura observé que les deux faits qui expliquent le succès du calcul de Weyl sont le théorème 1.1 (et, son corollaire, le théorème de Calderon-Vaillancourt sur la continuité sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ des symboles de poids 1) et la validité du développement asymptotique (1.7) au moins dans le cas des symboles différentiels. Nous verrons que les calculs covariants que l'on obtient en généralisant (1.1) de diverses façons ne bénéficient qu'exceptionnellement de ces deux propriétés à la fois.

La formule (1.1) se prête à plusieurs généralisations possibles, suivant que l'on privilégie les opérateurs de translation ou de symétrie sur l'espace de phase. Pour tout $Y = (y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et toute distribution u sur $\mathbb{R}^n$, posons

$$(1.11) \qquad (\tau_Y u)(x) = u(x-y) \exp 2i\pi < x - \frac{y}{2} , \eta >.$$

Désignant par $q = x$ et $p = (2i\pi)^{-1}\partial/\partial x$ les opérateurs de position et d'impulsion habituels en physique, on peut écrire

$$(1.12) \qquad \tau_Y = \exp 2i\pi \, [< \eta,q > - < y,p >] \, .$$

Les opérateurs τ_Y engendrent une version du groupe d'Heisenberg, mais on peut aussi regarder τ comme une représentation projective du groupe additif $\mathbb{R}^{2n}$. Définissant la transformation $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$(\mathcal{G} f)(X) = 2^n \int f(Y) e^{-4i\pi[X,Y]} dY ,$$

on peut écrire (1.1) sous la forme

$$(1.13) \qquad \mathrm{Op}(f) = 2^n \int (\mathcal{G} f)(Y) \, \tau_{2Y} \, dY$$

qui exprime Op(f) comme superposition d'opérateurs "de translation" τ_Y : cette terminologie est justifiée par la relation

$$\tau_Y \, \mathrm{Op}(f) \, \tau_Y^{-1} = \mathrm{Op}(X \mapsto f(X-Y)).$$

2. Le groupe affine et la quantification de Kirillov.

Grâce à la théorie de Kirillov, la représentation (1.13) des opérateurs peut dans une large mesure être généralisée au cas où le groupe d'Heisenberg est remplacé par un groupe nilpotent ou un groupe résoluble de type exponentiel. Les aspects formels de ces généralisations ont été étudiés par plusieurs auteurs, parmi lesquels R. Howe ([4],[5]). Nous allons, dans le cas très simple du groupe affine, montrer que la règle de quantification obtenue en généralisant (1.13) ne conduit pas à un calcul satisfaisant des opérateurs.

Soit G le groupe constitué des matrices $\gamma = (a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$: c'est un groupe résoluble de type exponentiel, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est constituée des matrices $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2$. Dans cette base, la matrice de $\mathrm{Ad}\gamma$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$, ce qui permet d'expliciter la représentation coadjointe : soit (e_1^*, e_2^*) la base duale de (e_1,e_2) et écrivons (x,ξ) pour le vecteur $\xi e_1^* + xe_2^*$ appartenant à $\mathfrak{g}^*$; l'orbite qui nous intéresse est constituée du demi-plan $x > 0$. La théorie de Kirillov lui associe la représentation V de G dans $H = L^2((0,\infty),t^{-1}dt)$ définie par

$$(2.1) \qquad (V(\gamma)u)(t) = u(at)e^{2i\pi bt} \quad .$$

Généralisant (1.13) sous la forme

$$(2.2) \qquad \mathrm{Op}_K(f) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} f(\Xi)\, e^{-2i\pi < X,\, \Xi >} V(e^X)dXd\Xi \quad ,$$

on obtient un calcul covariant des opérateurs sur H, l'espace de phase étant le demi-plan $\{(x,\xi) : x > 0\}$: le groupe G y opère par

$$\gamma(x,\xi) = (a^{-1}x, \xi+ba^{-1}x).$$

On peut expliciter (2.2) sous la forme

$$(2.3) \qquad (\mathrm{Op}_K(f)u)(s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{s-t}{\log \frac{s}{t}}, \xi\right) \left(\frac{s}{t}\right)^{2i\pi\xi} u(t)\, \frac{dt}{t}\, d\xi \quad .$$

Ce calcul se trouve être covariant sous un groupe Γ de transformations de l'espace de phase plus grand que G. Avec $\gamma = (a,b,c) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, posons en effet

$$\gamma(x,\xi) = (a^{-1}x, \xi+ba^{-1}x+c)$$

et étendons la représentation V en $\tilde{V}$ avec

$$(2.4) \qquad (\tilde{V}(a,b,c)u)(t) = t^{2i\pi c}\, e^{2i\pi bt}\, u(at).$$

Ce n'est plus qu'une représentation projective, mais la règle de covariance

$$\tilde{V}(\gamma)\ \mathrm{Op}_K(f)\ \tilde{V}(\gamma)^{-1} = \mathrm{Op}_K(f \circ \gamma^{-1})$$

reste vérifiée pour tout $\gamma \in \Gamma$. La restriction de V au sous-groupe G_1 constitué des points (a,0,c) s'identifie à la représentation (projective) d'Heisenberg du groupe $\mathbb{R}^2$.

Les opérateurs de dérivation $e_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ et $e_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}$ commutent à l'action du groupe G sur l'espace de phase. A ce titre, un analogue satisfaisant du théorème de Calderon-Vaillancourt serait que tout symbole f restant une fonction bornée après application d'un élément quelconque de l'algèbre engendrée par e_1 et e_2 fournisse un opérateur borné sur H. En fait, il n'en est rien. En revanche, soit $e_3 = x \frac{\partial}{\partial x}$, de sorte que e_2 et e_3 commutent à l'action du groupe G_1 . Cette fois, il est vrai que Op(f) est un opérateur borné sur H si la fonction $e_2^j\, e_3^k f$ est bornée pour tout (j,k) tel que $j+k \leqslant 8$. En d'autres termes, il y a bien un théorème de continuité, mais seulement pour des classes de symboles invariantes sous l'action d'un groupe qui n'est pas celui pour lequel le calcul symbolique a été conçu !

La raison qui fait de ce calcul un instrument acceptable pour le groupe d'Heisenberg est d'ailleurs sans mystère. Posons en effet

$$\mathrm{Op}_W(f)u(s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f((st)^{1/2},\xi)\ \left(\frac{s}{t}\right)^{2i\pi\xi} u(t)\ \frac{dt}{t}\ d\xi\ .$$

C'est une version déguisée (sous le difféomorphisme $s = e^x$) du calcul de Weyl (1.1). Avec

$$(2.5) \qquad C(x,y) = \left(\frac{\mathrm{sh}\ y/2}{y/2}\right)^{2i\pi x} ,$$

on vérifie que l'on a $\mathrm{Op}_K(f) = \mathrm{Op}_W(g)$ pourvu que

$$(2.6) \qquad g = C((2i\pi)^{-1}\ x \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ (2i\pi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi})f.$$

Les aspects utiles du calcul Op_K ne sont pas autre chose, en fait, que ceux du calcul de Weyl Op_W invariants par la transformation (2.6). La même raison explique qu'il existe dans le calcul Op_K un développement analogue à (1.7) pour la composition des symboles différentiels. On peut aussi rattacher ce dernier fait à l'observation que les symboles des opérateurs différentiels P sont des polynômes en ξ dont les coefficients sont des combinaisons linéaires, à coefficients C^∞, de dérivées des coefficients de P.

Nous verrons plus loin qu'il existe cependant un calcul symbolique satisfaisant pour le groupe affine, mais ce n'est pas le calcul Op_K.

3. Le groupe $SO_o(2,n+1)$ et le calcul holomorphe.

Si l'on pose, dans le calcul de Weyl sur $\mathbf{R}^n$, $\sigma_Y = \tau_{2Y}\,\sigma_o$ avec $(\sigma_o u)(x) = u(-x)$, on a $\sigma_Y^2 = 1$ et la relation de covariance

$$\sigma_Y Op(f)\sigma_Y = Op(X \mapsto f(2Y-X))$$

qui conduit à regarder σ_Y comme un opérateur de symétrie ; le calcul de Weyl se laisse définir, également, par la formule

$$Op(f) = 2^n \int f(Y)\sigma_Y\, dY. \tag{3.1}$$

Cette définition conduit à de nouvelles généralisations. Remplaçons en effet l'espace de phase $\mathbf{R}^{2n}$ par un espace hermitien symétrique Π et soit Γ le groupe des automorphismes de Π. Soit V_λ une représentation de Γ dans un espace de Hilbert H_λ, extraite de la série discrète holomorphe de Γ (cf. K.I. Gross et R.A. Kunze [3] , H. Rossi et M. Vergne [6]) : λ repère la représentation dans la série considérée, et l'on se contente ici de représentations projectives. On voit comment la formule (3.1) permet d'attacher à toute fonction f sommable sur Π un opérateur $Op_\lambda(f)$ borné sur H_λ : l'opérateur σ_Y est associé à la symétrie autour de $Y \in \Pi$; s'agissant d'une représentation projective, on précise que $\sigma_Y = \sigma_Y^* = \sigma_Y^{-1}$ dépend continûment de Y.

Nous avons introduit cette généralisation du calcul de Weyl dans [8] et poursuivi son étude dans [12] et [13], en collaboration avec J. Unterberger, dans les cas où $\Gamma = SL(2,\mathbf{R})$ ou $SO_0(2,n+1)$. On consultera [9] si l'on souhaite comparer ce calcul à une généralisation, due à F.A. Berezin ([1], [2]), du calcul de Wick bien connu des physiciens : le calcul de Wick sur $\mathbf{R}^n$, qui oblige pour remonter de l'opérateur au symbole à résoudre des équations de la chaleur rétrogrades, ne présente pas d'intérêt du point de vue de l'analyse des opérateurs, et ses généralisations souffrent du même défaut.

Nous allons maintenant décrire les résultats obtenus dans [13] dans le cas du groupe $\Gamma = SO_0(2,n+1)$: il parait assuré que ceux-ci doivent pouvoir se généraliser à tous les cas où Π est un espace hermitien symétrique du type d'un tube complexe ; il reste que le passage du rang 2 au cas général est néanmoins susceptible de créer quelques complications. Soit

$$r(X) = X_0^2 - X_1^2 - \dots - X_n^2 \,,\ X \in \mathbf{C}^{n+1} \tag{3.2}$$

et soit C le cône de $\mathbf{R}^{n+1}$ constitué des points x tels que $r(x) > 0$ et $x_0 > 0$. Le tube complexe $\Pi = C+i\,\mathbf{R}^{n+1}$ s'identifie à l'espace homogène $SO_0(2,n+1)/SO(2) \times SO(n+1)$: un sous-groupe G du groupe $\Gamma = SO_0(2,n+1)$ est engendré par les transformations affines de Π du type $X \mapsto aX (a>0)$, $X \mapsto \Lambda X$ (Λ transformation de Lorentz) et $X \mapsto X + i\eta$ $(\eta \in \mathbf{R}^{n+1})$; Γ est engendré par G et la symétrie Σ telle que $\Sigma X = (r(X))^{-1}\, JX$ avec $J(X_0,X_*) : (X_0,-X_*)$. Soit λ un nombre réel, et soit H_λ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes sur C, de carré sommable pour la mesure $(r(t))^{-\lambda/2}dt$. Si $\lambda > \max(0,n-1)$ la transformation de Laplace permet de réaliser H_λ comme un espace de fonctions holomorphes sur Π, ce qui définit la représentation V_λ puisque Γ conserve la structure complexe de Π.

On a donc tous les éléments nécessaires pour définir un calcul symbolique Op_λ au moyen de (3.1). Le résultat principal obtenu dans [13] est le suivant.

<u>THEOREME 3.1</u> : *Soit* $D(\Pi)$ *l'algèbre (commutative) des opérateurs différentiels invariants sur* Π. *Soit* $C_\infty^{4(n+1)}(\Pi)$ *l'espace vectoriel des symboles* f *de classe* $C^{4(n+1)}$ *sur* Π, *tels que* Df *soit un fonction bornée sur* Π *pour tout*

opérateur $D \in D(\Pi)$ *d'ordre* $\leqslant 4(n+1)$.

Supposons $\lambda > 7n+5$. *Alors l'application* Op_λ *initialement définie, pour* $f \in C_0^\infty(\Pi)$ *, par (3.1), s'étend en une application continue de* $C_\infty^{4(n+1)}(\Pi)$ *dans l'espace des opérateurs bornés sur* H_λ .

La preuve de ce théorème est assez longue, mais son principe est le même que celui qui a conduit au théorème 1.1. La réalisation holomorphe de H_λ admet un noyau reproduisant, ce qui conduit à introduire, pour tout $X \in \Pi$, la fonction φ_X^λ telle que

$$(3.2) \qquad \varphi_X^\lambda(t) = c_\lambda (r(\mathrm{Re}X))^{1/4(\lambda+n+1)} (r(t))^{\lambda/2} \; e^{-2\pi < Jt,X >}$$

où c_λ est une constante de normalisation. On définit la fonction de Wigner $W_{X,X'}$ en exigeant la validité de la formule analogue à (1.3) : celle-ci s'explicite comme une certaine puissance d'une fonction rationnelle des coordonnées réelles de X et X'. La difficulté essentielle consiste (dans le but d'effectuer une intégration par parties) à établir une équation différentielle ne faisant intervenir que des opérateurs dans l'algèbre $D(\Pi)$ et liant les fonctions de Wigner relatives à $\lambda, \lambda+1$ et $\lambda+2$.

La composition des symboles présente dans ce calcul des différences essentielles avec ce qui se passe dans le calcul de Weyl. En effet aucun développement en série du genre (1.7) ne peut y être valide, et ceci en quelque sens, asymptotique ou même formel, que ce soit. On peut voir dans ce fait une conséquence de l'absence de structure Γ-invariante de fibré vectoriel sur Π. Il est instructif d'expliciter dans le cas le plus simple la formule de composition des symboles.

Limitons-nous au cas où n=0 , dans lequel Π est le demi-plan de Poincaré $\Pi = \{x + i\xi : x > 0\}$. Définissons le symbole passif d'un opérateur à trace A sur H_λ comme la fonction $X \mapsto 2\,\mathrm{Tr}(A\sigma_X)$: l'application "symbole passif" est l'adjointe de l'application Op_λ , quand on considère $L^2(\Pi)$ d'une part, l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H_λ d'autre part. Le symbole passif n'est pas très différent de l'autre espèce de symbole (cf[12]) et conduira à une formule un peu plus agréable.

Soit Ψ le difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur Π tel que

(3.3) $$\Psi(y,\eta) = (1+\eta^2)^{-1}[(1+y^2+\eta^2)^{1/2}+y](1+i\eta).$$

Posons également, si $X = x+i\,\xi \in \Pi$,

(3.4) $$\Psi_X(y,\eta) = x\Psi(y,\eta)+i\xi \ .$$

La carte $\Psi_X : \mathbf{R}^2 \mapsto \Pi$ peut aussi être caractérisée par les relations

$$y = \mathrm{sh}\ r \cos\theta \quad , \ \eta = \mathrm{sh}\ r \sin\theta$$

si (r,θ) sont les coordonnées polaires (géodésiques) de $\Psi_X(y,\eta)$ relativement à X. Avec $Y = (y,\eta)$ et $Z = (z,\zeta) \in \mathbf{R}^2$, désignons, comme en (1.8) , par l'opérateur sur les fonctions de (Y,Z) tel que

(3.5) $$i\pi L = (4i\pi)^{-1} \left(- \frac{\partial^2}{\partial y \partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \eta} \right).$$

Soit A un prolongement analytique de la fonction définie lorsque Re z > 0 par

(3.6) $$A(z) = 4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi t) e^{-t^{-1}z} dt.$$

La composition des symboles passifs s'exprime alors par la formule

(3.7) $$(f \circ g)(X) = [A(-i\pi L)((f \circ \Psi_X) \otimes (g \circ \Psi_X))](Y = Z = 0),$$

dans laquelle l'opérateur $A(-i\pi L)$ se définit via la transformation de Fourier dans les variables (Y,Z).

La formule (3.7) appelle quelques commentaires. On observera sa ressemblance avec la formule (1.9) de composition des symboles de Weyl, la carte Φ_X telle que $\Phi_X(Y) = X+Y$ étant remplacée par la carte Ψ_X. Mais la différence fondamentale tient au fait que la fonction $e^{i\pi L}$ est remplacée par $A(-i\pi L)$. Or la fonction analytique A n'est pas uniforme dans le plan complexe, puisqu'on a

(3.8) $$A'(z) = - 8\pi\ J_\lambda((8\pi z)^{1/2}) K_\lambda((8\pi z)^{1/2}).$$

En particulier le développement en série de A est de la forme

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n z^n + b_n z^{\lambda+n})$$

si λ n'est pas entier, et dans le cas contraire il y a un logarithme. Evidemment on voit que $A(-i\pi L)$ n'a aucune signification, serait-elle purement formelle, comme série d'opérateurs différentiels.

La preuve de (3.7) est basée sur le lien entre le présent calcul et le calcul de Fuchs ([10], section 10) et sur la formule de composition des symboles de Fuchs([10], prop. 1.3).

4. Le groupe de Poincaré et le calcul de Fuchs.

On garde les notations du paragraphe précédent pour ce qui concerne le cône C et le tube Π , le groupe $\Gamma = SO_0(2,n+1)$ et son sous-groupe G de transformations affines de Π : le groupe G est engendré par le groupe de Poincaré et les "transformations d'échelle" $X \mapsto aX$ $(a>0)$. Si l'on restreint la représentation V_λ au groupe G, on obtient une représentation V indépendante de λ à équivalence près : il est commode de la faire opérer dans $H = H_{n+1} = L^2(C,dm)$, où dm est la mesure G-invariante sur C (unique à un scalaire près). Lorsque n = 0, on retrouve le groupe affine du paragraphe 2. Nous allons définir maintenant une <u>bonne</u> règle de quantification pour ce groupe.

Une nouvelle façon d'écrire la règle du calcul de Weyl sera à l'origine de la présente généralisation. Avec les notations introduites à la fin du paragraphe 1 et au début du paragraphe 3, écrivons en effet σ_y (resp. τ_η) pour $\sigma_{y,o}$ (resp.$\tau_{o,\eta}$) : on a la relation

(4.1) $$\tau_\eta \sigma_y \tau_\eta^{-1} = \sigma_{y,\eta} \quad .$$

La formule (3.1) conduit alors à un calcul dans lequel interviennent à la fois des symétries et des translations : à ce titre, il peut être considéré comme intermédiaire entre les règles de quantification "de Kirillov" et 'holomorphe" discutées dans les paragraphes 2 et 3.

Nous appellerons calcul de Fuchs toute règle de quantification basée sur ce procédé. Cette règle a un sens chaque fois que l'on dispose d'un espace riemannien symétrique C (pour définir H et les opérateurs σ_y) et d'un plongement de C dans un espace $\mathbf{R}^n$ (pour définir les opérateurs τ_η).

Revenons au cas particulier qui nous intéresse. Le cône C est un espace symétrique (c'est le produit de $\mathbf{R}_\star^+$ par un espace hyperbolique de rang 1), ce qui permet de définir la symétrie géodésique S_y autour de tout point $y \in C$. Pour toute fonction $u \in H$, on pose

(4.2) $$(\sigma^F_{y,\eta}u)(t) = u(S_y t)\exp 2i\pi\langle\eta, t-S_y t\rangle ,$$

et l'on définit, pour tout symbole f sur $T^*(C) = C \times \mathbf{R}^{n+1}$, l'opérateur $\mathrm{Op}_F(f)$ par

(4.3) $$\mathrm{Op}_F(f) = 2^{n+1} \int_{T^*(C)} f(y,\eta)\sigma^F_{y,\eta}\, dy\, d\eta .$$

Au prix d'un travail considérable, on démontre que le calcul pseudo-différentiel de Fuchs sur C est satisfaisant au sens où nous l'entendons dans cet exposé. Ainsi, appelons symbole de poids 1 toute fonction f de classe C^∞ sur $T^*(C)$ vérifiant ce qui suit : pour tout opérateur D^α de dérivation au point $(\omega,0) \in T^*(C)$, la fonction $\gamma \mapsto (D^\alpha(f \circ \gamma))(\omega,0)$ est bornée sur le groupe G. On montre que Op(f) est un opérateur borné sur H si f est un symbole de poids 1. Il y a dans ce calcul un développement asymptotique pour représenter la composition des symboles : ce point ne présente d'ailleurs pas de difficulté puisqu'il est évident dans le cas de deux symboles différentiels et que l'analogue du théorème 1.1 (c'est la partie difficile du travail) permet de passer de là au cas de deux symboles classiques (notion généralisant (1.10)). Ce calcul permet une analyse nouvelle de la microlocalisation des singularités des distributions à support dans $\bar{C}$: celle-ci diffère au bord de C de la microlocalisation usuelle. Dans le cas où n = 0, on a $C = \mathbf{R}_\star^+$, et les équations différentielles elliptiques en 0 au sens du calcul de Fuchs sont les équations du type de Fuchs au sens habituel : ceci justifie la terminologie adoptée. La vocation du calcul de Fuchs en général semble être d'offrir un nouvel instrument dans l'analyse des problèmes aux limites.

Le calcul de Fuchs sur la demi-droite a été introduit et étudié dans [10]; on trouvera dans [11] un exposé du calcul de Fuchs sur C. Bornons-nous à signaler ici que les méthodes de traitement du calcul de Fuchs font un appel considérable à la série holomorphe (H_λ) et à la géométrie de Π, bien que celles-ci n'aient pas joué de rôle dans la définition de ce calcul. L'explication de ce fait est la suivante : le groupe complet de covariance du calcul de Fuchs (il est plus grand que G) est en fait une contraction du groupe Γ , et l'on peut faire apparaître le calcul de Fuchs comme la limite, quand $\lambda \to \infty$, d'une version convenablement renormalisée du calcul sur H_λ défini au paragraphe précédent.

Le cadre axiomatique général dans lequel nous avons suggéré plus haut de situer le calcul de Fuchs apparaît donc comme simpliste dès que l'on veut dépasser les aspects purement formels de la théorie : les aspects plus difficiles exigent beaucoup plus de structure.

5. Conclusion.

Compte tenu de la diversité de ses domaines d'application (physique mathématique, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, peut-être théorie des nombres...), la théorie de la quantification ne dispose pas à l'heure actuelle d'un cadre axiomatique acceptable par tous. Permettons-nous d'exprimer l'avis qu'il est urgent de ne pas en chercher un. En effet, d'une part, nous ne disposons pas encore d'un éventail assez large d'exemples ; d'autre part, il serait dommage de ne pas tenir compte, soit par ignorance soit par a-priorisme, des éléments de structure suscités par les exigences propres à tel ou tel domaine d'application.

Pour ce qui concerne l'analyse pseudo-différentielle, le présent exposé aura montré, nous l'espérons, le rôle fondamental joué par les structures hählériennes, ainsi que l'aspect peut-être imprévu des formules de composition ; le rôle tenu dans la théorie de la quantification par les contractions de groupe (dont le calcul de Fuchs offre un exemple) est également, nous le croyons, digne d'être observé.

Références.

[1] F.A. BEREZIN, Quantization, Math. USSR Izvest. 8 (1974), 1109-1165.

[2] F.A. BEREZIN, Quantization in complex symmetric spaces, Math. USSR Izvest. 9 (1975), 341-379.

[3] K.I. GROSS and R.A. KUNZE, Fourier-Bessel transforms and holomorphic discrete series, Lecture Notes in Math. 266 (1972), 79-122.

[4] R. HOWE, A symbolic calculus for nilpotent groups, Proc. Conference on Operator Algebras and Representation Theory, Neptun, Roumanie (1980),254-277.

[5] R. HOWE, G. RATCLIFF and N. WILDBERGER, Symbol mappings for certain nilpotent groups, Lecture Notes in Math. 1077 (1984), 288-320.

[6] H. ROSSI and M. VERGNE, Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math. 136, 1-2, (1976), 1-59.

[7] A. UNTERBERGER, Les opérateurs métadifférentiels, Lecture Notes in Physics 126 (1980), 205-241.

[8] A. UNTERBERGER, Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, Ecole Polytechnique, Paris 1980.

[9] A. UNTERBERGER, Symbolic calculi and the duality of homogeneous spaces, Contemporary Math. 27 (1984), 237-252.

[10] A. UNTERBERGER, The calculus of pseudo-differential operators of Fuchs type, Comm. In Partial Diff. Equ. 9, 12 (1984), 1179-1236.

[11] A. UNTERBERGER, L'analyse harmonique et l'analyse pseudodifférentielle d'un cône ou d'un domaine mixte, à paraître.

[12] A. UNTERBERGER et J. UNTERBERGER, La série discrète de SL(2,$\mathbb{R}$) et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17 (1984), 83-116.

[13] A. UNTERBERGER and J. UNTERBERGER, A quantization of The Cartan domain BD I (q=2) and operators on the light-cone, à paraître au J. Funct. Anal.