

JACQUES HELMSTETTER

**Déformations d'algèbres symétriques conservant le  
coproduit ou le produit intérieur**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1987, fascicule 1B  
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 175-185

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1987\\_\\_1B\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__1B_175_0)

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DÉFORMATIONS D'ALGÈBRES SYMÉTRIQUES CONSERVANT LE COPRODUIT OU LE PRODUIT INTÉRIEUR

*Jacques HELMSTETTER*

Dans toute la suite,  $E$  (et de même  $E_1$  ou  $E_2$ ) est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$  de caractéristique 0; mais avec des définitions appropriées, on pourrait le remplacer par un module  $E$  sur un anneau (commutatif unifié) quelconque, pourvu que l'on puisse toujours diviser par tout entier non nul.

## 1. Rappels sur les cogèbres

Un espace vectoriel  $A$  sur  $K$  est une cogèbre si on l'a muni d'un coproduit, c'est-à-dire d'une application linéaire  $C$  de  $A$  dans  $A \otimes A$ , co-associative, c'est-à-dire telle que

$$(I_A \otimes C) \circ C = (C \otimes I_A) \circ C .$$

Si  $E$  est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante  $UE$  est une cogèbre, le coproduit étant alors l'unique homomorphisme d'algèbres  $C$  de  $UE$  dans  $UE \otimes UE$  tel que

$$C(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad \text{pour tout } a \in E .$$

En particulier l'algèbre symétrique  $SE$  (algèbre enveloppante de  $E$  si  $E$  est abélienne) est une cogèbre.

Si  $A$  est une cogèbre et  $B$  une algèbre, alors l'espace  $\text{Hom}(A, B)$  des applications linéaires de  $A$  dans  $B$  est une algèbre (associative); le produit de deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\text{Hom}(A, B)$  est l'élément  $f \times g$  défini ainsi :

$$A \xrightarrow{C} A \otimes A \xrightarrow{f \otimes g} B \otimes B \xrightarrow{P} B ,$$

$P$  étant l'application linéaire déterminée par la structure d'algèbres de  $B$ .

En particulier  $\text{Hom}(SE_1, SE_2)$  est une algèbre associative; elle est même commutative et unifère (parce que la cogèbre  $SE_1$  est co-commutative et possède une co-unité, celle-ci étant la projection  $SE_1 \rightarrow K$ ); l'élément unité est l'application

$$SE_1 \xrightarrow{\text{proj.}} K \xrightarrow{\text{inj.}} SE_2 .$$

Pour  $z \in SE_2$ , notons  $\text{Hom}(SE_1, SE_2; z)$  l'ensemble des  $f \in \text{Hom}(SE_1, SE_2)$  tels que  $f(1) = z$ . Si  $f \in \text{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$ , la puissance  $k$ -ième de  $f$  s'annule sur les éléments de degré  $< k$ ; la série exponentielle de  $f$  est donc formellement convergente et fournit un élément

$$\text{Exp } f \in \text{Hom}(SE_1, SE_2; 1) .$$

On obtient ainsi un isomorphisme du groupe additif  $\text{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$  sur le groupe multiplicatif  $\text{Hom}(SE_1, SE_2; 1)$ . J'utiliserai toujours la notation  $\times$  (resp.  $\text{Exp}$ ) pour rappeler qu'un produit (resp. une exponentielle) a été défini au moyen d'un coproduit.

## 2. Rappels sur les comodules et les produits intérieurs

Soit  $A$  une cogèbre avec un coproduit  $C$ ; on dit que  $M$  est un comodule à gauche sur  $A$  si on a défini une application linéaire  $C'$  de  $M$  dans  $A \otimes M$  telle que

$$(C \otimes I_M) \circ C' = (I_A \otimes C') \circ C' .$$

Si  $M$  est un comodule à gauche sur  $A$ , alors  $M$  est un module à droite sur l'algèbre  $A^* = \text{Hom}(A, K)$ ; cette structure de module à droite provient de l'application de  $M \otimes A^*$  dans  $M$  définie ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes A^* & \xrightarrow{C' \otimes I} & A \otimes M \otimes A^* & \xrightarrow{\text{contraction}} & M \otimes K & \xrightarrow{\text{isom.}} & M \\ & & (A \otimes A^* \longrightarrow K) & & & & \end{array}$$

Voici un exemple de structure de comodule sur la cogèbre  $SE$ ; comme celle-ci est cocommutative, il sera inutile de préciser "à gauche" ou "à droite". A toute forme bilinéaire alternée  $F$  sur  $E$  est associée une algèbre de Weyl  $W(E, F)$ ; c'est l'algèbre unifère librement engendrée par  $E$ , avec la seule contrainte que

$$ab - ba = F(a, b) , \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b \in E .$$

Il existe un unique homomorphisme d'algèbres  $C'$  de  $W(E, F)$  dans  $SE \otimes W(E, F)$  tel que

$$C'(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad \text{pour tout } a \in E ;$$

il fait de  $W(E, F)$  un comodule sur  $SE$ ; donc il en fait aussi un module sur  $S^*E = (SE)^*$ ; l'application bilinéaire qui en résulte,

$$\begin{aligned} W(E, F) \times S^*E &\longrightarrow W(E, F) \\ (x, f) &\longmapsto i(f).x , \end{aligned}$$

mérite d'être appelée produit intérieur, parce qu'elle a les propriétés habituelles d'un produit intérieur; en particulier si  $f \in E^*$ , alors

$$\begin{aligned} i(f).a &= f(a) && \text{si } a \in E, \\ i(f).(xy) &= (i(f).x)y + x(i(f).y) && \text{si } x \text{ et } y \in W(E, F). \end{aligned}$$

D'ailleurs si  $F = 0$ ,  $W(E, F)$  est l'algèbre  $SE$ , et l'on obtient le produit intérieur habituel

$$SE \times S^*E \longrightarrow SE.$$

[On peut interpréter  $SE$  comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $E^*$ , et  $S^*E$  comme l'algèbre des opérateurs différentiels (d'ordre fini ou infini) à coefficients constants sur  $E^*$ ].

### 3. Déformations de l'algèbre $SE$

J'utilise ici le mot "déformation" dans le sens suivant : une déformation de  $SE$  est une application linéaire  $\Pi$  de  $SE \otimes SE$  dans  $SE$ , définissant un "produit déformé"  $x * y = \Pi(x \otimes y)$ , de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

d'une part, le produit déformé est associatif, et admet 1 comme élément unité, autrement dit

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= (x * y) * z, \\ x * 1 &= 1 * x = x; \end{aligned}$$

d'autre part, si  $x \in S^pE$  et  $y \in S^qE$ , alors  $x * y$  est la somme de  $xy$  et de termes de degrés  $< p + q$ .

A une telle déformation on peut associer canoniquement une déformation au sens habituel, c'est-à-dire avec un paramètre de déformation  $t$ ; lorsque  $x$  et  $y$  sont de degré  $p$  et  $q$  comme ci-dessus, leur produit déformé avec paramètre  $t$  est

$$x *_{t} y = \sum_{0 \leq j \leq p+q} t^j (\text{proj. de } x * y \text{ dans } S^{p+q-j}E).$$

On obtient ainsi une déformation de l'algèbre  $SE \otimes K[t]$ .

Tout naturellement on dira que deux déformations  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  de  $SE$  sont isomorphes, si il existe une bijection  $\Phi \in \text{Hom}(SE, SE)$  telle que  $\Pi_2 \circ (\Phi \otimes \Phi) = \Phi \circ \Pi_1$ , et telle que  $\Phi(x)$  soit toujours égal à  $x$  modulo des termes de degré inférieur.

Considérons l'application  $\text{Exp}$  qui réalise une bijection de  $\text{Hom}(S(E \oplus E), SE; 0)$  sur  $\text{Hom}(S(E \oplus E), SE; 1)$ ; nous pouvons identifier  $SE \otimes SE$  avec  $S(E \oplus E)$ , et traiter la déformation  $\Pi$  comme un élément de  $\text{Hom}(S(E \oplus E), SE; 1)$ ; il existe donc dans  $\text{Hom}(SE \otimes SE, SE; 0)$  un unique  $\pi$  tel que

$$\Pi = \text{Exp } \pi.$$

L'objectif de cet exposé est de montrer que certaines propriétés de la déformation  $\Pi$  se lisent très facilement sur son logarithme  $\pi$ .

Mais d'abord il faut noter que la condition  $x * 1 = 1 * x = x$  permet de décomposer  $\pi$  ainsi :

$$\pi = \pi_0 + \pi' ,$$

$\pi_0$  étant la partie triviale de la déformation, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \pi_0(a \otimes 1) &= \pi_0(1 \otimes a) = a & \text{si } a \in E , \\ \pi_0(x \otimes y) &= 0 & \text{si } x \in S^p E , y \in S^q E \text{ et } p + q \neq 1 ; \end{aligned}$$

j'ajoute que  $P = \text{Exp } \pi_0$  représente le produit initial de  $SE$  ; la partie non triviale  $\pi'$  est telle que

$$\pi'(x \otimes 1) = \pi'(1 \otimes x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in SE .$$

La dernière condition imposée plus haut à  $\Pi$  est équivalente à celle-ci : si  $x$  et  $y$  sont de degrés  $p$  et  $q$  ,  $\pi'(x \otimes y)$  est une somme de termes de degrés  $< p + q$  .

#### 4. Déformations conservant le produit intérieur

Nous nous intéressons ici aux déformations telles que l'algèbre déformée soit équivalente à l'algèbre  $SE$  pour le calcul des produits intérieurs par les éléments de  $S^*E$  ; comme ces produits intérieurs sont définis ici grâce à la structure de comodule sur la cogèbre  $SE$  , nous nous intéressons donc aux déformations  $\Pi$  telles que le coproduit  $C(SE \rightarrow SE \otimes SE)$  soit aussi un homomorphisme de l'algèbre déformée  $(SE, *)$  dans l'algèbre  $SE \otimes (SE, *)$  déformée seulement à droite.

**THÉORÈME 1.** — *Si  $\Pi$  est une déformation de  $SE$  , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le coproduit de  $SE$  est un homomorphisme d'algèbres de  $(SE, *)$  dans  $SE \otimes (SE, *)$  ;*

(2) *quels que soient  $x$  et  $y \in SE$  ,  $\pi'(x \otimes y) \in K$  ,  $\pi'$  étant la partie non triviale de  $\log \Pi$  .*

*Si ces assertions sont vraies, on obtient une forme bilinéaire alternée  $F$  sur  $E$  en posant*

$$F(a, b) = a * b - b * a = \pi'(a \otimes b) - \pi'(b \otimes a) \in K ;$$

*et l'algèbre déformée  $(SE, *)$  est isomorphe à l'algèbre de Weyl  $W(E, F)$  . Deux déformations satisfaisant ces assertions sont isomorphes si et seulement si elles déterminent la même forme bilinéaire  $F$  . Réciproquement, soit  $F$  une forme bilinéaire alternée sur  $E$  , et soit  $J$  la bijection de  $SE$  sur  $W(E, F)$  telle que pour tout  $a \in E$  , et tout entier  $p \geq 0$  ,  $J(a^p) = a^p$  , autrement dit, telle que*

$$J(a_1 a_2 \dots a_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(p)} ,$$

lorsque  $a_1, \dots, a_p \in E$  ; la sommation se fait sur le groupe des permutations des entiers  $1, \dots, p$  ; on obtient une déformation de  $SE$  satisfaisant les assertions précédentes, et telle que  $F(a, b) = a*b - b*a$  (si  $a$  et  $b \in E$ ), en posant

$$x * y = J^{-1}(J(x).J(y)) \quad (\text{si } x \text{ et } y \in SE) ;$$

la partie non triviale  $\pi'$  de  $\log \Pi$  est alors celle-ci :

$$\begin{aligned} \pi'(a \otimes b) &= F(a, b)/2 \quad \text{si } a \text{ et } b \in E, \\ \pi'(x \otimes y) &= 0 \quad \text{si } x \in S^p E, \quad y \in S^q E \text{ et } (p, q) \neq (1, 1) ; \end{aligned}$$

cette déformation de  $SE$  est connue sous le nom de déformation de Moyal.

*Esquisse de démonstration.* — On peut faire de  $SE \otimes SE$  un comodule sur la cogèbre  $SE$  grâce à l'application  $C'$  qui est l'unique homomorphisme d'algèbres de  $SE \otimes SE$  dans  $SE \otimes (SE \otimes SE)$  tel que

$$C'(a \otimes 1 + 1 \otimes b) = (a + b) \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (a \otimes 1 + 1 \otimes b) .$$

L'assertion (1) est équivalente à celle-ci :  $\Pi$  est un homomorphisme de  $SE \otimes SE$  dans  $SE$  pour les structures de comodules sur  $SE$  . Si  $M$  est un module sur l'algèbre  $SE$  , il est trivial qu'un homomorphisme de  $SE$  dans  $M$  , pour les structures de modules sur  $SE$  , est déterminé par sa restriction à  $K$  , et que celle-ci est arbitraire ; de façon duale, un homomorphisme de comodules sur  $SE$  , à valeurs dans  $SE$  , est déterminé par sa projection dans  $K$  , et celle-ci est arbitraire. Pour être plus précis, appelons  $\psi$  la projection de  $\Pi$  dans  $K$  :

$$\psi : SE \otimes SE \xrightarrow{\quad \Pi \quad} SE \xrightarrow{\quad \text{co-unité} \quad} K ;$$

$\Pi$  est un homomorphisme de comodules si et seulement si

$$\Pi(x \otimes y) \otimes 1 = (I_{SE} \otimes \psi) \circ C'(x \otimes y) .$$

Dans le cas présent, cette égalité est équivalente à

$$\Pi = P \times \psi \quad (\text{avec } P = \text{Exp } \pi_0) ;$$

puisque  $\psi(1 \otimes 1) = \Pi(1 \otimes 1) = 1$  , on peut remplacer  $\psi$  par  $\text{Exp } \pi'$  . Ainsi les assertions (1) et (2) sont équivalentes. La suite du théorème résulte de propriétés classiques des algèbres de Weyl et de la déformation de Moyal, et de quelques calculs avec des  $\text{Exp}$  ; l'un de ces calculs consiste à vérifier que

$$a * b = ab + \pi'(a \otimes b) \quad (\text{si } a \text{ et } b \in E) .$$

[On peut montrer que l'assertion (1) est équivalente au fait que les produits intérieurs par les éléments de  $E^*$  sont aussi des dérivations du produit déformé ; et que l'assertion (2) est équivalente au fait que l'on obtient  $x * y$  (considéré comme fonction polynomiale sur  $E^*$  ) comme restriction à la diagonale de  $E^* \oplus E^*$  du transformé de  $x \otimes y$  par un opérateur différentiel (d'ordre infini) sur  $E^* \oplus E^*$  à coefficients constants].

## 5. Déformations conservant le coproduit

Il s'agit maintenant de déformations de  $SE$  telles que le coproduit  $C$  de  $SE$  soit aussi un homomorphisme de l'algèbre déformée  $(SE, *)$  dans l'algèbre déformée  $(SE, *) \otimes (SE, *)$ .

**THÉORÈME 2.** — *Si  $\Pi$  est une déformation de  $SE$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(3)  *$C$  est un homomorphisme de  $(SE, *)$  dans  $(SE, *) \otimes (SE, *)$  ;*

(4) *quels que soient  $x$  et  $y \in SE$ ,  $\pi'(x \otimes y) \in E$ .*

*Si ces assertions sont vraies, on obtient un crochet d'algèbre de Lie sur  $E$  en posant*

$$[a, b] = a*b - b*a = \pi'(a \otimes b) - \pi'(b \otimes a) \in E ;$$

*et l'algèbre déformée  $(SE, *)$  est isomorphe à l'algèbre enveloppante  $UE$  de l'algèbre de Lie  $E$ . Deux déformations satisfaisant ces assertions sont isomorphes si et seulement si elles déterminent le même crochet d'algèbres de Lie. Réciproquement, supposons que  $E$  soit une algèbre de Lie, et soit  $J$  la bijection de  $SE$  sur  $UE$  telle que  $J(a^p) = a^p$  pour tout  $a \in E$  et tout entier  $p$  ; on obtient une déformation de  $SE$  satisfaisant les assertions précédentes et telle que  $[a, b] = a*b - b*a$ , en posant*

$$x * y = J^{-1}(J(x).J(y)) .$$

[J'expliquerai plus loin que la connaissance de l'application  $\pi = \log \Pi$  associée à cette dernière déformation équivaut à la connaissance de la série de Campbell-Hausdorff de l'algèbre de Lie  $E$ ].

*Esquisse de démonstration.* — L'assertion (3) est équivalente à celle-ci :  $\Pi$  est un homomorphisme de cogèbres de  $SE \otimes SE$  dans  $SE$  (on exprime ceci en disant que  $C$  et  $\Pi$  font de  $SE$  une bigèbre). Les homomorphismes d'algèbres de  $SE_1$  dans  $SE_2$  sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de  $E_1$  dans  $SE_2$  ; soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E_1$  dans  $SE_2$  (ou plutôt, une application linéaire de  $SE_1$  dans  $SE_2$ , nulle sur  $S^p E_1$  si  $p \neq 1$ ) ; on peut vérifier que l'homomorphisme  $\Phi$  de  $SE_1$  dans  $SE_2$ , dont la restriction à  $E_1$  est  $\varphi$ , est  $\Phi = \text{Exp } \varphi$ . De façon duale, on peut énoncer le théorème suivant (dont la démonstration est néanmoins plus difficile) : les homomorphismes de cogèbres de  $SE_1$  dans  $SE_2$  sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de  $SE_1$  dans  $E_2$ , nulles sur  $K$  ; si  $\varphi (SE_1 \rightarrow E_2)$  est une telle application, l'homomorphisme de cogèbres  $\Phi$  de  $SE_1$  dans  $SE_2$ , dont la projection dans  $E_2$  est  $\varphi$ , est  $\Phi = \text{Exp } \varphi$ . Par conséquent,  $\Pi$  est un homomorphisme de cogèbres de  $SE \otimes SE$  dans  $SE$  si et seulement si il existe  $\pi$ , application linéaire de  $SE \otimes SE$  dans  $E$ , nulle sur  $K$ , telle que  $\Pi = \text{Exp } \pi$ . Ceci montre l'équivalence des assertions (3) et (4). La suite du théorème résulte de propriétés classiques des algèbres enveloppantes (par exemple, on sait que  $J$  est un isomorphisme de cogèbres).

## 6. Séries formelles et groupes formels

Les séries formelles sur  $E_1$  à valeurs dans  $E_2$  sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de  $SE_1$  dans  $E_2$  ; si  $f \in \text{Hom}(SE_1, E_2)$  , on lui associe la série formelle  $\tilde{f}$  définie ainsi (avec  $\xi \in E_1$  ,  $\xi^p \in S^p E_1$  ) :

$$(5) \quad \tilde{f}(\xi) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} f(\xi^p) = f(\exp \xi) ;$$

réciroquement, on peut expliquer que  $f$  donne les dérivées partielles au point 0 de la série formelle  $\tilde{f}$  , de telle façon que l'égalité (5) est simplement la formule de Taylor au point 0 . Si  $E_2$  est une algèbre, les séries formelles à valeurs dans  $E_2$  forment une algèbre; or,  $\text{Hom}(SE_1, E_2)$  est aussi une algèbre (voir § 1), et il est facile de vérifier que, si  $f$  et  $g \in \text{Hom}(SE_1, E_2)$  , alors

$$(6) \quad \tilde{f\tilde{g}} = (\tilde{f} \times \tilde{g}) ;$$

l'égalité (6) permet de calculer les dérivées partielles du produit  $\tilde{f\tilde{g}}$  au point 0; c'est donc un avatar de la formule de Leibniz. Enfin, soient  $f \in \text{Hom}(SE_2, E_3)$  et  $g \in \text{Hom}(SE_1, E_2)$  ; si  $g(1) = 0$  , alors  $\tilde{g}(0) = 0$  , et l'on peut définir la série formelle composée  $\tilde{f} \circ \tilde{g}$  ; on peut alors démontrer que

$$(7) \quad \tilde{f} \circ \tilde{g} = (\tilde{f} \circ \text{Exp } g) ;$$

pour donner un sens à  $\text{Exp } g$  , il faut considérer que  $g \in \text{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$  .

Soit maintenant  $\pi \in \text{Hom}(SE \otimes SE; E)$  , tel que  $\pi(1 \otimes 1) = 0$  ; il lui est associée une série formelle  $\tilde{\pi}$  sur  $E \oplus E$  à valeurs dans  $E$  ; par définition,  $\tilde{\pi}$  détermine un groupe formel sur  $E$  si

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\xi, 0) &= \tilde{\pi}(0, \xi) = \xi ; \\ \tilde{\pi}(\xi, \tilde{\pi}(\eta, \zeta)) &= \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\xi, \eta), \zeta) . \end{aligned}$$

Considérons  $\Pi = \text{Exp } \pi \in \text{Hom}(SE \otimes SE, SE)$ ; grâce à (7) (et à l'égalité  $I_{SE} = \text{Exp } I_E$  ) , on trouve immédiatement que les conditions précédentes sont équivalentes à

$$\begin{aligned} \Pi(x \otimes 1) &= \Pi(1 \otimes x) = x ; \\ \Pi(x \otimes \Pi(y \otimes z)) &= \Pi(\Pi(x \otimes y) \otimes z) . \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\Pi$  est une déformation de  $SE$  , et d'après le théorème 2, elle conserve le coproduit; réciproquement toute déformation conservant le coproduit détermine un groupe formel.

A la fin du théorème 2, on signale que si  $E$  est une algèbre de Lie, on peut construire canoniquement une déformation de  $SE$  ; je vais montrer que la série formelle  $\tilde{\pi}$  qui lui est associée, est précisément la série de Campbell-Hausdorf de l'algèbre de Lie  $E$  , c'est-à-dire

$$\tilde{\pi}(t\xi, t\eta) = \log((\exp t\xi) \cdot (\exp t\eta)) ;$$



dans cette égalité,  $\xi$  et  $\eta$  appartiennent à  $E$ , et  $t$  est une indéterminée qu'on introduit pour pouvoir traiter le second membre comme une série formelle en  $t$  à valeurs dans  $UE$ . L'égalité  $a^p = J(a^p)$  montre que pour la déformation canonique de  $SE$ , tout élément de  $E$  a même exponentielle pour le produit initial de  $SE$  et le produit déformé; cette exponentielle habite dans l'algèbre complétée de  $SE$ , c'est-à-dire le produit direct des  $S^p E$ ; il s'agit donc de démontrer

$$(8) \quad \exp(\tilde{\pi}(\xi, \eta)) = (\exp \xi) * (\exp \eta) .$$

Or, la formule de Leibniz (6) implique que

$$\exp \tilde{\pi} = (\text{Exp } \pi)^{-1} ;$$

en utilisant la formule de Taylor (5), on en déduit

$$\exp(\tilde{\pi}(\xi, \eta)) = (\text{Exp } \pi)(\exp \xi \otimes \exp \eta) ;$$

puisque  $\text{Exp } \pi = \Pi$ , on vient de démontrer (8).

## Appendice n° 1

Je n'ai pas eu le temps, lors de mon exposé, d'expliquer quelles étaient les motivations de ce travail; certaines motivations se trouvent dans mes travaux antérieurs :

- *Radical et groupe formel d'une algèbre symétrique à gauche*, thèse de 3e cycle, Grenoble 1975.

- *Algèbres de Clifford, algèbres de Weyl et \*-produits*, cahiers mathématiques n° 25 (1982) et n° 34 (1985) de Montpellier.

Une motivation plus récente est le calcul des coefficients de la série de Campbell-Hausdorff. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_m$  des indéterminées **non commutatives**; posons

$$G(X_1, X_2, \dots, X_m) = \log((\exp X_1)(\exp X_2) \dots (\exp X_m)) ;$$

on peut donner un sens au second membre en complétant l'algèbre unifère associative librement engendrée par  $X_1, \dots, X_m$ , avec la topologie associée à sa graduation évidente; cette série formelle  $G$  est une combinaison linéaire infinie de monômes tels que

$$(9) \quad X_{i_1}^{q_1} X_{i_2}^{q_2} \dots X_{i_n}^{q_n} ;$$

décrivons minutieusement un tel monôme; d'abord  $n \geq 1$ ; ensuite les indices  $i_1, \dots, i_n$  (compris entre 1 et  $m$ ) peuvent présenter des répétitions, puisqu'il s'agit d'indéterminées non commutatives, mais deux indices successifs ne doivent jamais être égaux; on note  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le nombre de sauts ascendants (resp. descendants), c'est-à-dire le nombre de couples  $(i_k, i_{k+1})$  tels que  $i_k < i_{k+1}$  (resp.  $i_k > i_{k+1}$ ); donc  $\alpha + \beta = n - 1$ ; enfin tous les exposants  $q_1, \dots, q_n$  sont  $\geq 1$ . On trouve assez vite que le coefficient du monôme (9) dépend seulement de  $\alpha$  et  $\beta$  et de la suite non ordonnée  $(q_1, \dots, q_n)$ ; c'est-à-dire, une permutation sur cette suite ne le change pas; ce coefficient sera noté  $\lambda_{q_1 q_2 \dots q_n}^{(\alpha\beta)}$ . Pour calculer tous ces coefficients, j'introduis la fonction que voici :

$$F(u, x) = \frac{1}{\frac{1}{1-e^{-x}} - u} = \frac{e^x - 1}{e^x(1-u) + u} = -F(1-u, -x) ,$$

où  $u \in [0, 1]$ ,  $x \in \mathbb{C}$  et  $\text{im } x \in ]-\pi, +\pi[$ . Je sais démontrer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta F(u, x_1) F(u, x_2) \dots F(u, x_m) du \\ = \sum \lambda_{q_1 q_2 \dots q_n}^{(\alpha\beta)} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} , \end{aligned}$$

avec sommation sur toutes les suites de  $n$  exposants  $\geq 1$ .

Si  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1$ , on trouve les coefficients

$$\int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta du = \frac{\alpha! \beta! (-1)^\beta}{(\alpha + \beta + 1)!}.$$

Je sais développer la fonction  $F$  en série entière :

$$F(u, x) = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q!} F_q(u) x^q ;$$

chaque  $F_q$  est un polynôme de degré  $q - 1$ , que l'on peut écrire au moyen des nombres de Stirling :

$$F_q(u) = \sum_{1 \leq j \leq q} (-1)^{q-j} j! S_q^j u^{j-1} = \sum_{1 \leq j \leq q} j! S_q^j (u-1)^{j-1} ;$$

je rappelle que  $S_q^j$  est le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal  $q$  en  $j$  sous-ensembles.

## Appendice n° 2

Le colloque J. Braconnier m'a permis de connaître le travail de R. Berger et de découvrir qu'il avait obtenu des résultats équivalents à certains de ceux que je viens d'exposer. Il sait qu'il y a correspondance biunivoque entre les déformations  $\Pi$  conservant le coproduit et les séries formelles  $\tilde{\pi}$  qui font de  $E$  un groupe formel; selon mon point de vue, cette correspondance est décrite par la formule

$$(10) \quad \Pi = \text{Exp } \pi .$$

R. Berger explique comment on peut calculer le produit  $u * v$  de deux éléments de  $SE$ , grâce à la série formelle  $\tilde{\pi}$ , en considérant  $u, v$  et  $u * v$  comme des fonctions polynomiales sur  $E^*$ ; maintenant les lettres  $x, y, z$  représentent des éléments de  $E^*$ ;  $u * v$  s'obtient en prenant la restriction à la diagonale de  $E^* \oplus E^* \oplus E^*$  de la fonction

$$(11) \quad \exp \left( z \tilde{\pi}' \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) . u(x) v(y) ;$$

donc à la partie non triviale  $\tilde{\pi}'$  de  $\tilde{\pi}$  on associe un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur  $E^* \oplus E^* \oplus E^*$ , puis son exponentielle (formellement convergente); la multiplication par  $z \in E^*$  désigne en fait une contraction ( $E^* \times E \rightarrow K$ ), puisque  $\tilde{\pi}'$  est à valeurs dans  $E$ . Pour plus de détails, je renvoie à l'article de R. Berger dans ce même volume; je désire seulement expliquer ici que ce résultat est équivalent à (10).

Un opérateur différentiel sur  $E_1^*$  à coefficients polynomiaux, éventuellement d'ordre infini, peut être défini par une application  $D \in \text{Hom}(SE_1, SE_1)$ ; il est

d'ordre  $\leq k$  si il s'annule sur  $S^p E_1$  chaque fois que  $p > k$  ; il transforme un polynôme  $w \in SE_1$  en

$$(12) \quad D.w = P_1 \circ (I_{SE_1} \otimes D) \circ C_1(w) ;$$

$P_1$  et  $C_1$  représentent le produit et le coproduit de  $SE_1$  ; si on traite  $w_1 \otimes w_2$  comme une fonction polynomiale sur  $E_1^* \oplus E_1^*$  , alors  $P_1(w_1 \otimes w_2)$  est sa restriction à la diagonale.

Explicitons maintenant la formule (10) en se souvenant que  $\pi = \pi_0 + \pi'$  et  $P = \text{Exp } \pi_0$  :

$$\Pi = P \circ (P \otimes \text{Exp } \pi') \circ \tau \circ (C \otimes C) ,$$

en posant  $\tau(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes u_4) = u_1 \otimes u_3 \otimes u_2 \otimes u_4$  , car  $\tau \circ (C \otimes C)$  est le coproduit de  $SE \otimes SE$  , tandis que  $(P \otimes P) \circ \tau$  représente son produit. Je suppose que la notation  $\pi' \otimes 1$  est assez claire si je précise qu'elle désigne un élément de  $\text{Hom}(SE \otimes SE, SE \otimes SE)$  à valeurs dans  $E \otimes K$  ; l'égalité précédente est équivalente à

$$\Pi = P \circ (P \otimes P) \circ \tau \circ (I_{SE \otimes SE} \otimes \text{Exp } (\pi' \otimes 1)) \circ \tau \circ (C \otimes C) ;$$

à cause de (12), elle signifie que  $u * v$  s'obtient en appliquant à  $u \otimes v$  (fonction polynomiale sur  $E^* \oplus E^*$  ) l'opérateur différentiel défini par  $\text{Exp } (\pi' \otimes 1)$  , puis en prenant la restriction à la diagonale. L'opérateur différentiel défini par  $\pi' \otimes 1$  est  $x\tilde{\pi}' \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  ; cependant il faut prendre son Exponentielle pour le produit commutatif de  $\text{Hom}(SE \otimes SE, SE \otimes SE)$  , qui n'est pas le produit des opérateurs différentiels ; pour contourner cette difficulté, il suffit d'introduire une troisième variable  $z$  sur laquelle  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  n'agissent pas, et l'on obtient ainsi (11).

- o -

(3 décembre 1986)