PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. FARAUT

Intégrales de Marcel Riesz sur un cône symétrique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 17-30
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_17_0>

INTEGRALES DE MARCEL RIESZ SUR UN CÔNE SYMETRIQUE

J.FARAUT

Introduction. — L'intégrale de Riemann-Liouville d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_o^x f(x)(x-y)^{\alpha-1} dy$$

Cette intégrale converge pour $Re\ \alpha > 0$ si f est continue, et les opérateurs I^α vérifient

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{d}{dx} I^\alpha = I^{\alpha-1}$$

Cette dernière relation permet de montrer que $I^\alpha f$ admet un prolongement analytique par rapport à α si f est de classe C^∞, et I^o est égal à l'identité. Dans son mémoire "*L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*" [8], MARCEL RIESZ généralise cette intégrale en remplaçant la demi-droite $]0, \infty[$ par le cône de lumière. Dans $\mathbb{R}^n$ considérons la forme quadratique de Lorentz

$$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$$

et le cône de lumière

$$\Omega = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n, Q(x) > 0, x_1 > 0 \Big\}$$

Marcel Riesz considère l'intégrale suivante

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{D(x)} f(y) Q(x-y)^{\frac{\alpha-n}{2}}\, dy$$

où

$$D(x) = \Omega \cap (x - \Omega)$$

et

$$H_n(x) = \pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{2\alpha-2} \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\alpha - \frac{n-2}{2})$$

et il démontre les propriétés suivantes : l'intégrale converge pour

$Re\ \alpha > \frac{n-2}{2}$ et vérifie

$$I^\alpha\ I^\beta\ = I^{\alpha+\beta}$$

$$\Delta\ I^\alpha = I^{\alpha-1}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Cette dernière relation est un cas particulier des identités de Bernstein, elle peut aussi s'écrire

$$\Delta Q^\alpha = 4\alpha(\alpha + \frac{n}{2} - 1)Q^{\alpha-1}$$

Cette relation permet de montrer que $I^\alpha f$ admet un prolongement analytique par rapport à α et là encore I^o est l'identité. Ensuite GÅRDING [2] considère le cône des matrices symétriques définies positives et aussi le cône des matrices hermitiennes définies positives. Comme le cône de lumière, ces cônes sont des exemples de cônes symétriques. Plus tard GINDIKIN [3] étudie ce type d'intégrales pour les cônes homogènes. Dans cet exposé je voudrais présenter ces intégrales sur les cônes symétriques et deux applications qui peuvent en être faites : la première concerne le phénomène de Huyghens, la deuxième la relation fonctionnelle de certaines intégrales zeta.

1. Cônes symétriques et algèbres de Jordan. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie, et soit Ω un cône ouvert convexe (non vide) dans V. On suppose que Ω ne contient aucune droite. Soit $G(\Omega)$ le sous-groupe de $GL(V)$ des transformations qui conservent Ω globalement:

$$G(\Omega) = \Big\{g \in GL(V),\ g\Omega = \Omega\Big\}$$

Le cône Ω est dit *homogène* si $G(\Omega)$ opère transitivement sur Ω. Supposons V muni d'un produit scalaire. Le *cône dual* Ω^* du cône Ω est défini par

$$\Omega^* = \Big\{x \in V,\ \forall y \in \bar{\Omega} - \{0\},\ (x,y) > 0\Big\}$$

Le cône Ω est dit *autodual* si $\Omega = \Omega^*$. Le cône Ω est dit *symétrique* s'il est homogène et autodual.

Exemples. — 1) Soit $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles $m \times m$ muni du produit scalaire

$$(x, y) = tr(xy)$$

Le cône Ω des matrices symétriques définies positives est symétrique.
2) Soit $V = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, et soit Ω le cône de lumière:

$$\Omega = \{x,\ x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_1 > 0\}$$

Le cône de lumière Ω est symétrique.
Koecher [7] et Vinberg [12] ont établi le lien qui existe entre les cônes symétriques et les algèbres de Jordan. Une *algèbre de Jordan* réelle est un espace vectoriel V sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit, c'est à dire une application bilinéaire

$$V \times V \to V$$

vérifiant

$$(J1)\ xy = yx$$

$$(J2)\ x^2(xy) = x(x^2y)$$

Notons $L(x)$ l'endomorphisme de V défini par

$$L(x)y = xy$$

alors la propriété $(J2)$ signifie que $L(x)$ et $L(x^2)$ commuttent. Nous supposons que V est de dimension finie et possède un élément unité e. Considérons le polynôme minimal d'un élément x de V, c'est à dire un polynôme de degré minimum tel que $p(x) = 0$. On montre qu'il existe un ouvert dense V_o de V tel que pour x dans V_o le degré du polynôme minimal p de x soit de degré constant r. Notons $p(\lambda; x) = p(\lambda)$. Pour x dans V_o

$$p(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x)$$

Le nombre r est appelé le rang de l'algèbre de Jordan V, $a_j(x)$ est un polynôme sur V homogène de degré j, $a_1(x)$ s'appelle la *trace* de x et $a_r(x)$ le *déterminant* de x :

$$\mathrm{tr}(x) = a_1(x)$$

$$\det(x) = a_r(x)$$

Exemples. — 1) $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ muni du produit de Jordan

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Dans ce cas la trace et le déterminant sont la trace et le déterminant au sens usuel.

2) Soit E un espace euclidien. Posons

$$V = \mathbf{R} \oplus E$$

et considérons sur V le produit

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu + (u, v), \lambda v + \mu u)$$

On a alors

$$\operatorname{tr}(\lambda, u) = 2\lambda$$
$$\det(\lambda, u) = \lambda^2 - \|u\|^2$$

L'algèbre de Jordan V est dite *formellement réelle* si le produit scalaire défini sur V par

$$(x, y) = \operatorname{tr}(xy)$$

est défini positif.
Soit V une algèbre de Jordan formellement réelle. Posons

$$\Omega = \left\{x^2,\ x \in V, \det(x) \neq 0\right\}$$

THÉORÈME 1. — *(*KOECHER *[7],* VINBERG *[12]) L'ensemble Ω est un cône symétrique, et tout cône symétrique est obtenu de cette façon à partir d'une algèbre de Jordan formellement réelle.*

Dans les deux exemples ci-dessus V est une algèbre de Jordan formellement réelle. Dans le premier exemple Ω est le cône des matrices symétriques définies positives. Dans le deuxième Ω est le cône de lumière :

$$\Omega = \left\{(\lambda, u),\ \lambda > \|u\|\right\}$$

2. Intégrales de Marcel Riesz sur un cône symétrique. — Soit V une algèbre de Jordan formellement réelle, de dimension n et de rang r. Nous supposons que V est simple, c'est à dire qu'elle n'est pas le produit direct de deux algèbres de Jordan. Soit Ω le cône symétrique associé. La fonction gamma du cône Ω est définie par

$$\Gamma_\Omega(\alpha) = \int_\Omega e^{-tr(x)} (\det\ x)^{\alpha - \frac{n}{r}} dx$$

Dans le cas du cône des matrices symétriques définies positives cette intégrale a été considérée en analyse statistique multivariée par WISHART

[14], puis par SIEGEL [10] dans le cadre de l'étude des fonctions automorphes. C'est pourquoi cette intégrale est parfois appelée intégrale de Siegel.

Elle a été étudiée dans le cas général par KOECHER [6] et GINDIKIN [3] qui l'a calculée : elle converge pour $Re\ \alpha > \frac{d}{2}(r-1)$, où d est un entier dépendant de V vérifiant

$$n = r + \frac{d}{2}(r-1)$$

et on a

$$\Gamma_\Omega(\alpha) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\ \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - \frac{d}{2}) \ldots \Gamma(\alpha - \frac{d}{2}(r-1))$$

L'intégrale de Marcel Riesz est définie par

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_{D(x)} f(y) \det(x-y)^{\alpha - \frac{n}{r}} dy$$

avec

$$D(x) = \Omega \cap (x - \Omega)$$

Cette intégrale converge aussi pour $Re\ \alpha > \frac{d}{2}(r-1)$ et vérifie

$$I^\alpha\ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$$

Cette propriété est liée à l'intégrale eulérienne suivante

$$\int_{D(e)} (\det\ x)^{\alpha - \frac{n}{r}}\ \det(e-x)^{\beta - \frac{n}{r}}\ dx = \frac{\Gamma_\Omega(\alpha)\ \Gamma_\Omega(\beta)}{\Gamma_\Omega(\alpha+\beta)}$$

où e est l'élément unité de V. De plus, si $P(x) = \det(x)$, nous avons

$$P(\frac{\partial}{\partial x})\ I^\alpha = I^{\alpha-1}$$

ce qui correspond à l'identité de Bernstein

$$P(\frac{\partial}{\partial x})\ P(x)^\alpha = b(\alpha)\ P(x)^{\alpha-1}$$

avec

$$b(\alpha) = \alpha(\alpha + \frac{d}{2}) \ldots (\alpha + (r-1)\frac{d}{2})$$

On déduit de cette relation que $I^\alpha f$ admet un prolongement analytique en α, et on montre que I^o est l'identité.

Remarquons que $I^\alpha f$ est un produit de convolution

$$I^\alpha f = R_\alpha * f$$

où R_α est la distribution définie par

$$R_\alpha(\varphi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_\Omega \varphi(x) \, (\det x)^{\alpha - \frac{n}{r}} dx$$

Cette distribution R_α vérifie

$$P(\frac{\partial}{\partial x}) \, R_\alpha = R_{\alpha-1}$$

$$R_o = \delta$$

où δ désigne la masse de Dirac en O. Par suite

$$P(\frac{\partial}{\partial x}) \, R_1 = \delta$$

c'est à dire que R_1 est une solution élémentaire de $P(\frac{\partial}{\partial x})$.

3. Application au problème de Cauchy. — Soit $P(\frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients constants. Soit S une hypersurface *non caractéristique* pour $P(\frac{\partial}{\partial x})$, c'est à dire qu'en tout point de S

$$P(\nu) \neq 0$$

où ν désigne un vecteur normal à S.

Supposons que S divise $\mathbb{R}^n$ en deux régions R_+ et R_-. Notons $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la dérivée normale de u dans la direction de R_+. Le problème de Cauchy s'énonce ainsi : étant données une fonction h définie dans R_+, des fonctions $f_o,\dots,f_{m-1}$ définies sur S, déterminer une fonction u définie dans R_+ telle que

$$P(\frac{\partial}{\partial x}) \, u = h$$

dans R_+ et

$$u = f_o, \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} = f_{m-1}$$

sur S.

Nous supposons que S est de classe C^∞, ainsi que les fonctions $f_o, \dots, f_{m-1}$, et que h et u sont de classe C^∞ sur l'adhérence $\overline{R}_+$ de R_+. Soit u une solution. Prolongeons u et h en des fonctions u_o et h_o définies dans $\mathbb{R}^n$

et nulles dans R_-. Puisque S est non caractéristique, la fonction u est solution du problème de Cauchy si et seulement si

$$P(\frac{\partial}{\partial x})u_o = h_o + F$$

au sens des distributions, où F est une distribution portée par S dépendant linéairement des fonctions $f_o, \ldots, f_{m-1}$. La distribution F est une multicouche d'ordre $m-1$.
Supposons que $P(\frac{\partial}{\partial x})$ possède une solution élémentaire E à support dans un cône convexe fermé propre C (propre signifie que $C \cap (-C) = 0$) :

$$P(\frac{\partial}{\partial x})\ E = \delta$$

Supposons que, pour tout x de R_+, $(x - C) \cap R_+$ soit borné, et que, pour tout x de R_-, $x - C$ ne rencontre pas R_+. Alors le problème de Cauchy admet une solution unique qui est donnée par

$$u_o = E * (h_o + F)$$

Supposons que h soit nulle. On dit que le *phénomène de Huyghens* a lieu si la valeur $u(x)$ en un point x de R_+ de la solution u ne dépend que des valeurs de $f_o, \ldots, f_{m-1}$ sur l'intersection

$$S \cap (x - \partial C)$$

où ∂C désigne la frontière de C. Le phénomène de Huyghens a lieu si et seulement si le support de la solution élémentaire E est contenu dans la frontière ∂C du cône C.
Il est connu que le phénomène de Huyghens a lieu pour l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

si n est pair ≥ 4. GÅRDING [2] a montré que le phénomène de Huyghens avait lieu pour l'opérateur $\det(\frac{\partial}{\partial x})$ sur l'espace $\mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ des matrices symétriques réelles et sur l'espace $\mathrm{Herm}(m, \mathbf{C})$ des matrices hermitiennes complexes. Ensuite GINDIKIN et VAINBERG [4] ont montré que les cônes homogènes fournissaient d'autres exemples d'opérateurs différentiels pour lesquels le phénomène de Huyghens avait lieu.
Considérons une algèbre de Jordan formellement réelle V et posons $P(x) = \det(x)$. Soit Γ_Ω la fonction gamma du cône symétrique associé.

PROPOSITION 2. — *Le phénomène de Huyghens a lieu pour l'opérateur différentiel $P(\frac{\partial}{\partial x})$ si et seulement $\alpha = 1$ est un pôle de $\Gamma_\Omega(\alpha)$.*

En effet $E = R_1$ est une solution élémentaire de $P(\frac{\partial}{\partial x})$, et son support est contenu dans Ω. Si le support de φ est contenu dans Ω, pour tout nombre complexe α nous avons

$$R_\alpha(\varphi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_\Omega \varphi(x)(\det x)^{\alpha - \frac{n}{r}}\, dx$$

Par suite, si $\alpha = 1$ est un pôle de $\Gamma_\Omega(\alpha)$, $R_1(\varphi) = 0$. Réciproquement, si $R_1(\varphi) = 0$ pour toute fonction φ dont le support est contenu dans Ω, $\alpha = 1$ est un pôle de $\Gamma_\Omega(\alpha)$.
Si $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$, le support de la solution élémentaire $E = R_1$ est égal à l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives de rang ≤ 2. Si $V = \mathrm{Herm}(m, \mathbf{C})$, il est égal à l'ensemble des matrices hermitiennes semi-définies positives de rang ≤ 1.

4. Application à la relation fonctionnelle de certaines intégrales zeta. — Nous allons considérer certaines intégrales zeta associées à des représentations d'algèbres de Jordan. Soit V une algèbre de Jordan formellement réelle de rang r et de dimension n. Nous supposons que V est simple. On note d l'entier défini par

$$n = r + \frac{d}{2} r(r-1)$$

Soit E un espace euclidien de dimension N. Une *représentation* de l'algèbre de Jordan V dans E est une application linéaire

$$\rho : V \to \mathrm{Sym}(E)$$

de V dans l'espace de endomorphismes symétriques de E vérifiant

$$\rho(xy) = \frac{1}{2}(\rho(x)\rho(y) + \rho(y)\rho(x))$$

Exemple. — Soient $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$, $E = M(m, k; \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(\xi, \eta) = tr(\xi\eta')$$

où η' désigne la matrice transposée de η, et définissons la représentation ρ de V dans E par

$$\rho(x)\xi = x\xi$$

Pour ξ fixé l'application

$$x \mapsto (\rho(x)\xi, \xi)$$

est une forme linéaire sur V, il existe donc y dans V tel que

$$(\rho(x)\xi, \xi) = (x, y)$$

L'élément y dépend de ξ de façon quadratique. Nous notons

$$y = Q(\xi)$$

et Q est une forme quadratique définie sur E à valeurs dans V, plus précisément dans l'adhérence $\overline{\Omega}$ du cône symétrique Ω associé à l'algèbre de Jordan V. En effet

$$(Q(\xi), x^2) = \|\rho(x)\xi\|^2 \geq 0$$

Dans le cas de l'exemple ci-dessus nous avons

$$Q(\xi) = \xi\xi'$$

Soit F une fonction définie sur $\overline{\Omega}$. Nous lui associons la fonction f définie sur E par

$$f(\xi) = F(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

Une telle fonction f sera dite *radiale*. Supposons $N \geq dr^2$. La fonction radiale f est intégrable sur E si et seulement si la fonction $F(x)(\det x)^{\frac{N}{2r} - \frac{n}{r}}$ est intégrable sur Ω et nous avons

$$\int_E f(\xi) d\xi = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\Gamma_\Omega(\frac{N}{2r})} \int_\Omega F(x)(\det x)^{\frac{N}{2r} - \frac{n}{r}} dx$$

Soit $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ et ρ la représentation de l'algèbre de Jordan V dans $E = M(m, k; \mathbf{R})$ définie par

$$\rho(x)\xi = x\xi$$

Une fonction radiale f,

$$f(\xi) = F(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

est invariante à droite par le groupe orthogonal $O(k)$ et plus précisément nous avons

PROPOSITION 3. — *L'application qui à une fonction F de l'espace $\mathcal{S}(\overline{\Omega})$ des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(V)$ associe la fonction radiale f,*

$$f(\xi) = F(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\overline{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}(E)^\natural$ des fonctions de $\mathcal{S}(E)$ invariantes à droite par $O(k)$.

a) D'après WEYL ([13] p.53), tout polynôme p sur E invariant à droite par $O(k)$ s'écrit

$$p(\xi) = P(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

où P est un polynôme sur V, déterminé de façon unique.

b) D'après SCHWARTZ ([9], theorem 1), il en résulte que toute fonction f de classe C^∞ sur E invariante à droite par $O(k)$ s'écrit

$$f(\xi) = F(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

où F est une fonction de classe C^∞ sur V.

c) Pour tout x dans $\overline{\Omega}$ nous avons

$$\|x\| \leq \mathrm{tr}(x) \leq \sqrt{m}\|x\|$$

par suite, puisque

$$\mathrm{tr}Q(\xi) = \|\xi\|^2$$

nous avons, si $x = \frac{1}{2}Q(\xi)$,

$$\|x\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|^2 \leq \sqrt{m}\|x\|$$

On en déduit que la fonction f appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\overline{\Omega})$ si et seulement F appartient à $\mathcal{S}(V)$.

(Le principal argument de cette démonstration m'a été communiqué par G. Barbaçon, je l'en remercie.)

La transformée de Fourier d'une fonction radiale au sens usuel se traduit par la *transformation de Hankel.* Ceci se généralise au cas des fonctions radiales que nous venons de considérer. Pour $\nu > 1 + d(r-1)$ nous allons définir la transformation de Hankel $\mathcal{H}_\nu$ comme un opérateur unitaire de l'espace de Hilbert $L^2_\nu(\Omega)$,

$$L^2_\nu(\Omega) = L^2(\Omega, (\det x)^{\nu - \frac{n}{r}} dx)$$

Sa définition repose sur le résultat suivant

PROPOSITION 4. — *Soit F une fonction de $L^2_\nu(\Omega)$. Posons*

$$\Phi(z) = \int_\Omega e^{-(x,z)} F(x) (\det x)^{\nu - \frac{n}{r}} dx$$

La fonction Φ est holomorphe sur le tube $\Omega+iV$. On lui associe la fonction Ψ définie sur ce tube par

$$\Psi(z) = (\det z)^{-\nu}\Phi(z^{-1})$$

Alors il existe une fonction G de $L^2_\nu(\Omega)$ unique telle que

$$\Psi(z) = \int_\Omega e^{-(x,z)}G(x)(\det x)^{\nu-\frac{n}{r}}\,dx$$

et nous avons

$$\|G\|_\nu = \|F\|_\nu$$

où $\|.\|_\nu$ désigne la norme de l'espace $L^2_\nu(\Omega)$:

$$\|F\|^2_\nu = \int_\Omega |F(x)|^2(\det x)^{\nu-\frac{n}{r}}\,dx$$

Par définition la transformation de Hankel $\mathcal{H}_\nu$ est la transformation qui à la fonction F associe la fonction G.
La proposition prédédente a été démontrée par HERZ [5] lorsque $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$. Les arguments sont les mêmes dans la situation générale que nous considérons.
a) Pour $\alpha > \frac{d}{2}(r-1)$ et z dans le tube $\Omega + iV$ nous avons

$$\int_\Omega e^{-(x,z)}(\det x)^{\alpha-\frac{n}{r}}\,dx = \Gamma_\Omega(\alpha)(\det z)^{-\alpha}$$

b) D'après la formule de Plancherel,

$$\int_V |\Phi(\xi+i\eta)|^2 d\eta = (2\pi)^n \int_\Omega e^{-2(x,\xi)}|F(x)|^2(\det x)^{2\nu-\frac{2n}{r}}\,dx$$

En intégrant les deux membres par rapport à la mesure $(\det \xi)^{\nu-\frac{2n}{r}}d\xi$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega+iV} |\Phi(\xi+i\eta)|^2\ (\det\xi)^{\nu-\frac{2n}{r}}d\xi d\eta \\
&\quad = (2\pi)^n \int_\Omega \left\{ \int_\Omega e^{-2(x,\xi)}(\det\xi)^{\nu-\frac{2n}{r}}d\xi \right\} |F(x)|^2\ (\det x)^{2\nu-\frac{2n}{r}}\,dx \\
&\quad = (4\pi)^n\ 2^{-\nu r}\ \Gamma_\Omega(\nu-\frac{n}{r}) \int_\Omega |F(x)|^2\ (\det x)^{\nu-\frac{n}{r}}\,dx
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega+iV} |\Phi(\xi+i\eta)|^2\ (\det\xi)^{\nu-\frac{2n}{r}}d\xi d\eta = c_\nu\|F\|^2_\nu$$

c) Considérons la transformation

$$\xi + i\eta \to \xi' + i\eta' = (\xi + i\eta)^{-1}$$

du tube $\Omega + iV$ dans lui-même. Le jacobien de cette transformation est égal à

$$J(\xi, \eta) = |\det(\xi + i\eta)|^{\frac{-4n}{r}}$$

et nous avons

$$\det \xi' = |\det(\xi + i\eta)|^{-2} \det \xi$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega+iV} |\Psi(\xi + i\eta)|^2 \, (\det \xi)^{\nu - \frac{2n}{r}} d\xi d\eta \\
&\quad = \int_{\Omega+iV} |\Phi((\xi + i\eta)^{-1})|^2 \, |\det(\xi + i\eta)|^{-2\nu} (\det \xi)^{\nu - \frac{2n}{r}} d\xi d\eta \\
&\quad = \int_{\Omega+iV} |\Phi(\xi' + i\eta')|^2 \, |\det(\xi' + i\eta')|^{2\nu} \\
&\quad\quad |\det(\xi' + i\eta')|^{-2\nu + \frac{4n}{r}} \, (\det \xi')^{\nu - \frac{2n}{r}} \, |\det(\xi' + i\eta')|^{-\frac{4n}{r}} d\xi' d\eta' \\
&\quad = \int_{\Omega+iV} |\Phi(\xi' + i\eta')|^2 \, (\det \xi')^{\nu - \frac{2n}{r}} d\xi' d\eta'
\end{aligned}$$

La proposition suivante généralise un théorème de TRICOMI ([11]) à la situation que nous considérons.

PROPOSITION 5. — *Supposons $N = dim\ E > 2n$. Soit f une fonction radiale sur l'espace E :*

$$f(\xi) = F(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

La transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est aussi radiale

$$\hat{f}(\eta) = \tilde{F}(\frac{1}{2}Q(\xi))$$

et nous avons

$$\tilde{F} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \mathcal{H}_\nu(F)$$

avec $\nu = \frac{N}{2r}$.

La démonstration repose sur la relation suivante

$$\int_E e^{-i(\xi,\eta)} e^{-\frac{1}{2}(\rho(z)\xi,\xi)} d\xi = (2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det z)^{-\frac{N}{2r}} e^{-\frac{1}{2}(\rho(z^{-1})\eta,\eta)}$$

qui est valable lorsque z appartient au tube $\Omega + iV$.
Posons $P(\xi) = \det Q(\xi)$. Le polynôme P est homogène de degré $2r$ et $P(\xi) \geq 0$. Considérons l'intégrale zeta associée au polynôme P,

$$Z(f, \alpha) = \int_E P(\xi)^\alpha f(\xi) d\xi$$

où α est un nombre complexe, $Re\ \alpha > 0$, et f est une fonction de l'espace $\mathcal{S}(E)$.

THÉORÈME 6. — *La fonction analytique $Z(f, .)$ admet un prolongement méromorphe à* C *qui vérifie la relation fonctionnelle suivante*

$$Z(\hat{f}, \alpha - \frac{N}{2r}) = \pi^{\frac{N}{2}} 2^{2r\alpha} \frac{\Gamma_\Omega(\alpha)}{\Gamma_\Omega(\frac{N}{2r} - \alpha)} Z(f, -\alpha)$$

La démonstration utilise la transformation de Hankel et la relation

$$\int_\Omega e^{-(x,z)} (\det x)^{\alpha - \frac{n}{r}} dx = \Gamma_\Omega(\alpha)(\det z)^{-\alpha}$$

qui est vérifiée si z appartient au tube $\Omega + iV$.

[1] FARAUT (J.) and TRAVAGLINI (G.). — Bessel functions associated with representations of formally real Jordan algebras,*J. of Funct. Analysis*, à paraître..

[2] GARDING (G.L.). — The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz potentials, *Ann. of Math.*, t. **48**, 1947, p. 785–826.

[3] GINDIKIN (S.G.). — Analysis in homogeneous domains, *Russian math. surveys*, t. **19**, 1964, p. 1–89.

[4] GINDIKIN (S.G.) and VAINBERG (B.R.). — On the strong Huyghens principle for a class of differential operators with constant coefficients, *Trans. Moskow Math. Soc.*, t. **16**, 1967, p. 163–196.

[5] HERZ (C.H.). — Bessel functions of matrix argument, *Ann. of Math.*, t. **61**, 1955, p. 474–523.

[6] KOECHER (M.). — Positivitätsbereiche im $\mathbf{R}^n$, *Amer. J. of Math.*, t. **79**, 1957, p. 575–596.

[7] KOECHER (M.). — Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Annalen*, t. **135**, 1958, p. 192–202.

[8] RIESZ (M.). — L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, t. **81**, 1949, p. 1–223.

[9] SCHWARTZ (G.W.). — Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, *Topology*, t. **14**, 1975, p. 63–68.

[10] SIEGEL (C.L.). — Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, *Ann. of Math.*, t. **36**, 1935, p. 527–606.

[11] TRICOMI (F.). — Sulla trasformazione e il teorema di reciprocita di Hankel, *Atti della Reale Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti*, t. **22**, 1935, p. 564–571.

[12] VINBERG (E.B.). — Homogeneous cones, *Soviet Math. Dokl.*, t. **1**, 1960, p. 787–790.

[13] WEYL (H.). — *The classicals groups.* — Princeton University Press 1946.

[14] WISHART (J.). — The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population, *Biometrika*, t. **20 A**, 1928, p. 32–43.

Jacques FARAUT
Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex