PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PIERRE BONNET

# Analyse de Fourier explicite sur certains groupes de Lie nilpotents

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 117-145
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_117_0>

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# ANALYSE DE FOURIER EXPLICITE SUR CERTAINS GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Pierre BONNET

**Résumé.** Pour tout groupe de Lie nilpotent G produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^{n-1}$, on décrit explicitement la transformée de Fourier des distributions de type positif, telle qu'elle a été définie par l'auteur. On en déduit pour tout sous-groupe fermé connexe, H une formule de Plancherel explicite sur l'espace homogène G/H.

**Abstract.** For every nilpotent Lie group G which is the semi-direct product of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^{n-1}$ we describe explicitly the Fourier transform of positive definite distributions, using the theory built by the author. As an application we give for each closed connected subgroup H a Plancherel formula, in an explicit way, on the homogeneous space G/H.

MOTS CLES. groupes de Lie nilpotents
méthode des orbites
transformée de Fourier
formule de Plancherel.

CLASSIFICATION A.M.S. : 22-E-27.

## INTRODUCTION

Plusieurs travaux ont déjà été consacrés à l'analyse harmonique sur les espaces homogènes d'un groupe de Lie nilpotent G. C'est ainsi que dans [10] GRELAUD étudie la désintégration centrale des représentations induites à partir d'un sous-groupe fermé de G; plus précisément il explicite la mesure sur le dual $\hat{G}$ de G et les multiplicités intervenant dans une telle désintégration. L'étape suivante devrait consister à expliciter l'opérateur réalisant la désintégration, ce qui revient à donner une formule de PLANCHEREL concrète telle que la définit PENNEY dans [14]. Des résultats ont déjà été obtenus dans ce sens : tout d'abord dans [3] et [4] BENOIST obtient la formule de PLANCHEREL lorsque l'espace homogène est un espace symétrique, ce qui implique en particulier que les multiplicités sont 0 ou I ; récemment FUJIWARA a généralisé les résultats de BENOIST au cas où toutes les multiplicités sont finies ([9]).

La transformée de FOURIER des distributions de type positif telle qu'elle est définie dans [6] pour tout groupe de Lie de type I peut constituer un outil pour aborder l'étude de la formule de PLANCHEREL, y compris dans le cas de multiplicités infinies. Nous examinons cette possibilité pour des groupes de Lie nilpotents particuliers, ceux qui sont produit semi-direct de $\mathbb{R}$ et d'un facteur distingué abélien.

Le paragraphe I consiste à rappeler brièvement la définition et la construction de la transformée de FOURIER d'une distribution de type positif T sur un groupe de Lie. Cette transformée de FOURIER se ramène à la donnée d'une mesure m sur $\hat{G}$ et d'un champ d'opérateur $(U_\lambda)_{\lambda \in \hat{G}}$ vérifiant la relation

$$<\theta(g^{-1}),T(g)> = \int_{\hat{G}} tr(\pi_\lambda(\theta)\ U_\lambda)\ dm(\lambda)$$

pour toute fonction $\theta$ $C^\infty$ à support compact sur G. On montre par ailleurs que lorsque G est nilpotent, la relation précédente s'étend aux fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide.

Au paragraphe II, et lorsque G vérifie les hypothèses supplémentaires que nous avons indiquées, on obtient une description explicite de la mesure $m$ et des opérateurs $U_\lambda$ pour toute distribution de type positif $T$ sur $G$. Les résultats ne peuvent, sans doute, pas être étendus tels quels à tout groupe de Lie nilpotent ; en effet, $m$ et les $U_\lambda$ sont déduits de la transformée de FOURIER (au sens classique) d'une distribution $T^{\#}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, cette distribution est l'image réciproque de $T$ par un difféomorphisme qui diffère de l'application exponentielle et qui n'a pas d'équivalent pour un groupe de Lie nilpotent quelconque.

Ces résultats sont appliqués au paragraphe III au cas où $T$ est la distribution induite sur $G$ par la mesure de Haar sur un sous-groupe fermé $H$. Divers cas sont à considérer suivant la position de $H$ par rapport au sous-groupe dérivé de $G$ et par rapport au facteur distingué abélien, et les multiplicités sont tantôt finies, tantôt infinies. Ces multiplicités étant fournies par le rang des opérateurs $U_\lambda$, on retrouve ainsi les résultats de GRELAUD. Mais la donnée de l'opérateur $U_\lambda$ permet en outre d'énoncer une formule de PLANCHEREL dans un sens très voisin de celui de PENNEY ; la différence avec [14] réside dans le fait que pour les multiplicités infinies, la quantité $tr(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ s'exprime naturellement au moyen d'une intégrale et non pas d'une série ; le passage à la forme série (qui d'ailleurs est moins canonique) est possible si l'on sait exprimer l'opérateur $U_\lambda$ sous la forme :

$$U_\lambda f = \sum_i (f|f_i)f_i$$

où les $f_i$ sont des vecteurs-distributions, ce qui d'après [6] est toujours possible.

Pour la généralisation à un groupe nilpotent quelconque, une possibilité pourrait être de remplacer $T^{\#}$ par la distribution $T^{\natural}$ image réciproque de $T$ par l'application exponentielle, et la transformation de FOURIER classique par une transformation à exposant polynômial ou rationnel. On devrait pouvoir généraliser ainsi au moins les résultats du paragraphe III. En effet, lorsque $T$ est la distribution induite par le mesure de Haar d'un sous-groupe, on peut choisir le facteur non distingué de $G$ de manière à ce que les distributions $T^{\#}$ et $T^{\natural}$ coïncident.

-:-:-:-:-

## I - TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION DE TYPE POSITIF.

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de la transformée de Fourier telle qu'elle est introduite dans [ 6 ].

On considère un groupe de Lie $G$ de type $I$ et unimodulaire dont on note $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie (l'hypothèse d'unimodularité n'est pas fondamentale, puisqu'il suffit, lorsqu'elle n'est pas vérifiée, de remplacer les distributions par les fonctions généralisées). On note $\hat{G}$ le dual de $G$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles, et, pour chaque $\lambda$ de $\hat{G}$, on se donne une représentation $\pi_\lambda$ de classe $\lambda$ agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ de sorte que les $\pi_\lambda$ forment un champ

On note :

- $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ l'espace des vecteurs différentiables de $\pi_\lambda$ ;
- $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$ l'espace des vecteurs-distributions ;
- $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-\infty}$ l'espace des opérateurs à trace-distributions

(c'est-à-dire des opérateurs nucléaires de $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ dans $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$).

Etant donné une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathfrak{G}$ on pose

$$D = 1 - \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

et on note $D_\lambda$ l'opérateur autoadjoint positif de $\mathcal{H}_\lambda$ qui est la fermeture de $d\pi_\lambda(D)$. On introduit encore les espaces suivants :

- $\mathcal{H}_\lambda^k$, par $k \in \mathbb{N}$, espace des vecteurs de classe $C^k$ de $\pi_\lambda$ ; c'est aussi le domaine de l'opérateur $D_\lambda^{k/2}$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$p_k(f) = \|D^{k/2} f\|.$$

- $\mathscr{H}_\lambda^{-k}$ antidual de $\mathscr{H}_\lambda^{k}$.

- $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\lambda)^{-k}$, espace des opérateurs nucléaires de $\mathscr{H}_\lambda^{k}$ dans $\mathscr{H}_\lambda^{-k}$.

Pour un tel opérateur $U$, l'opérateur $D^{-k/2}\, UD^{-k/2}$ est à trace dans $\mathscr{H}_\lambda$.

On pose :

$$p_1^{-k}(U) = \mathrm{tr}(|D^{-k/2}\, UD^{-k/2}|).$$

Une mesure-opérateurs positive à croissance lente sur $\hat{G}$ est définie par un couple $(m,U)$ où $m$ est une mesure scalaire positive sur $\hat{G}$ et

$$U : \lambda \in \hat{G} \rightarrow U_\lambda \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\lambda)^{-\infty}$$

un champ mesurable d'opérateurs à trace-distributions positifs (i.e. vérifiant $(U_\lambda f|f) \geqslant 0$ pour $f \in \mathscr{H}_\lambda^{\infty}$) et satisfaisant à la condition suivante (condition de croissance lente) :

*il existe un entier* $k \in \mathbb{N}$ *tel que :*

*i) l'opérateur* $U_\lambda$ *appartient à* $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\lambda)^{-k}$ *pour* $m$*-presque tout* $\lambda$ *;*

*ii) la fonction*

$$\lambda \in \hat{G} \rightarrow p_1^{-k}(U_\lambda) = \mathrm{tr}(D^{-k/2}\, U_\lambda D^{-k/2})$$

*est* $m$*-intégrable.*

En fait, les mesures-opérateurs sont obtenues en identifiant les couples $(m,U)$ et $(m',U')$ lorsque, $m'$ ayant une densité par rapport à $m$, on a

$$U'_\lambda = \frac{dm'}{dm}(\lambda)\, U_\lambda \qquad \text{m.p.p.}$$

La *transformée de Fourier d'une distribution* $T$ *de type positif* sur $G$ est, par définition, la mesure-opérateurs $(m,U)$ introduite par le

THEOREME 1. - *Etant donné une distribution* T *de type positif sur* G, *il existe une unique mesure-opérateurs positive à croissance lente sur* $\hat{G}$ *vérifiant*

$$\text{(1)} \quad \forall\theta \in \mathscr{D}(G), \ \langle\theta(g^{-1}), T(g)\rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)\, dm(\lambda).$$

Précisons le sens de (1) : pour $\theta \in \mathscr{D}(G)$, pour $\lambda \in \hat{G}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)$ envoie continuement $\mathscr{H}_\lambda^{-k}$ dans $\mathscr{H}_\lambda^{k}$, de sorte que si $U_\lambda \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\lambda)^{-k}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)U_\lambda$ est à trace dans $\mathscr{H}_\lambda^{k}$. Le scalaire $\operatorname{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ désigne la trace de cet opérateur, trace qui ne dépend pas de k.

Rappelons brièvement le principe de la construction de $(m,U)$ telle qu'elle figure dans [6]. A la distribution T de type positif, on associe ([1] et [8]) une représentation $\pi_T$ de G et un vecteur distribution $f_T$ de $\pi_T$ tels que

$$\langle\theta(g^{-1}), T(g)\rangle = (\pi_T(\theta)f_T | f_T).$$

Soient :

$$\pi_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n(\lambda)\pi_\lambda \, dm(\lambda)$$

la désintégration centrale de $\pi_T$ et

$$f_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} f_\lambda \, dm(\lambda)$$

la désintégration de $f_T$ qui lui est associée. Le vecteur-distribution $f_\lambda$ est défini par une famille $f_{\lambda i}$ de vecteurs-distribution de $\pi_\lambda$ ; l'opérateur $U_\lambda$ est défini par

$$U_\lambda f' = \sum_i (f' | f_{\lambda i})\, f_{\lambda i}$$

REMARQUE : Moyennant une légère modification de la démonstration, l'unicité de la mesure-opérateurs $(m,U)$ peut être énoncée comme suit :

*Soient* $m$ *une mesure positive sur* $\hat{G}$ *et*

$$U : \lambda \in \hat{G} \to U_\lambda \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\lambda)^{-\infty}$$

*un champ mesurable d'opérateurs à trace-distributions positifs tels que, pour tout* $\theta$ *de* $\mathscr{D}(G)$ *la fonction* $\lambda \to \mathrm{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ *soit* $m$*-intégrable et l'égalité (1) ait lieu ; alors la mesure-opérateurs* $(m,U)$ *est à croissance lente et est la transformée de Fourier de* $T$.

Supposons désormais le groupe $G$ nilpotent connexe simplement connexe. L'application exponentielle est alors un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $G$, tel que l'image d'une mesure de Lebesgue $dA$ sur $\mathfrak{g}$ soit une mesure de Haar $dg$ sur $G$. Fixons une fois pour toutes $dA$ et $dg$.

On définit alors sur $G$ l'espace $\mathscr{S}(G)$ des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide et l'espace $\mathscr{S}'(G)$ des distributions tempérées, par transport, au moyen de l'application exponentielle, des espaces $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathscr{S}'(\mathfrak{g})$.

THEOREME 2. - *Si* $T$ *est une distribution de type positif sur* $G$ *alors* $T$ *est tempérée et la relation (1) du théorème 1 est vérifiée pour tout* $\theta \in \mathscr{S}(G)$.

DEMONSTRATION : On sait d'après [6] que si $T$ est de type positif, elle est continue quand on munit $\mathscr{D}(G)$ de la suite des normes $(p_*^{2k})$ $k \in \mathbb{N}$ où $p_*^{2k}(\theta)$ désigne la norme dans la $C^*$-algèbre de $G$ de la fonction $D^k * \theta * D^k$. Or $\mathscr{S}(G)$ s'injecte continuement dans $C^*(G)$ et l'application

$$\theta \to D^k * \theta * D^k$$

est continue de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(G)$. Ceci prouve la première assertion. La preuve de la seconde assertion consiste à adapter à $\theta \in \mathcal{S}(G)$ les démonstrations de [ 6 ] .

## II - TRANSFORMEE DE FOURIER EXPLICITE

Lorsque le groupe $G$ est nilpotent, on peut tenter, en utilisant la méthode des orbites, d'obtenir une construction plus explicite de la mesure $m$ et des opérateurs $U_\lambda$ définissant la transformée de Fourier de $T$. C'est ce à quoi nous parvenons dans un cas particulier.

Nous considérons désormais un groupe de Lie $G$ nilpotent connexe et simplement connexe, et nous supposons que $G$ contient un sous-groupe fermé connexe $G_1$ abélien et de codimension 1. Notons $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de $G_1$. Le sous-groupe $G_1$ étant de codimension 1 dans $G$ nilpotent, est distingué, et $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ ([18]).

Notons Ad et ad les représentations adjointes de $G$ et $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, ainsi que $Ad^*$ et $ad^*$ les représentations coadjointes de $G$ et $\mathfrak{g}$ dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$. Notons $p$ la projection de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}_1^*$.

Soient $e_1$ un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_1$ et $e_1^*$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_1^\perp$ vérifiant

$$\langle e_1, e_1^* \rangle = 1 .$$

Soit $\sigma$ l'action de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}_1$ définie par

$$\sigma_t B = \mathrm{Ad}_{\exp(te_1)} B$$

et soit $\sigma^*$ l'action dans $\mathcal{G}_1^*$ contragrédiente de $\sigma$ de sorte que $\sigma^*$ se déduit de $\mathrm{Ad}^*$ par passage au quotient.

Soient $d\sigma$ et $d\sigma^*$ les générateurs des groupes à un paramètre $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(\sigma_t^*)_{t \in \mathbb{R}}$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est produit semi-direct, au moyen de $d\sigma$, de l'idéal $\mathcal{G}_1$, et de $\mathbb{R}e_1$, et $G$ est produit semi-direct du sous-groupe distingué $G_1$ et de $\exp(\mathbb{R}e_1)$. Nous écrirons tout élément de $\mathcal{G}$

$$A = \alpha e_1 + A_1, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ A_1 \in \mathcal{G}_1$$

et moyennant le choix de $e_1$, nous identifierons $\mathcal{G}^*$ à $\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*$ en posant

$$x = (\xi, x_1) \quad \text{où} \quad \xi \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_1 \in \mathcal{G}_1^*.$$

Dans cette identification, les représentations $\mathrm{Ad}^*$ et $\mathrm{ad}^*$ s'écrivent :

$$\mathrm{ad}^*_{\alpha e_1 + A_1}(\xi, x_1) = (-\langle A_1, d\sigma^* x_1\rangle,\ \alpha d\sigma^* x_1)$$
$$\mathrm{Ad}^*_{\exp(\alpha e_1)\exp(A_1)}(\xi, x_1) = (\xi - \langle A_1, d\sigma^* x_1\rangle,\ \sigma_\alpha^* x_1).$$

EXEMPLES : Les hypothèses que nous nous fixons sont satisfaites pour toutes les algèbres de Lie définies par les crochets

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

ce qui comporte :

- l'algèbre d'HEISENBERG $\mathcal{G}_3$,

- l'unique algèbre nilpotente indécomposable $\mathfrak{g}_4$ de dimension 4,
- l'algèbre nilpotente $\mathfrak{g}_{55}$ (terminologie de [11] et [13]).

Un autre exemple est fourni par l'algèbre $\mathfrak{g}_{52}$ définie par

$$[e_1, e_2] = e_4 \qquad [e_1, e_3] = e_5 \quad .$$

Les orbites et le dual de $G$.

Pour $x \in \mathfrak{g}^*$ et $y \in \mathfrak{g}_1^*$, notons

- $\Omega_x$ l'orbite de $x$ pour l'action coadjointe de $G$,
- $\theta_y$ l'orbite de $y$ pour l'action $\sigma^*$ de $\mathbb{R}$.

Il vient

$$\theta_{p(x)} = p(\Omega_x).$$

Posons

$$\mathfrak{g}^*_{(0)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp \qquad \mathfrak{g}^*_{1(0)} = p(\mathfrak{g}^*_{(0)}) = \mathrm{Ker}(d\sigma^*)$$

et notons $\mathfrak{g}^*_{(I)}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_{1(I)}$) le complémentaire de $\mathfrak{g}^*_{(0)}$ dans $\mathfrak{g}^*$ (resp. de $\mathfrak{g}^*_{1(0)}$ dans $\mathfrak{g}^*_1$). Les ensembles $\mathfrak{g}^*_{(0)}$ et $\mathfrak{g}^*_{(I)}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_{1(0)}$ et $\mathfrak{g}^*_{1(I)}$) sont stables par $\mathrm{Ad}^*$ (resp. par $\sigma^*$).

a) Si $x \in \mathfrak{g}^*_{(0)}$ nous avons

$$\Omega_x = \{x\} \qquad \text{et} \qquad \theta_{p(x)} = \{p(x)\}.$$

On définit un caractère $\pi_x$ de $G$ par

$$\pi_x(\exp(A)) = e^{-2i\pi \langle A,x\rangle}$$

et on obtient ainsi une première partie $\hat{G}_{(0)}$ de $\hat{G}$ indexée par $x \in \mathfrak{g}^*_{(0)}$.

b) Si $x = (\xi, x_1) \in \mathcal{G}^*_{(I)}$ (i.e. $x_1 \in \mathcal{G}^*_{1(I)}$), l'orbite $\mathcal{O}_{x_1} = \mathcal{O}_{p(x)}$ est de dimension 1 et peut être paramétrée par

$$t \in \mathbb{R} \to \exp(te_1)x_1 = \sigma_t^{\,*}\, x_1 .$$

L'orbite $\Omega_x$ est de dimension 2 et s'identifie à $\mathbb{R} \times \mathcal{O}_{x_1}$.
La mesure de KOSTANT-LIOUVILLE sur $\Omega_x$ est $d\xi\, dt$. En outre l'idéal $\mathcal{G}_1$ est une polarisation en $x$.

Nous obtenons ainsi une deuxième partie $\hat{G}_{(I)}$ de $\hat{G}$ complémentaire de $\hat{G}_{(0)}$. A tout $\lambda \in \hat{G}_{(I)}$ correspondent une orbite $\Omega_\lambda$ contenue dans $\mathcal{G}^*_{(I)}$ et une orbite $\mathcal{O}_\lambda$ contenue dans $\mathcal{G}^*_{1(I)}$. Soit

$$y \in \mathcal{G}^*_{1(I)} \to y^\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$$

une section borélienne, et posons

$$y_t^\lambda = \exp(te_1)\, y^\lambda = \sigma_t^*\, y^\lambda .$$

En fait, on peut trouver (voir paragraphe III) une partition finie de $\mathcal{G}^*_{1(I)}$ par des ensembles $Y_i$ et une section rationnelle sur chaque $Y_i$ ; on associe à $\lambda$ le caractère $\chi_\lambda$ de $G_1$ défini par

$$\chi_\lambda(\exp(A_1)) = e^{-2i\pi \langle A_1,\, y^\lambda\rangle}$$

et la représentation $\pi_\lambda$ de $G$ induite de $\chi_\lambda$. On réalise $\pi_\lambda$ dans $L_2(\mathbb{R})$ et il vient :

$$\pi_\lambda(\exp(A_1)\exp(\alpha e_1))\, f(t) = e^{-2i\pi \langle A_1, y_t^\lambda\rangle}\, f(t-\alpha).$$

Dans cette réalisation $\mathcal{H}^\infty_\lambda$ et $\mathcal{H}^{-\infty}_\lambda$ sont respectivement l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide, et l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées. (Voir [3]).

REMARQUE : On reconnaît ici la description des orbites de la représentation co-adjointe d'un produit semi-direct donnée par RAWNSLEY ([19]) de sorte que la méthode des orbites se confond avec la méthode de MACKEY de construction de $\hat{G}$.

## LA TRANSFORMEE DE FOURIER.

Soit $T$ une distribution de type positif sur $G$.

Nous pouvons préciser la structure de la mesure-opérateurs $(m,U)$ transformée de Fourier de $T$ :

- la mesure $m$ s'écrit

$$m = m_{(0)} + m_{(1)}$$

où $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$ sont respectivement portées par $\hat{G}_{(0)}$ et $\hat{G}_{(1)}$

- pour $\lambda \in \hat{G}_{(0)}$, la représentation $\pi_\lambda$ étant de dimension 1, l'opérateur $U_\lambda$ est un scalaire. On choisira donc $m_{(0)}$ de manière à avoir

$$U_\lambda = 1 \quad m_{(0)}.\ \text{p.p.}$$

- Pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$ l'opérateur $U_\lambda$ est nucléaire de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Il est donc défini par un noyau $\mathscr{K}U_\lambda$ qui est la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\langle f',U_\lambda f\rangle = \langle f(s)f'(t),\mathscr{K}U_\lambda(s,t)\rangle \quad \text{pour} \quad f,f' \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, la transformée de Fourier de $T$ est décrite par la donnée des mesures $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$ respectivement portée par $\hat{G}_{(0)}$ et $\hat{G}_{(1)}$, et du noyau $\mathscr{K}U_\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ pour $m_{(1)}$-presque tout $\lambda$ de $\hat{G}_{(1)}$.

Rappelons ([3], [18]) que l'application

$$A = \alpha e_1 + A_1 \in \mathfrak{g} \to \exp(A_1)\exp(\alpha e_1) \subset G$$

est un difféomorphisme tel que l'image de la mesure de Lebesgue $d\alpha\, dA_1$ est la mesure de Haar $dg$. On définit une distribution tempérée $T^{\#}$ sur $\mathfrak{g}$ par

$$T^{\#}(\alpha e_1 + A_1) = T(\exp(A_1)\exp(\alpha e_1))$$

et on définit de même $\theta^{\#}$ pour $\theta \in \mathscr{S}(G)$.

Nous allons décrire $m_{(0)}$, $m_{(1)}$ et les $\mathscr{K}U_\lambda$ à l'aide de transformées de Fourier classiques : la transformée de Fourier totale $\mathscr{F}T^{\#}(x) = \mathscr{F}T^{\#}(\xi, x_1)$ de $T^{\#}$ et sa transformée de Fourier partielle $\mathscr{F}_{A_1} T^{\#}(\alpha, x_1)$ par rapportà la variable $A_1$. Pour cela, on commence par calculer $\pi_\lambda(\theta)$, pour $\theta$ fonction de $\mathscr{S}(G)$ :

- si $x \in \mathfrak{g}^*_{(0)}$, l'opérateur $\pi_x(\theta)$ est un scalaire et

$$\pi_x(\theta) = \mathscr{F}\theta^{\#}(x)$$

- pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)$ est continu de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ (muni de sa topologie forte de dualité) dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et admet un noyau $\mathscr{K}\theta_\lambda$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.

Il vient :

$$(\mathscr{K}\theta_\lambda)(s,t) = \int_{\mathfrak{g}_1} \theta(\exp A_1 \exp(t-s)e_1) e^{-2i\pi\langle\sigma_{-t}(A_1), y^\lambda\rangle}\, dA_1$$

$$= \int_{\mathfrak{g}_1} \theta^{\#}((t-s)e_1 + A_1) e^{-2i\pi\langle A_1, y_t^\lambda\rangle}\, dA_1 = \mathscr{F}_{A_1}\theta^{\#}(t-s, y_t^\lambda) .$$

Ceci étant, définissons pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$ les distributions tempérées suivantes sur $\mathbb{R}^2$

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t) = \mathscr{K}U_\lambda(t-\alpha,t)$$

$$\Phi_{(I)\lambda}(\xi,t) = \mathscr{F}_\alpha \Psi_{(I)\lambda}(\xi,t) \ .$$

Soit $\theta^*$ la fonction définie par

$$\theta^*(g) = \overline{\theta(g^{-1})} \ .$$

Il vient :

$$\pi_\lambda(\theta^*) = \pi_\lambda(\theta)^* \qquad \text{(adjoint de l'opérateur } \pi_\lambda(\theta))$$

et

$$\mathscr{K}\theta_\lambda^*(s,t) = \overline{\mathscr{K}\theta_\lambda(t,s)}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\pi_\lambda(\theta^*)U_\lambda) &= <\mathscr{K}\theta^*{}_\lambda(t,s),\ \mathscr{K}U_\lambda(s,t)> \\
&= <\overline{\mathscr{K}\theta_\lambda\ (s,t)},\ \mathscr{K}U_\lambda(s,t)> \\
&= <\overline{\mathscr{F}_{A_1}\theta^{\#}(t-s,\ y_t^\lambda)},\ \mathscr{K}U_\lambda(s,t)> \\
&= <\overline{\mathscr{F}_{A_1}\theta^{\#}(\alpha,y_t^\lambda)},\ \Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t)> \\
&= <\overline{\mathscr{F}\theta^{\#}(\xi,y_t^\lambda)},\ \Phi_{(I)\lambda}(\xi,t)> \ .
\end{aligned}$$

De là, il résulte, en appliquant la relation (1) du théorème 1 à la fonction $\theta^*$,

$$\begin{aligned}
<\overline{\theta(g)},T(g)> &= \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\lambda(\theta^*)U_\lambda)\,dm(\lambda) \\
&= \int_{\mathcal{G}^*_{(0)}} \overline{\mathscr{F}\theta^{\#}(x)}\ dm_{(0)}(x) + \int_{\hat{G}_{(I)}} <\overline{\mathscr{F}_{A_1}\theta^{\#}(\alpha,y_t^\lambda)},\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t)>dm_{(I)}(\lambda) \\
&= \int_{\mathcal{G}^*_{(0)}} \overline{\mathscr{F}\theta^{\#}(x)}\ dm_{(0)}(x) + \int_{\hat{G}_{(I)}} <\overline{\mathscr{F}\theta^{\#}(\xi,y_t^\lambda)},\Phi_{(I)\lambda}(\xi,t)>dm_{(I)}(\lambda)
\end{aligned}$$

Nous définissons alors des distributions tempérées $\Phi_{(0)}$, $\Phi_{(I)}$ et $\Phi$ sur $\mathcal{G}^*$ par

$$< \varphi(x), \Phi_{(0)}(x) > = \int_{\mathcal{G}^*_{(0)}} \varphi(x) dm_{(0)}(x) \qquad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathcal{G}^*))$$

$$< \varphi(x), \Phi_{(I)}(x) > = \int_{\hat{G}_{(I)}} < \varphi(\xi, y_t^\lambda), \Phi_{(I)\lambda}(\xi, t) > dm_{(I)}(\lambda) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathcal{G}^*))$$

$$\Phi = \Phi_{(0)} + \Phi_{(I)}.$$

Dans la définition de $\Phi_{(1)}$, il s'agit d'une intégrale faible de distinctions tempérées , qui est elle-même une distinction tempérée ([7]).

Notons encore $\Psi_{(0)}$, $\Psi_{(I)}$ et $\Psi$ les transformées de Fourier inverses partielles par rapport à la variable $\xi$, de $\Phi_{(0)}$, $\Phi_{(I)}$ et $\Phi$ . En particulier :

$$< \psi(\alpha, x_1), \Psi_{(I)}(\alpha, x_1) > = \int_{\hat{G}_{(I)}} < \psi(\alpha, y_t^\lambda), \Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) > dm_{(I)}(\lambda) \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R} \times \mathcal{G}_1^*)$$

Il vient alors , pour toute fonction $\theta$ de $\mathscr{S}(G)$

$$< \overline{\theta}^{\#}, T^{\#} > = < \overline{\theta}, T > = < \overline{\mathscr{F}_{A_1} \theta^{\#}}, \Psi > = < \overline{\mathscr{F}\theta^{\#}}, \Phi >$$

d'où il résulte

$$\Psi = \mathscr{F}_{A_1} T^{\#} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \mathscr{F} T^{\#}$$

**Théorème 3.** *Les hypothèses et les notations étant fixées ci-dessus, soit* $T$ *une distribution de type positif sur* $G$ *, soient* $\Phi$ *la transformée de Fourier totale de* $T^{\#}$ *et* $\Psi$ *sa transformée de Fourier partielle par rapport à* $A_1$.

*a) On peut trouver :*

- *des mesures positives* $m_{(0)}$ *et* $m_{(I)}$ *sur* $\hat{G}$ *portées respectivement par* $\hat{G}_{(0)}$ *(qu'on identifie à* $\mathcal{G}^*_{(0)}$*) et* $\hat{G}_{(I)}$

- *des champs* $(\Phi_{(I)\lambda})_{\lambda\in\hat{G}_{(I)}}$ *et* $(\psi_{(I)\lambda})_{\lambda\in\hat{G}_{(I)}}$ *de distributions tempérées sur* $\mathbb{R}^2$ ,

*tels que :*

*i) pour* $m_{(I)}$ *-presque tout* $\lambda$, $\Phi_{(I)\lambda}$ *est la transformée de Fourier partielle de* $\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t)$ *par rapport à* $\alpha$.

*ii)* $\Phi = \Phi_{(0)} + \Phi_{(I)}$ *où* $\Phi_{(0)}$ *et* $\Phi_{(I)}$ *sont définies par*

$$< \varphi(x),\ \Phi_{(0)}(x) > = \int_{\mathcal{G}^*_{(0)}} \varphi(x)dm_{(0)}(x)$$

$$< \varphi(x),\ \Phi_{(I)}(x) = \int_{\hat{G}_{(I)}} < \varphi(\xi, y_t^\lambda),\ \Phi_{(I)\lambda}(\xi,t) > dm_{(I)}(\lambda) \quad \textit{pour} \quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathcal{G}^*)$$

*ii')* $\Psi = \Psi_{(0)} + \Psi_{(I)}$ *où* $\Psi_{(0)}$ *est la transformée de Fourier inverse partielle par rapport à* $\xi$ *de* $\Phi_{(0)}(\xi,x_1)$ *et* $\Psi_{(I)}$ *est définie par*

$$< \psi(\alpha,x_1),\Psi_{(I)}(\alpha,x_1) > = \int_{\hat{G}_{(I)}} < \psi(\alpha, y_t^\lambda),\ \Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t)dm_{(I)}(\lambda) \quad \textit{pour} \quad \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathcal{G}_1^*)$$

*b) Si des mesures* $m_{(0)}$ *et* $m_{(I)}$ *ainsi que des champs* $(\Psi_{(I)\lambda})$ *et* $(\Phi_{(I)\lambda})$ *de distributions tempérées vérifient i), ii) et ii'), la transformée de Fourier de* T *est la mesure-opérateurs* (m,U) *définie comme suit :*

- $m = m_{(0)} + m_{(I)}$
- *pour* $\lambda \in \hat{G}_{(I)}$ *l'opérateur* $U_\lambda$ *est décrit par le noyau* $\mathcal{K}U_\lambda$ *suivant :*

$$\mathcal{K}U_\lambda(s,t) = \Psi_{(I)\lambda}(t-s,t) = \tilde{\mathcal{F}}_\xi\ \Phi_{(I)\lambda}(t-s,t)$$

**Démonstration.** a) a été démontré plus haut et pour b) il suffit de remonter les calculs.

**REMARQUE 1** : Dans la pratique, pour utiliser le théorème, il suffit de procéder soit avec $\Phi$ , soit avec $\Psi$ et de mettre en évidence, d'une part les mesures $m_{(0)}$ et $m_{(I)}$, d'autre part le champ $(\Phi_{(I)\lambda})$ ou le champ $(\Psi_{(I)\lambda})$.

**REMARQUE 2** : On obtient un résultat tout-à-fait analogue à partir de la distribution tempérée $T^b$ définie sur $\mathfrak{g}$ par

$$T^b(A) = T^b(\alpha e_1 + A_1) = T(\exp(\alpha e_1)\exp(A_1))$$

mais avec $\mathscr{K}U_\lambda(s,t) = \Psi_{(I)\lambda}(t-s,s)$.

**REMARQUE 3** : On voit comment intervient l'hypothèse d'existence d'un sous-groupe abélien de codimension 1 . Cette hypothèse assure l'existence d'une polarisation commune à tous les points de $\mathfrak{g}^*$ qui ne sont pas invariants par la représentation coadjointe. En outre, dans le cas général, on ne peut pas définir $T^{\#}$. Cependant il existe une possibilité d'éviter le recours à $T^{\#}$.

Dans nos hypothèses, posons :

$$T^{\natural}(A) = T(\exp(A))$$

Il vient, par exemple pour $\theta$ dans $\mathscr{S}(G)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\theta^{\#}(x) &= \int_{\mathfrak{g}} \theta\,(\exp(A_1)\exp(\alpha e_1))e^{-2i\pi(<A_1,x_1>+\alpha\xi)}dA_1 d\alpha \\ &= \int_{\mathfrak{g}} \theta^{\natural}(B)e^{-2i\pi P(B,x)}dB\end{aligned}$$

où, pour $B = \beta e_1 + B_1$ $(B_1 \in \mathfrak{g}_1)$, on pose :

$$P(\beta,x) = \beta\xi + < \beta^{-1}(\sigma_\beta - I)B_1,x_1 >$$

de sorte que P est polynômiale en B et x.

Ainsi, on peut remplacer $T^{\sharp}$ par $T^{\flat}$ à condition d'utiliser une autre transformation que la transformation de Fourier classique. Cela ouvre une possibilité pour la généralisation à un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe quelconque ; un outil pourrait être fourni par la transformation de Fourier nilpotente (voir [ 2 ]).

## III. APPLICATION A LA FORMULE DE PLANCHEREL SUR UN ESPACE HOMOGENE

Les hypothèses et les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. Soient H un sous-groupe connexe de G et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Etant donné une mesure de Haar dh sur H, soit T la distribution de type positif sur G induite par dh :

$$< \theta(g), T(g) > = \int_H \theta(h)dh$$

Soit

$$\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de $\mathfrak{g}_1$, de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

est une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de $\mathfrak{g}$. Posons

$$\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j$$

et soit J l'ensemble des entiers j ($1 \leqslant j \leqslant n$) tels que

$$\mathfrak{h}_{j-1} \supsetneq \mathfrak{h}_j$$

Choisissons une base de Jordan-Hölder $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que

$$\begin{cases} e_j \in \mathfrak{g}_{j-1} - \mathfrak{g}_j \\ \text{et } e_j \in \mathfrak{h}_{j-1} \text{ lorsque } j \in J \end{cases}$$

En particulier, si H n'est pas contenu dans $G_1$ on choisit $e_1$ dans $\mathfrak{h}$. Moyennant ce choix de $e_1$ il vient :

$$T^{\#} = \delta_{\mathfrak{h}}$$

(i.e. $< \theta^{\#}(A), T^{\#}(A) > \; = \int_{\mathfrak{h}} \theta^{\#}(B)dB$ où dB est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}$ dont l'image par l'application $\alpha e_1 + A_1 \longmapsto \exp(A_1)\exp(\alpha e_1)$, ainsi que par l'application exponentielle est dh) et

$$\Phi = \delta_{\mathfrak{h}^{\perp}}$$

(i.e. $< \varphi(x), \Phi(x) > \; = \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} \theta(z)dz$ où dz est une mesure de Lebesgue convenablement choisie sur $\mathfrak{h}^{\perp}$).

Deux cas sont à distinguer :

1° $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ d'où $\mathfrak{h}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*_{(0)}$

Il vient :

$$\Phi_{(1)} = 0 \qquad m_{(1)} = 0$$

et la mesure $m = m_{(0)}$ concentrée sur $\hat{G}_{(0)}$ identifié à $\mathfrak{g}^*_{(0)}$ n'est autre que $\delta_{\mathfrak{h}^{\perp}}$.

2° $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{h}$

Dans ces conditions $\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{g}^*_{(0)}$ est négligeable dans $\mathfrak{h}^{\perp}$. Il vient

$$\Phi_{(0)} = 0 \qquad m_{(0)} = 0 \qquad m = m_{(I)}$$

Il est alors préférable de poursuivre le raisonnement en utilisant $\Psi = \Psi_{(I)}$.

Posons :

$$V = p(\mathfrak{h}^{\perp})$$

de sorte que V est l'orthogonal de $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{g}_1^*$.

Nous devrons encore distinguer les 2 cas suivants :

a) Si $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ il vient :

$$T^{\#}(\alpha e_1 + A_1) = \mathbb{1}(\alpha)\ \delta_{\mathfrak{h}_1}(A_1)$$

$$\Phi(\xi, x_1) = \delta(\xi)\,\delta_V(x_1)$$

$$\Psi(\alpha, x_1) = \mathbb{1}(\alpha)\,\delta_V(x_1)$$

b) Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ il vient :

$$T^{\#}(\alpha e_1 + A_1) = \delta(\alpha)\ \delta_{\mathfrak{h}_1}(A_1)$$

$$\Phi(\xi, x_1) = \mathbb{1}(\xi)\ \delta_V(x_1)$$

$$\Psi(\alpha, x_1) = \delta(\alpha)\ \delta_V(x_1)$$

Bien entendu, les produits figurant dans ces égalités sont des produits tensoriels de distribution, et $\delta_V$ est la distribution induite sur $\mathfrak{g}_1^*$ sur une mesure de Lebesgue convenablement choisie sur V.

Dans ces 2 cas nous sommes conduits à effectuer une désintégration de la mesure $\delta_V$ afin de déterminer la mesure $m_{(I)}$ et le champ $(\Psi_{(I)\lambda})_{\lambda \in \hat{G}_{(I)}}$ de distributions tempérées.

Notons $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ la base de $\mathfrak{g}_1^*$ duale de $(e_2, \ldots, e_n)$.

Nous allons appliquer à $\sigma^*$ la méthode de PUKANSKY ([5] et [18]) de paramétrisation des orbites d'une représentation unipotente d'un groupe de Lie nilpotent. Cette méthode se trouve ici considérablement simplifiée.

Pour tout y de $\mathcal{G}_1^*$ notons $j_y$ le plus grand des entiers j vérifiant

$$< e_j, d\sigma^* y > \neq 0$$

et soit $n > j_1 > \dots > j_\ell > j_{\ell+1} = 1$ la suite indexée de façon strictement décroissante des entiers de la forme $j_y$ lorsque y parcourt $\mathcal{G}_1^*$ (on a $j_y > 1$ si et seulement si y est dans $\mathcal{G}_{1(I)}^*$). Posons :

$$F_i = \{ y \in \mathcal{G}_1^* / j_y \leqslant j_i \}$$

$$Y_i = F_i - F_{i+1} = \{ y \in \mathcal{G}_1^* / j_y = j_i \}$$

Les $F_i$ forment une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{G}_1^*$ (avec $F_{\ell+1} = \mathcal{G}_{1(0)}^*$) et $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant \ell}$ est une partition de $\mathcal{G}_{1(I)}^*$.

En outre, chaque $Y_i$ étant stable par $\sigma^*$, il en résulte une partition de $\hat{G}_{(I)}$ par des ensembles boréliens $\hat{G}_{(I,1)},\dots,\hat{G}_{(I,\ell)}$.

Pour tout y de $Y_i$ il vient :

$$\sigma_t^* y = \sum_{j=2}^{n} P_j(t,y)\varepsilon_j$$

où les $P_j$ sont des polynômes en t et y avec

$$P_{j_i}(t,y) = y_{j_i} + t < e_{j_i}, d\sigma^* y >$$

$$\text{et} \quad P_j(t,y) = y_j \quad \text{pour} \quad j > j_i$$

Donc, si $\lambda \in \hat{G}_{(I,i)}$ il existe un unique point $y^\lambda$ de $\theta_\lambda$ vérifiant

$$< e_{j_i}, y^\lambda > = 0$$

et, en associant à tout $y$ de $Y_i$ le point $y^\lambda$ tel que $y \in \mathcal{O}_\lambda$, on définit une section rationnelle pour l'action de $\mathbb{R}$ dans $Y_i$ au moyen de $\sigma^*$.

Soit $v_i$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^{n-2}$ dans $\mathfrak{g}_1^*$ qui, à $\lambda = (\lambda_2, \ldots, \lambda_{j_i-1}, \lambda_{j_i+1}, \ldots, \lambda_n)$ associe

$$v_i\lambda = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ \text{et } j \neq j_i}} \lambda_j \varepsilon_j$$

Posons

$$M_i = v_i^{-1}(F_i) \qquad N_i = v_i^{-1}(F_{i+1}) \quad \text{et}$$

$$\Lambda_i = M_i - N_i = v_i^{-1}(Y_i)$$

On peut indexer $\hat{G}_{(I,i)}$ par $\lambda \in \Lambda_i$ de manière à avoir $y^\lambda = v_i\lambda$. La bijection entre $\Lambda_i$ et $\hat{G}_{(I,i)}$ est un isomorphisme d'espaces boréliens.

La mesure $\delta_V$ sur $\mathfrak{g}_1^*$ se désintègre au moyen d'une mesure m sur $\hat{G}$ portée par $\hat{G}_{(I)}$ et d'une famille

$$\lambda \in \hat{G}_{(I)} \longrightarrow \mu_\lambda$$

où $\mu_\lambda$ est une mesure sur $\mathcal{O}_\lambda$. Désormais i désignera le plus grand entier tel que V soit contenu dans $F_i$ ; alors $F_{i+1}$ est négligeable dans V et la mesure $\delta_V$ est portée par $Y_i$. De là il résulte que m est portée par $\hat{G}_{(I,i)} = \Lambda_i$. En outre, pour m-presque tout $\lambda$ la mesure $\mu_\lambda$ est portée par $\mathcal{O}_\lambda \cap V$. (Pour la désintégration de $\delta_V$ voir [7])

**LEMME.** – *i) Si* $V$ *n'est pas stable par* $\sigma^*$*, la mesure* $\mu_\lambda$ *est à support fini pour* $m$*-presque tout* $\lambda$.

*ii) Si* $V$ *est stable par* $\sigma^*$*, la mesure* $\mu_\lambda$ *est équivalente à la mesure* $dt$ *pour* $m$*-presque tout* $\lambda$ *et la densité de* $\mu_\lambda$ *par rapport à* $dt$ *est polynômiale.*

**DEMONSTRATION :** Une base de $\mathfrak{h}_1$ est constituée par les $e_j$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $j \in J$. Donc, si $y \in Y_i$, le point $\sigma_t^* y$ appartient à $V$ si et seulement si $P_j(t,y) = 0 \quad \forall j \in \{2,\ldots,n\} \cap J$.

Par conséquent si, $y$ étant un point de $\mathcal{O}_\lambda$, nous notons $\rho(y)$ l'ensemble des zéros communs aux polynômes $P_j(.,y)$ pour $j \in \{2,\ldots,n\} \cap J$, l'application

$$t \longmapsto \sigma_t^* y = \sum_{j=2}^{n} P_j(t,y)\,\varepsilon_j$$

envoie bijectivement $\rho(y)$ sur $\mathcal{O}_\lambda \cap V$. Il en résulte que $\mathcal{O}_\lambda \cap V$ est, soit fini, soit égal à $\mathcal{O}_\lambda$. Posons :

$$\Lambda_i' = \{\lambda \in \Lambda_i / \mathcal{O}_\lambda \subset V\}$$

$$Y_i' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i'} \mathcal{O}_\lambda$$

Si nous écrivons

$$P_j(t,y) = \sum_k P_{jk}(y)t^k,$$

nous voyons que $Y_i'$ est l'ensemble des zéros communs dans $Y_i$ à tous les polynômes $P_{jk}$, pour tout $k$ et pour $j \in \{2,\ldots,n\} \cap J$. Il en résulte que :

i) ou bien $Y_i'$ est négligeable dans $V$ et alors $\Lambda_i'$ est $m$-négligeable, et $\rho(y)$ et $\mathcal{O}_\lambda \cap V$ sont finis pour $m$-presque tout $\lambda$.

ii) ou bien $Y_i^!$ est égal à V, ce qui signifie que V est stable par $\sigma^*$. Alors m est portée par $\Lambda_i^!$ .

L'application

$$(t,\lambda) \longmapsto y_t^\lambda = \sigma_t^*(y^\lambda)$$

réalise alors un isomorphisme d'espaces mesurables de $\mathbb{R} \times \Lambda_i^!$ sur V. Pour voir que $\mu_\lambda$ (dont le support est égal à $\mathcal{O}_\lambda$) a une densité polynômiale par rapport à dt, il suffit d'exprimer cet isomorphisme dans une base de $M_i$ obtenue en complétant une base de $M_i \cap v_i^{-1}(V)$.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant aborder la description de $\Psi_{(I)\lambda}$ et de $U_\lambda$ dans les différents cas.

a) $\mathfrak{h}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}_1$ ; on choisit donc $e_1$ dans $\mathfrak{h}$ . L'espace $\mathfrak{h}_1$ est stable par $\sigma$ et V est stable par $\sigma^*$. On est donc dans la situation ii) du lemme. En outre, $\delta_V$ étant invariante par $\sigma^*$, on peut choisir m de façon à ce que chaque $\mu_\lambda$ soit définie par

$$d\mu_\lambda(y_t^\lambda) = dt$$

Il vient alors, pour $\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R} \times \mathfrak{g}_1^*)$

$$\begin{aligned} < \psi(\alpha,y),\ \Psi(\alpha,y) > &= \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathfrak{g}_1^*} \psi(\alpha,y)d\,\delta_V(\alpha,y)dy\Big)d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\Lambda_i} \Big( \int_{\mathbf{R}} \psi(\alpha,y_t^\lambda)dt\Big)dm(\lambda)\Big)d\alpha \\ &= \int_{\Lambda_i} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\alpha,y_t^\lambda)d\alpha\, dt\Big)dm(\lambda) \end{aligned}$$

Ainsi, il vient, pour m-presque tout $\lambda$ de $\Lambda_i$,

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t) = \mathbb{1}(\alpha,t)$$

$$\mathscr{K}U_\lambda(s,t) = \mathbb{1}(t-s,t) = \mathbb{1}(s,t)$$

et $U_\lambda$ est l'opérateur de rang 1 défini par

$$U_\lambda f(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(s)ds\right)\mathbf{1}(t)$$

b) $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_1$.

i) V n'est pas stable par $\sigma^*$, ce qui équivaut à H non distingué. D'après le lemme, on a, pour presque tout $\lambda$ ,

$$\mu_\lambda = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)\, \delta_{y^\lambda_{t_r}} \text{, avec } \rho(y^\lambda) = \{t_1,\dots,t_{r_\lambda}\}$$

d'où, pour $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathfrak{g}_1^*)$

$$< \psi(\alpha,y), \Psi(\alpha,y) > = \int_{\mathfrak{g}_1^*} \psi(0,y)d\delta_V(y)$$

$$= \int_{\Lambda_i} \left(\sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)\, \psi(0,y^\lambda_{t_r})\right)dm(\lambda)$$

On en déduit, pour m-presque tout $\lambda$ de $\Lambda_i$,

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t) = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)\, \delta(\alpha)\, \delta_{t_r}(t)$$

et :

$$\mathscr{K}U_\lambda(s,t) = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)\, \delta(t-s)\, \delta_{t_r}(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)\, \delta_{t_r}(s)\, \delta_{t_r}(t)$$

et $U_\lambda$ est l'opérateur de rang $r_\lambda$ défini par

$$U_\lambda f(t) = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) f(t_r)\, \delta_{t_r}(t)$$

ii) V est stable par $\sigma^*$, ce qui équivaut à H distingué. D'après le lemme, on a, pour m-presque tout $\lambda$

$$d\mu_\lambda(y_t^\lambda) = a^\lambda(t)dt$$

où les $a^\lambda$ sont des polynômes sans racines réelles. Il vient :

$$< \psi(\alpha,y), \Psi(\alpha,y) > = \int_{\Lambda_i} \left( \int_{\mathbb{R}} a^\lambda(t)\psi(0,y_t^\lambda)dt\right)dm(\lambda)$$

d'où, pour m - presque tout $\lambda$,

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha,t) = \delta(\alpha)a^\lambda(t)$$

$$\mathscr{K}U_\lambda(s,t) = \delta(t-s)a^\lambda(t)$$

et $U_\lambda$ est l'opérateur de multiplication par $a^\lambda$.

**REMARQUE :** Ici la représentation $\pi_T$ de la démonstration du théorème 1 est la représentation quasi-régulière associée au sous-groupe $\overset{o}{H}$. On retrouve donc dans un cas particulier, les résultats de GRELAUD ( [10] ) sur la désintégration d'une telle représentation. Mais la connaissance des opérateurs $U_\lambda$ va nous donner des informations supplémentaires.

**Formule de Plancherel :** En remarquant que lorsque T est la distribution induite par la mesure de Haar sur H on a

$$T(g^{-1}) = T(g)$$

on obtient la formule de Plancherel concrète au sens de [14] en explicitant dans chaque cas le scalaire $tr(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ dans la relation (1) de définition de la transformée de Fourier (m,U). Les différents cas sont décrits dans le tableau suivant, où $\theta$ désigne une fonction de $\mathscr{S}(G)$.

1° $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$

$$\int_H \theta(h)dh = \int_{\mathfrak{g}^*_{(0)}} \pi_x(\theta) d\delta_{\mathfrak{h}^\perp}(x)$$

2° $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{h}$

La mesure m est concentrée sur l'un des ensembles $\hat{G}_{(I,i)} = \Lambda_i$.

a) $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$

$$\int_H \theta(h)dh = \int_{\Lambda_i} \left( \int_{\mathbb{R}} (\pi_\lambda(\theta).\mathbb{1})(t)dt \right) dm(\lambda)$$

b) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$

i) H non distingué

$$\int_H \theta(h)dh = \int_{\Lambda_i} \left( \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r)(\pi_\lambda(\theta).\delta_{t_r})(t_r) \right) dm(\lambda)$$

ii) H distingué

$$\int_H \theta(h)dh = \int_{\Lambda_i} \left( \int_{\mathbb{R}} a^\lambda(t)(\pi_\lambda(\theta).\delta_t)(t)dt \right) dm(\lambda).$$

*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. F. AARNES, Ditributions of positive type and representations of Lie groups, *Math. Ann., 240 (1979), 141-156.*

[2] D. ARNAL, J. C. CORTET, Nilpotent Fourier transform and applitions, *Lectures in mathematical physics n° 9 (1985), 23-34.*

[3] Y. BENOIST, Espaces symétriques exponentiels, *Thèse 3-ème cycle, Paris VII, 1983.*

[4] Y. BENOIST, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, *Journ. Func. Anal., 59, n° 2 (1984) 211-253.*

[5] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHAS, M. RAÏS, P. RENOUARD, M. VERGNE, Représentations des groupes de Lie résolubles, *Monographies de la Soc. Math. de France, Dunod, Paris 1972.*

[6] P. BONNET, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, *Journ. Func. Anal., 55, n° 2 (1984), 220-246.*

[7] N. BOURBAKI, Intégration, livre VI, *Hermann, Paris.*

[8] P. CARTIER, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, *Séminaire BOURBAKI, Exp. n° 454, Lectures Notes 514, 20-34, Springer, Berlin/New-York, 1975.*

[9] H. FUJIWARA, Représentations monômiales des groupes de Lie nilpotents, *Université de Kyushu, preprint, 1985.*

[10] G. GRELAUD, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, *Thèse d'Etat, Université de Poitiers, 1984.*

[11] C. GODFREY, Table of coadjoint orbits for nilpotent Lie algebras, *Université de Massachusets, Boston, preprint.*

[12] KIRILLOV, Eléments de la théorie des représentations, *Editions Mir, Moscou (1974).*

[13] O.A. NIELSEN, Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups, *Queen's papers in pure and applied mathematics, n° 63, Queen's University, Kingston, Ontario.*

[14] R. PENNEY, Abstract Plancherel theorem and a Frobenius reciprocity theorem, *Jour. Func. Anal., 18 (1975), 177-190.*

[15] N.S. POULSEN, On $C^{\infty}$ vectors and intertwining linear forms for representations of Lie groups, *Jour. Funct. Anal., 9 (1972), 87-120.*

[16] L. PUKANSKY, Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris, t. 4 (1971), 457-608.*

[17] L. PUKANSKY, Leçons sur les représentations des groupes, *Dunod Paris, (1967).*

[18] M. RAIS, Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites, *Analyse harmonique, les cours du C.I.M.P.A. (1982), 447-710.*

[19] RAWNSLEY, Representation of a semi-direct product by quantization, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 345-350.*

*