

D. ARNAL

J. C. CORTET

**Déformations algébriques sur le dual  $\underline{g}^*$  d'une algèbre de Lie**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1987, fascicule 1B  
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 147-162

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1987\\_\\_1B\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__1B_147_0)

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DÉFORMATIONS ALGÈBRIQUES SUR LE DUAL  $\underline{g}^*$   
D'UNE ALGÈBRE DE LIE

-----

par

D. ARNAL                      et  
Université de Metz

J.C. CORDET  
Université de Dijon

0. Avertissement. Ce travail doit beaucoup aux nombreuses conversations des auteurs avec M. Cahen et S. Gutt de l'Université de Bruxelles lors de leur séjour à Nancy et à Metz en 1986.

1. Introduction

Soit  $\underline{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur le corps des complexes et  $\underline{g}^*$  son dual algébrique.  $S(\underline{g})$  désigne l'algèbre des fonctions polynômes sur  $\underline{g}^*$ ,  $U(\underline{g})$  l'algèbre enveloppante de  $\underline{g}$ .

La structure de  $\underline{g}$  permet de définir un crochet de Poisson sur  $\underline{g}^*$  : si  $(X_i)$  est une base de  $\underline{g}$  et  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\xi \in \underline{g}^*$  :  $x_i = \langle X_i, \xi \rangle$ , on a :

$$\{u, v\} = \sum_{i, j, k} C_{ij}^k x_k \partial_i u \partial_j v$$

où  $C_{ij}^k$  sont les constantes de structure de  $\underline{g}$  et  $\partial_i$  est la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_i}$

$S(\underline{g})$  est ainsi une algèbre associative et une algèbre de Lie pour le produit ordinaire et le crochet de Poisson.

Dans la théorie de quantification par déformation [1], on considère des déformations formelles particulières d'une telle structure : les produits  $*$

Définition 1 : Soit  $N$  une algèbre associative de fonctions munie d'un crochet de Poisson. Un produit  $*$  est une déformation formelle de  $N$  :

$$u * v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u, v)$$

telle que :

1.  $*$  prolongée à l'espace  $E(N, \nu)$  des séries formelles en  $\nu$  à coefficients dans  $N$  est associative.

2.  $C_0(u, v) = uv$

3.  $C_1(u,v) = \{u,v\}$  et  $C_r(u,v) = (-1)^r C_r(v,u)$   
 4.  $C_r(1,v) = C_r(u,1) = 0 \quad \forall r > 0$  les  $C_r$  sont bilinéaires

la condition 3 implique que

$$[u,v] = \frac{1}{2\nu}(u*v - v*u)$$

est une déformation formelle de  $\{u,v\}$ ,

la condition 4 que 1 reste une unité de  $*$  et  $*$  reste distributif par rapport à l'addition. Alors si  $a$  est une fonction constante,  $a*u = a u = u*a$ .

Notons  $R(\underline{g})$  le corps des fonctions rationnelles sur  $\underline{g}^*$ .

Nous nous intéressons ici aux constructions algébriques de déformation ou de produit  $*$  sur des algèbres associative et de Poisson  $N$  telles que :

$$S(\underline{g}) \subset N \subset R(\underline{g})$$

Un tel produit  $*$  a été introduit par Lugo [2] si  $\underline{g}$  est nilpotente et S. Gutt [3] dans le cas général.

## 2. Produit $*$ de Lugo-Gutt, le problème de la réduction

Notons  $\sigma$  l'opérateur de symétrisation de  $S(\underline{g})$  vers  $U(\underline{g})$ ,  $U(\underline{g})^n$  l'image par  $\sigma$  de l'espace  $S^n(\underline{g})$  des polynômes homogènes de degré  $n$  et

$$u = \sum_n u_n$$

la décomposition d'un élément  $u$  de  $U(\underline{g})$  dans  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} U(\underline{g})^n$ .

### Théorème 1 ([3])

Soit  $P \in S^p(\underline{g})$ ,  $Q \in S^q(\underline{g})$ , la formule :

$$P * Q = \sum_{r=0}^{\infty} (2\nu)^r \sigma^{-1}((\sigma(P) \cdot \sigma(Q))_{p+q-r})$$

définit un produit  $*$  sur  $S(\underline{g})$ , les  $c_r$  sont des opérateurs bidifférentiels.

Cependant on désirerait définir des produits  $*$  sur  $N$  qui puissent se restreindre aux orbites génériques de la représentation coadjointe du groupe  $G$  associé à  $\underline{g}$ . Ceci impose une condition du type :

$$(1) \quad \forall a \in S^0 = \{\text{polynômes invariants}\}, a*u = u*a = a u \quad u \in S(\underline{g})$$

Malheureusement le produit  $*$  de Lugo-Gutt ne satisfait pas cette condition lorsque  $\underline{g} = \mathfrak{sl}_2$  ou lorsque  $\underline{g}$  est une algèbre de Lie nilpotente d'indice de nilpotence trop élevé [4]. On ne peut donc pas le restreindre aux orbites génériques de  $\underline{g}^*$  et il est donc mal adapté à la question de trouver une "théorie des orbites" globale par déformation.

Si  $\underline{g}$  est semi-simple de rang 1, M. Cahen et S. Gutt ont construit dans [5] un produit  $*$  qui satisfait à la condition (1) en utilisant la décomposition de  $S(\underline{g})$  en :

$$S(\underline{g}) = S^0 \otimes H \quad \text{où } H = \{\text{polynômes harmoniques}\}$$

et son équivalent dans  $U(\underline{g})$  établi par Kostent.

De même si  $\underline{g}$  est nilpotente, on sait [6] qu'il existe un polynôme invariant non nul  $b$  tel que l'algèbre  $N = S(\underline{g})_b$  localisée de  $S(\underline{g})$  par  $b$  admette un produit  $*$  satisfaisant (1) ceci permet de retrouver la formule de Plancherel du groupe  $G$ . Ce produit  $*$  a été étudié par M. Cahen, S. Gutt et nous et sa construction provient d'un résultat de M. Vergne [7].

Le but de cet exposé est de montrer qu'il existe une construction algébrique générale dont les constructions ci-dessus sont des cas particuliers.

On sait que  $S^0$  ne suffit en général pas à séparer les orbites génériques de  $\underline{g}$  : il faut au moins considérer  $R^0$  qui sépare les orbites sous le groupe adjoint algébrique  $*$  dans un ouvert de  $\underline{g}^*$ . On va donc chercher :

- . Une algèbre  $N$  telle que  $S(\underline{g}) \subset N \subset R(\underline{g})$  et  $R^0 \subset N$  stable pour le crochet de Poisson.
- . Une déformation formelle  $*$  de  $N$  telle que :

$$4' \quad a * u = u * a = au \quad \forall a \in R^0, \quad u \in N$$

satisfait les conditions 1 et 2 des produits  $*$ , on affaiblira 3 en 3' :

$$(3') \quad \frac{1}{2}(C_1(u,v) - C_1(v,u)) = \{u,v\} \quad u, v \in N$$

qui suffit à garantir que  $[u,v]$  est une déformation de  $\{u,v\}$ .

On dira que  $*$  est tangentielle si 1,2,3' et 4' sont vérifiées.

### 3. Rappels sur les semi invariants

L'outil essentiel dans la construction d'une déformation tangentielle est l'isomorphisme de Duflo [8] prolongé par Rentschler et Vergne [9] au semi centre du corps enveloppant de  $\underline{g}$ .

Désignons par  $S^\mu$  (resp.  $R^\mu$ ) l'ensemble des semi invariants de poids  $\mu$  dans  $S(\underline{g})$  (resp.  $R(\underline{g})$ ) ( $\mu$  est un caractère de  $\underline{g}$ ). De même si  $K(\underline{g})$  est le corps enveloppant de  $\underline{g}$ ,  $U^\mu$  (resp.  $K^\mu$ ) désignera l'ensemble des semi invariants de poids  $\mu$  dans  $U(\underline{g})$  (resp.  $K(\underline{g})$ ) pour l'action adjointe de  $\underline{g}$ . On sait ([9] théorème 4.4) qu'il existe un isomorphisme  $\theta$  entre les anneaux  $\bigoplus_\mu R^\mu$  et  $\bigoplus_\mu K^\mu$  dont la restriction à  $\bigoplus_\mu S^\mu$  est un isomorphisme sur  $\bigoplus_\mu U^\mu$ . Soit  $P = \bigoplus_\mu S^\mu - \{0\}$ ,  $Q = \bigoplus_\mu K^\mu - \{0\}$ .  $S(\underline{g})$  étant un anneau commutatif intègre, il est clair que  $P$  permet un calcul des fractions au sens de Dixmier [10]. De même :

Proposition 1 :  $Q$  permet un calcul des fractions dans  $U(\underline{g})$ .

Preuve : Si le seul semi invariant  $\mu$  tel que  $U^\mu \neq 0$  est nul, il n'y a rien à démontrer car  $U^0$  est le centre de  $U(\underline{g})$ . Sinon fixons  $\lambda$  non nul tel que  $U^\lambda \neq 0$  et choisissons  $X \in \underline{g} - \text{Ker } \lambda$ . On sait [9] que tout élément  $u$  de  $U(\underline{g})$  peut s'écrire :

$$u = \sum_{i=0}^n u_i X^i \quad \text{avec } u_i \in U(\text{Ker } \lambda) \quad \forall i$$

et que si  $a = \sum_\mu a_\mu$  appartient à  $Q$ , on a :

$$a u = \sum_i u_i a X^i = \sum_{i, \mu} u_i (X - \mu(X))^i a = u a + \sum_{\mu, j < n} v_{j, \mu} X^j a_\mu$$

où  $v_{j, \mu} \in U(\text{Ker } \lambda) \quad \forall j, \mu$ .

Supposons alors que si  $n \in \mathbb{N}$ , on puisse écrire :

$$u a^{-1} - a^{-1} u = b^{-1} v \quad \text{où } u, v \in U(\underline{g}), \quad a, b \in Q.$$

Ceci est évidemment vrai si  $N=1$ , si maintenant  $n=N$ , on a :

$$\begin{aligned} a^{-1} (a u - u a) a^{-1} &= u a^{-1} - a^{-1} u = a^{-1} \left( \sum_{j, \mu} v_{j, \mu} X^j a_\mu \right) a^{-1} \\ &= a^{-2} \left( \sum_{j, \mu} v_{j, \mu} X^j a_\mu \right) + a^{-1} b^{-1} v \\ &= a^{-2} b^{-1} \left( b \sum_{j, \mu} v_{j, \mu} X^j a_\mu + a v \right) \end{aligned}$$

et l'hypothèse est vraie au rang  $N$ , elle est donc vraie sur  $U(\underline{g})$  et  $\forall u \in U(\underline{g})$ ,  $\forall a \in Q$ , on peut écrire :

$$(a b) u = (b u + a v) a$$

Le même raisonnement montre que :

$$u a^{-1} - a^{-1} u = v' b'^{-1} \quad \text{donc } u(ab') = a(ub' - v'a)$$

$Q$  permet donc un calcul des fractions dans  $U(\underline{g})$ .

Nous noterons  $N$  l'algèbre  $S(\underline{g})_P$  et  $M$  l'algèbre  $U(\underline{g})_Q$ . Enfin nous noterons  $L$  le corps  $(\bigoplus_\mu S^\mu)_P$  et nous prolongerons  $\theta$  à ce corps en posant :

$$\theta \left( \frac{\sum_\mu a_\mu}{\sum_\mu b_\mu} \right) = \left( \sum_\mu \theta(b_\mu) \right)^{-1} \sum_\mu \theta(a_\mu)$$

$\theta(L)$  est évidemment un sous corps commutatif de  $K(\underline{g})$ , isomorphe à  $L$ . Enfin si  $u_1$  et  $u_2$  sont dans  $N$ , on peut écrire :

$$u_1 = \frac{v_1}{a_1} \quad u = \frac{v_2}{a_2} \quad \text{où } v_i \in S(\underline{g}) \quad a_i \in P$$

et donc :

$$\{u_1, u_2\} = \frac{1}{a_1 a_2} w \quad \text{où } w \in S(\underline{g})$$

Ce qui prouve que N est stable par le crochet de Poisson, de plus L contenant  $R^0$  [9], il en est de même de N.

#### 4. Filtrations de N et M

Pour tout n de  $\mathbb{Z}$ , posons :

$$N_n = \{u = \frac{v}{a} \in N \text{ tels que } d^0 v - d^0 a \leq -n\}$$

on définit ainsi une filtration séparée et exhaustive de l'algèbre N [11] :

$$N_n \text{ est un sous espace vectoriel sur } \mathbb{C}, N_n \supset N_{n+1}, \bigcup_n N_n = N,$$

$$\bigcap_n N_n = 0 \text{ et } N_n \cap N_m \subset N_{n+m}$$

De même, si  $u \in U(\underline{g})$ , posons :

$$d^0 u = \inf \{n \text{ tels que } u \in \sum_{i=0}^n U^i(\underline{g})\}$$

(voir les notations de l'introduction) et pour  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$M_n = \{u = a^{-1} v \text{ tels que } d^0 v - d^0 a \leq -n\} \quad (a \in Q, v \in U(\underline{g}))$$

Proposition 2  $(M_n)$  est une filtration exhaustive et séparée de l'algèbre M.

Preuve :  $M_n$  est bien défini car si :

$$u = a^{-1} v = a'^{-1} v' \quad \text{alors } a'v = a v'$$

et en utilisant par exemple  $\sigma$ ,  $d^0 a' + d^0 v = d^0 a + d^0 v'$ .

$M_n$  est un sous espace vectoriel puisque :

$$u_1 + u_2 = (a_1 a_2)^{-1} (a_2 v_1 + a_1 v_2) \text{ et}$$

$$d^0(a_2 v_1 + a_1 v_2) - d^0(a_1 a_2) \leq \text{Sup}(d^0 a_2 v_1 - d^0 a_1 a_2, d^0 a_1 v_2 - d^0 a_1 a_2) \leq -n$$

$\bigcup_n M_n$  est M par définition de M et si  $a^{-1} v \in \bigcap_n M_n$ , alors :

$$d^0 v \leq d^0 a - n \quad n \in \mathbb{Z}$$

ce qui prouve que v est nul. Enfin si  $a_1^{-1} v_1 \in M_n$ ,  $a_2^{-1} v_2 \in M_m$ , on a :

$$a_1^{-1} v_1 a_2^{-1} v_2 = a_1^{-1} b^{-1} w v_2 \quad \text{si } v_1 a_2^{-1} = b^{-1} w$$

et donc :

$$b v_1 = w a_2, \quad d^0 b + d^0 v_1 = d^0 w + d^0 a_2$$

soit :

$$d^0(w v_2) - d^0(a_1 b) = d^0 w + d^0 v_2 - d^0 a_1 - d^0 b = d^0 v_1 + d^0 v_2 - d^0 a_2 - d^0 a_1 \leq -n-m$$

Nous noterons  $\bar{N}, \bar{M}$  l'algèbre complétée de  $N, M$  pour la topologie associée à la filtration  $(N_n), (M_n)$  ([11]).

### 5. L'application $\lambda$

Choisissons maintenant une base du L-espace vectoriel  $N$ , composée d'éléments  $e_i$  de  $S(\mathfrak{g})$  par exemple, homogènes de degré  $d_i$ . Ceci est bien sûr possible puisque l'ensemble des polynômes homogènes engendre  $N$  sur  $L$ .

Posons :

$$\lambda \left( \sum_i l_i e_i \right) = \sum_i \theta(l_i) \sigma(e_i)$$

$\lambda$  est une application linéaire de  $N$  vers  $M$  qui dépend bien sûr du choix de la base  $(e_i)$ .

Lemme 1 :  $\lambda$  est continue, elle est même isométrique.

Preuve :

$$\text{Soit } u = \frac{1}{a} v \in N_n \quad v \in S(\mathfrak{g}) \quad a \in P$$

Décomposons  $v$  en polynômes homogènes  $v_k$   $0 \leq k \leq d^0 v$  puis chaque  $v_k$  sur la base  $e_i$  :

$$v_k = \sum_i l_{i,k} e_i = \frac{1}{b_k} \sum_i a_{i,k} e_i \quad \text{où } b_k, a_{i,k} \in \bigoplus_{\mu} S^{\mu}$$

Alors :

$$\sum_{j=0}^{d^0 b_k} b_{j,k} v_k = \sum_i \sum_{m=0}^{d^0 a_{i,k}} a_{i,km} e_i \quad \text{où } a_{i,km}, b_{j,k} \text{ sont homogènes}$$

Soit :

$$\sum_{j=0}^{d^0 b_k} b_{j,k} v_k = \sum_{i,m} a'_{i,km} e_i$$

où la somme est étendue aux  $i$  et  $m$  tels que  $m + d_i = d^0 b_k + k$ . On peut donc finalement écrire :

$$v = \frac{1}{b} \sum_i a'_i e_i$$

où  $b$  et  $a'_i$  sont des éléments homogènes de  $P$  et  $d^0 a'_i + d_i - d^0 b \leq d^0 v$

Finalement :

$$\lambda(u) = \theta(ab)^{-1} \sum_i \theta(a'_i) \sigma(e_i)$$

avec :

$$d^0 \theta(ab) = d^0 \sigma(ab) = d^0 a + d^0 b$$

$$d^0(\theta(a'_i) \sigma(e_i)) = d^0(\sigma(a'_i) \sigma(e_i)) = d^0(\sigma(a'_i e_i)) = d^0 a'_i + d_i$$

puisque  $\theta$  et  $\sigma$  de  $\Theta S^\mu$  vers  $U$  définissent la même application lorsqu'on passe aux gradués associés ([8] et [9]). Donc  $\lambda(u) \in M_n$  et  $\lambda$  est continue. Rappelons que  $M$  et  $N$  sont des espaces métriques pour la distance :

$$d(u_1, u_2) = d(u_1 - u_2, 0) = d(a^{-1} v, 0) = e^{-\text{Sup} \{n / a^{-1} v \in X_n\}}$$

où  $X$  est  $N$  ou  $M$ . On vient de montrer que :

$$d(\lambda(u_1), \lambda(u_2)) \leq d(u_1, u_2)$$

Mais si  $\lambda(u) \in \lambda(N) \cap M_n$ , on a montré que :

$$\lambda(u) = \theta(ab)^{-1} \sum_i \theta(a'_i) \sigma(e_i), \quad u = \frac{1}{ab} \sum_i a'_i e_i$$

$$\text{alors } d^0(\sum_i \theta(a'_i) \sigma(e_i)) \leq -n + d^0(\theta(ab)) = d^0 a + d^0 b - n$$

et ceci entraîne

$$d^0(\sum_i a'_i e_i) = d^0(\sigma(\sum_i a'_i e_i)) = d^0(\sum_i \sigma(a'_i) \sigma(e_i)) = d^0(\sum_i \theta(a'_i) \sigma(e_i)) \leq d^0 a + d^0 b - n$$

ce qui prouve que  $u \in N_n$  et que  $\lambda$  est une isométrie.

Si la base  $(e_i)$  n'est pas homogène, on utilise la décomposition des  $e_i$  en polynômes homogènes pour obtenir le résultat.

Prolongeons  $\lambda$  en une application  $\bar{\lambda}$  de  $\bar{N}$  vers  $\bar{M}$ .

Théorème 2 :  $\bar{\lambda}$  est une bijection.

Preuve :  $\lambda$  étant une isométrie,  $\bar{\lambda}$  l'est aussi et est donc injective. De plus  $\bar{\lambda}(\bar{N})$  est complet donc fermé dans  $\bar{M}$ . Nous allons montrer que  $M$  est inclus dans  $\bar{\lambda}(\bar{N})$  ce qui prouvera la surjectivité de  $\bar{\lambda}$ . Soit donc :

$$u = a^{-1} v \in M \quad a \in Q, \quad v \in U(\underline{g})$$

Puisque  $\sigma$  est une bijection, on peut écrire :

$$v = \sigma(v_1) \text{ où } v_1 \in S(\underline{g}) \text{ et } a = \theta(b_1) \text{ où } b_1 \in P$$



Alors d'après le calcul ci-dessus :

$$v_1 = \frac{1}{b_2} \sum_i a_{i1} e_i, \quad \lambda(v_1) = \theta(b_2)^{-1} \sum_i \theta(a_{i1}) \sigma(e_i)$$

et donc :

$$\theta(b_2) (\sigma(v_1) - \lambda(v_1)) = \theta(b_2) \sigma(v_1) - \sum_i \theta(a_{i1}) \sigma(e_i) \in U(\underline{g})$$

Mais on sait que :

$$\theta(b_2) \sigma(v_1) = \sigma(b_2 v_1) + \text{termes de degré inférieur à } d^0 b_2 + d^0 v_1$$

$$\sum_i \theta(a_{i1}) \sigma(v_1) = \sigma(\sum_i a_{i1} v_1) + \text{termes de degré inférieur à } d^0 b_2 + d^0 v_1$$

On peut donc écrire :

$$\sigma(v_1) = \lambda(v_1) + \theta(b_2)^{-1} \sigma(v_2)$$

où  $v_2 \in S(\underline{g})$  et  $d^0 v_2 \leq d^0 v_1 + d^0 b_2^{-1}$

Soit en itérant cette construction :

$$u = \lambda \left( \frac{v_1}{b_1} + \frac{v_2}{b_1 b_2} + \frac{v_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots + \frac{v_n}{b_1 \dots b_n} \right) + \theta(b_1 \dots b_n b_{n+1})^{-1} \sigma(v_{n+1})$$

avec  $d^0 v_n - d^0(b_1 b_2 \dots b_n) \leq d^0 v_1 - d^0 b_1 - n = d^0 u - n$

On en déduit que la série :

$$\sum_n \frac{v_n}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

converge dans  $\overline{N}$  et que l'image par  $\lambda$  de ses sommes partielles tend vers  $u$  dans  $M$  donc :

$$u = \overline{\lambda} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{b_1 b_2 \dots b_n} \right) \in \overline{\lambda}(\overline{N})$$

Remarquons que dans cette construction  $b_2, \dots, b_n$  sont tous homogènes si les  $e_i$  le sont.

## 6. La déformation \*

Revenons au problème initial. On pose :

$$N^n = \left\{ \frac{v}{a} \quad v \in S(\underline{g}), \quad a \in P, \quad v \text{ et } a \text{ homogènes } d^0 v - d^0 a = -n \right\}$$

Lemme 2

1.  $N^n$  est un supplémentaire de  $N_{n+1}$  dans  $N_n$
2. Tout élément de  $\bar{N}$  s'écrit d'une façon unique :
 
$$u = \sum_{k=+K}^{+\infty} u_k \quad \text{où} \quad u_k \in N^k \quad (K \in \mathbb{Z})$$

et toute série de ce type définit un élément de  $\bar{N}$ .

Preuve

1.  $N^n \subset N_n$  par construction,  $N^n \cap N_{n+1}$  est réduit à 0 puisque  $\frac{v}{a} = \frac{v'}{a'}$  implique

$$d^0 a' + d^0 v = d^0 v' + d^0 a.$$

Enfin si  $u \in N_n$  mais  $n$  n'est pas dans  $N_{n+1}$ ,  $u$  s'écrit :

$$u = \frac{v}{a} = \frac{v_0 + v_1}{a_0 + a_1} \quad \text{avec } v_0, a_0 \text{ homogènes de degré } d^0 v, d^0 a$$

$$d^0 v_1 < d^0 v, \quad d^0 a_1 < d^0 a$$

Donc :

$$u - \frac{v_0}{a_0} = \frac{v_0 + v_1}{a_0 + a_1} - \frac{v_0}{a_0} = \frac{v_1 a_0 - a_1 v_0}{a_0 (a_0 + a_1)} \in N_{n+1}$$

2. La série  $\sum_{k=+K}^{+\infty} u_k$  converge par construction :

$$\sum_{k=+K}^n u_k - \sum_{k=+K}^m u_k \in N_n \quad \text{si } m > n$$

la suite  $\sum_{k=-K}^n u_k$  est donc de Cauchy et converge dans  $\bar{N}$ .

Si  $u \in N$ , le procédé de 1 montre qu'on peut construire une série  $\sum_{k=+K}^{+\infty} u_k$  qui converge dans  $\bar{N}$  vers  $u$ . Soit maintenant  $u$  un élément de  $\bar{N}$  et  $u_{(n)}$  une suite de Cauchy qui converge vers  $u$ . On peut écrire :

$$u_{(n)} = \sum_{k=K(n)}^{+\infty} u_{k(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$u_{(n)}$  étant de Cauchy,  $\forall m$  il existe  $N(m)$  tel que :

$$n, n' > N(m) \text{ implique } \sum_{k=K(n)}^m u_{k(n)} = \sum_{k=K(n')}^m u_{k(n')}$$

On en déduit que :

$$K(n) = K(n') \text{ et } u_{k(n)} = u_{k(n')} \quad k = K(n), \dots, m \quad n, n' > N(m)$$

Posons alors,  $K=K(n)$   $u_k = u_{k(n)}$  si  $n > N(m)$  et  $k \leq m$ , on aura :

$$d(u_{(n)} - \sum_{k=K}^m u_k) < e^{-m} \quad \text{si } n > N(m) \quad \text{Donc :}$$

$$d(u - \sum_{k=K}^m u_k) < 2e^{-m} \quad \text{soit } u = \sum_{k=K}^{+\infty} u_k .$$

L'unicité est évidente.

Corollaire 1 : Le crochet de Poisson s'étend à  $\bar{N}$  en posant :

$$\left\{ \sum_{k=K}^{+\infty} u_k, \sum_{\ell=L}^{+\infty} v_\ell \right\} = \sum_{m=K+L+\ell}^{+\infty} \sum_{k+\ell+1=m} \{u_k, v_\ell\} .$$

Corollaire 2 : Tout élément  $u$  de  $\bar{N}$  s'écrit d'une façon unique :

$$u = \sum_{k=K}^{+\infty} u_k \quad \text{où } u_k \in \lambda(N^k) \quad k \quad (K \in \mathbb{Z}) .$$

Définition 2 :

Soit  $u = \sum_{k=K}^{+\infty} u_k$ ,  $v = \sum_{\ell=L}^{+\infty} v_\ell$  deux éléments de  $N$  décomposés suivant le lemme 2,

On pose :

$$C_r(u, v) = 2^r \sum_{m=K+L+r}^{+\infty} \sum_{k+\ell+r=m} \lambda^{-1}((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_m)$$

et :

$$u * v = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{V}^r C_r(u, v) .$$

Théorème 3 : \* est une déformation sur  $N$  satisfaisant 1, 2, 3' et 4'.

Preuve. En fait la deuxième somme dans la définition de  $C_r$  est finie donc  $C_r(u, v)$  est par construction un élément de  $\bar{N}$ , considérons-le pour l'instant comme défini sur  $\bar{N}$  par la même formule. Alors \* se prolonge en une loi interne sur  $E(\bar{N}, 0)$ . Cette loi est associative: il suffit de le vérifier pour  $(u_k, v_\ell, v_m) \in N^k \times N^\ell \times N^m$ .

$$(u_k * v_\ell) * w_m = \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (2\mathcal{V})^r \lambda^{-1}((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_{k+\ell+r}) \right] * w_m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} (2\nu)^r \sum_{n=0}^{\infty} (2\nu)^n \lambda^{-1} \left[ ((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_{k+l+r} \lambda(w_m))_{k+l+r+m+n} \right] \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (2\nu)^p \sum_{r+n=p} \lambda^{-1} \left[ ((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_{k+l+r} \lambda(w_m))_{k+l+m+p} \right].
\end{aligned}$$

Mais si  $h > k+l+p$ ,

$$((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_h \lambda(w_m))_{k+l+m+p} = 0$$

on peut donc ajouter ces termes et :

$$\begin{aligned}
(u_k * v_\ell) * w_m &= \sum_{p=0}^{\infty} (2\nu)^p \lambda^{-1} \left[ \left( \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_{k+l+r} \lambda(w_m) \right)_{k+l+m+p} \right] \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (2\nu)^p \lambda^{-1} \left[ (\lambda(u_k) \lambda(v_\ell) \lambda(w_m))_{k+l+m+p} \right].
\end{aligned}$$

Le même calcul montre que :

$$u_k * (v_\ell * w_m) \text{ a la même forme.}$$

Par bilinéarité et continuité des  $C_r$  dans  $\bar{N}$  puis de  $*$  sur  $E(\bar{N}, \nu)$ , on prouve que  $*$  est associatif sur  $E(\bar{N}, \nu)$ . D'autre part :

$$C_0(u_k, v_\ell) = \lambda^{-1} ((\lambda(u_k) \lambda(v_\ell))_{k+l})$$

Posons :

$$u_k = \frac{u'_k}{a}, \quad v_\ell = \frac{v'_\ell}{b} \quad \text{où } a, b \in P, \quad u'_k, v'_\ell \in S(\underline{g})$$

et  $u'_k, a, v'_\ell, b$  sont homogènes. Par définition de  $\lambda$ , on a :

$$\lambda(u_k) \lambda(v_\ell) = \theta(a)^{-1} \lambda(u'_k) \theta(b)^{-1} \lambda(v'_\ell)$$

Mais d'après la preuve de la proposition 1,

$$\lambda(u'_k) \theta(b)^{-1} = \theta(b)^{-1} \lambda(u'_k) \quad \text{modulo } M_{-d^0 u'_k + d^0 b + 1}$$

Donc :

$$\lambda(u_k) \lambda(v_\ell) = \theta(ab)^{-1} \lambda(u'_k) \lambda(v'_\ell) \text{ mod. } M_{k+l+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(ab)^{-1} \sigma(u'_k v'_\ell) \text{ mod. } M_{k+\ell+1} \\
&= \lambda(u_k v_\ell) \text{ mod. } M_{k+\ell+1}
\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$C_o(u_k, v_\ell) = u_k v_\ell \text{ donc } C_o(u, v) = uv \quad \forall u, v \in \bar{N}$$

Posons maintenant :

$$D(u, v) = \frac{1}{2} (C_1(u, v) - C_1(v, u))$$

Soit  $X \in \underline{g} = S^1(\underline{g})$ ,  $u_k \in N^k$ . On a avec nos notations :

$$(\lambda(X) - \sigma(X)) \lambda(u_k) - \lambda(u_k) (\lambda(X) - \sigma(X)) \in M_{k+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\lambda(X) \lambda(u_k) - \lambda(u_k) \lambda(X) &= \sigma(X) \lambda(u_k) - \lambda(u_k) \sigma(X) \text{ mod. } M_{k+1} \\
&= \sigma(X) \theta(a)^{-1} \lambda(u'_k) - \theta(a)^{-1} \lambda(u'_k) \sigma(X) \text{ mod. } M_{k+1} \\
&= \theta(a)^{-2} (\sum_{\mu} \mu(X) \theta(a_{\mu})) \lambda(u'_k) + \theta(a)^{-1} (\sigma(X) \lambda(u'_k) \\
&\quad - \lambda(u'_k) \sigma(X)) \text{ mod. } M_{k+1}
\end{aligned}$$

Par le même argument que ci-dessus, on peut écrire :

$$\sigma(X) \lambda(u'_k) - \lambda(u'_k) \sigma(X) = \sigma(X) \sigma(u'_k) - \sigma(u'_k) \sigma(X) \text{ mod. } M_{-d^0 u'_k + 1}$$

Donc d'après [3] :

$$\begin{aligned}
\lambda(X) \lambda(u_k) - \lambda(u_k) \lambda(X) &= 2 \lambda(\{X, \frac{1}{a}\} u'_k) + 2 \theta(a)^{-1} \sigma(\{X, u'_k\}) \text{ mod. } M_{k+1} \\
&= 2 \lambda(\{X, \frac{u'_k}{a}\}) \text{ mod. } M_{k+1}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que :

$$D(X, u) = \{X, u\} \quad \text{puisque } X \in N^{-1} \quad \forall u \in \bar{N}$$

Maintenant D est un cocycle de Hochschild du fait de l'associativité de  $\star$  et de la valeur de  $C_0$  :

$$(\delta D)(u, v, w) = u D(v, w) - D(uv, w) + D(u, vw) - D(u, v) w = 0 \quad \forall u, v, w$$

Si  $u \in S(\underline{g})$ , cette formule montre par récurrence sur son degré que

$$D(u, v) = \{u, v\} \quad \forall u \in S(\underline{g}) \quad \forall v \in \bar{N}$$

et que si  $a \in P$ ,  $u \in S(\underline{g})$ ,  $v \in \bar{N}$  :

$$a D\left(\frac{u}{a}, v\right) - D(u, v) + D\left(a, \frac{uv}{a}\right) - D\left(a, \frac{u}{a}\right) v = 0$$

Soit :

$$D\left(\frac{u}{a}, v\right) = \frac{1}{a} \{u, v\} - \frac{1}{a} \left\{a, \frac{uv}{a}\right\} + \frac{1}{a} \left\{a, \frac{u}{a}\right\} v = \left\{\frac{u}{a}, v\right\}$$

puisque  $\{\}$  est une bidérivation et que  $\left\{a, \frac{1}{a}\right\} = 0$ ; par continuité, on a 3'.

Si maintenant  $a \in L$ ,  $v \in \bar{N}$ , puisque :

$$\lambda(a) \lambda(v) = \lambda(av)$$

on en déduit facilement que :

$$C_r(a, v) = 0 \quad \forall r > 0 \quad \forall a \in L \quad \forall v \in \bar{N}$$

Si de plus  $a \in R^0$ , alors :

$$\lambda(v) \lambda(a) = \lambda(a) \lambda(v) = \lambda(av)$$

donc :

$$C_r(v, a) = 0 \quad \forall a \in R^0, \quad \forall v \in \bar{N} \quad \forall r > 0.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que si  $u$  et  $v$  sont dans  $N$ , il en est de même de  $C_r(u, v)$ . Mais si  $u$  et  $v$  sont dans  $S(\underline{g})$ ,

$$C_r(u, v) = \sum_{k, l} \lambda^{-1}((\lambda(u_k) \lambda(v_l)))_{k+l+r}$$

est une somme finie d'éléments de  $N$  et est donc dans  $N$ . Donc

$$\forall u, v \in S(\underline{g}) \quad \forall a \in P \quad C_r\left(\frac{u}{a}, v\right) = \frac{1}{a} C_r(u, v) \in N$$

et en utilisant la relation d'associativité de  $*$  à l'ordre  $r$ , si on suppose que  $C_s(u',v')$  est dans  $N$  pour tout  $u',v'$  de  $N$  et tout  $s < r$  :

$$\frac{u}{ab} C_r(b, \frac{v}{b}) - C_r(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}) + C_r(\frac{u}{ab}, v) - C_r(\frac{u}{ab}, b) \frac{v}{b} \in N$$

pour tout  $u,v$  de  $S(\underline{g})$  et tout  $a,b$  de  $P$ . Comme  $C_r(b, \frac{v}{b}) = 0$ , on en déduit que

$$C_r(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}) \in N.$$

### 7. Cas particuliers

La déformation  $*$  définie ici est bien sûr une généralisation du produit  $*$  défini par M. Cahen et S. Gutt pour  $\underline{g}$  semi simple de rang 1 dans [5] puisqu'alors  $L$  se réduit à  $R^0$  et  $P$  à  $S^0 - \{0\}$ .

Si  $\underline{g}$  est nilpotente et que  $S(\underline{g})$  est un  $S^0$  module libre une construction similaire avait été menée dans [4].

Si  $\underline{g}$  est nilpotente quelconque, le produit  $*$  défini dans [6] sur  $\underline{g}^*$  est aussi un cas particulier de cette construction.

#### Proposition 3

1. Si  $\underline{g}$  est nilpotente,  $L=R^0$ ,  $P=S^0-\{0\}$  et les fonctions  $p_i$  et  $q_i$  définies dans [6] peuvent être choisies dans  $N^{-1}$  et  $N^0$  respectivement.
2. Il y a une base de  $N$  sur  $L$  telle que la déformation  $*$  coïncide avec le produit défini dans [6].

Preuve. D'après [7] les  $p$  et  $q$  sont construits par récurrence suivant une base de Jordan Hölder  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\underline{g}$ , supposons que les premiers sont dans  $N^{-1}$  et  $N^0$ , on pose  $p_k = X_n \in N^{-1}$  et on cherche une fonction rationnelle  $a$  invariante sous  $X_1, \dots, X_{n-1}$  mais pas sous  $X_n$ , on pose

$$q_k = \frac{a}{\{X_n, a\}} \in N^0 \text{ et pour les autres } p_j \text{ et } q_j, \text{ il s'agit de :}$$

$$p_j = \exp - q_k X_n^- p_j', q_j = \exp - q_k X_n^- q_j'$$

où  $X_n^- u = \{X_n, u\}$  et  $p_j', q_j'$  sont les éléments de  $N^{-1}, N^0$  construits au pas précédent.

$p_j$  et  $q_j$  sont donc dans  $N^{-1}$  et  $N^0$ .

Posons  $\epsilon_{nm} = b \frac{p^n q^m}{p^q}$

où  $b$  est l'invariant tel que le produit  $*$  de Moyal de [6] soit défini dans  $S(\underline{g})_b$  ( $b$  est appelé  $\mu$  dans [6])  $\alpha$  est un entier assez grand pour que  $\epsilon_{nm} \in S(\underline{g})$  et  $n, m$  sont des multi indices. Il est clair que  $(\epsilon_{nm})$  est une base de  $N$  sur  $L$  puisque tout élément de  $S(\underline{g})$  donc de  $N$  se décompose dessus et que les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial q_j} = \{p_j, \cdot\} \quad \frac{\partial}{\partial p_j} = -\{q_j, \cdot\}$$

laissent  $N$  invariant. D'autre part on sait [4] que pour l'algèbre de Lie de Heisenberg  $\underline{h}$  de dimension  $2k+1$ , le produit  $*$  de S. Gutt dans [3] et celui de Moyal défini dans [6] coïncident. Posons donc :

$$e_{nm} = \sigma^{-1}(\sigma_{\underline{h}}(p^n q^m b^\alpha))$$

où  $\sigma_{\underline{h}}$  est la symétrisation construite à partir de l'algèbre de Lie  $\underline{h}$  dont une base est  $(p_j, bq_j, b)$ . Alors  $e_{nm} \in S(\underline{g})$  et est une base de  $N$  puisque  $\sigma_{\underline{h}}(p^n q^m b^\alpha)$  en est une de  $M$ .

Finalement puisque  $e_{nm} * e_{n'm'} = \sum \frac{v^r}{r!} pr(e_{nm}, e_{n'm'})$  (voir [6] pour les notations

et que pour toute fonction rationnelle invariante  $b$

$$b * u = u * b = bu$$

la déformation  $*$  est par construction le produit de Moyal.

-----



## B I B L I O G R A P H I E

---

- [1] Bayen F. et Al. - Ann. Phys. 111, p.61 et p.111 (1978)
- [2] Lugo V. - Lett. Math. Phys. 5, p.509 (1981)
- [3] Gutt S. - Lett. Math. Phys. 7, p.249 (1983)
- [4] Arnal D., Cahen M., Gutt S. - "Deformations on coadjoint orbits" preprint Université de Metz (1986)
- [5] Cahen M., Gutt S. - C.R. Acad. Sc. Série I, t. 296, p. 821
- [6] Arnal D. et Cortet J.C. - Lett. Math. Phys. 9, p.25 (1985) et J.G.P. vol. 2 n° 2, p.83 (1985)
- [7] Vergne M. - Bull. Soc. Math. France 100, p.301 (1972)
- [8] Duflo M. - Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 5, p.71 (1972)
- [9] Rentscher R., Vergne M. - Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 6, p.389 (1973)
- [10] Dixmier J. - "Algèbres enveloppantes". Gauthier Villars, Paris (1974)
- [11] Bourbaki N. - Algèbre 2 - Gauthier Villars Paris