

M. RAIS

Fonctions et champs de vecteurs invariants de classe C^k sur une algèbre de Takiff

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 41-59

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__1B_41_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**FONCTIONS ET CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS DE CLASSE C^k
SUR UNE ALGÈBRE DE TAKIFF**

par M. RAIS

0. INTRODUCTION

0.1. Soient \underline{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et G son groupe adjoint. On désigne par $P(\underline{g})^G$ l'algèbre des fonctions polynomiales G -invariantes sur \underline{g} et par $\chi(\underline{g})$ l'ensemble des champs de vecteurs invariants sur \underline{g} , qui est de manière naturelle un module sur $P(\underline{g})^G$. La détermination de $\chi(\underline{g})$ peut être effectuée en se restreignant à une sous-algèbre de Cartan \underline{h} de \underline{g} . Notons W le groupe de Weyl de \underline{h} et d'une façon générale $R_{\underline{h}}$ l'opération de restriction à \underline{h} des fonctions définies dans \underline{g} . Si $L : \underline{g} \rightarrow \underline{g}$ est un champ de vecteurs G -invariant, alors $R_{\underline{h}}(L) : \underline{h} \rightarrow \underline{h}$ est un champ de vecteurs W -invariant. En utilisant l'identification de \underline{h} avec son dual, qui résulte de l'existence de la forme de Killing B , on est ramené à l'étude des formes différentielles de degré 1, W -invariantes sur \underline{h} . On peut alors utiliser le théorème de Solomon ([So]) et en déduire : $\chi(\underline{g})$ est un module libre sur $P(\underline{g})^G$, de rang r (où r est le rang de \underline{g}), et les gradients dp_1, \dots, dp_r des polynômes invariants "élémentaires" (calculés au moyen de B) en forment un système de générateurs. Dans la démonstration ainsi résumée, deux faits jouent un rôle essentiel : W est un groupe de réflexions et $R_{\underline{h}}$ est un isomorphisme d'algèbres de $P(\underline{g})^G$ sur $P(\underline{h})^W$ (théorème de Chevalley). On a un résultat du même type si on s'intéresse aux champs de vecteurs holomorphes G -invariants.

0.2. Soient maintenant \underline{g}' une algèbre de Lie semi-simple réelle et G' son

groupe adjoint. L'étude des champs de vecteurs polynomiaux G' -invariants sur \underline{g}' , dont l'ensemble est noté $\chi(g')$, se ramène à celle des champs invariants polynomiaux sur la complexifiée de \underline{g}' . Il n'y a donc rien de nouveau. Mais ici, on peut s'intéresser à l'ensemble $\chi^\infty(g')$ des champs de vecteurs invariants de classe C^∞ , ou même à celui $\chi^k(\underline{g}')$ des champs invariants de classe C^k (k entier ≥ 0). Si \underline{g}' est compacte, on peut utiliser la méthode mise en oeuvre dans le cas complexe, avec quelques adaptations, au moins pour les champs de classe C^∞ ([Ra], 3.3); pour les champs invariants de classe C^k (avec k fini), cette même méthode fait apparaître une perte de dérivabilité dans les coefficients ϕ_i du développement $L = \sum \phi_i dp_i$ d'un champ de vecteurs invariant L .

Dans ce qui suit, on traite le cas où $\underline{g}' = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est l'algèbre de Lie obtenue par restriction des scalaires à partir d'une algèbre réductive complexe. Examinons par exemple le cas $\underline{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, où on prend pour \underline{h} la sous-algèbre des matrices diagonales (isomorphe à \mathbb{C} comme espace vectoriel complexe). Le groupe de Weyl est le groupe à 2 éléments engendré par la symétrie $s(z) = -z$. On écrit $z = x + iy$, ce qui identifie $\underline{h}_{\mathbb{R}}$ à \mathbb{R}^2 . Alors $P(\underline{h}_{\mathbb{R}})^W$ est l'algèbre engendrée par les fonctions $a(x, y) = x^2$, $b(x, y) = y^2$ et $c(x, y) = xy$, avec la relation $c^2 = ab$. L'algèbre $P(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^G$ des fonctions polynomiales G -invariantes sur $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ est engendrée par les deux fonctions (algébriquement indépendantes) :

$$q_1(X) = \operatorname{Re} \det(X), \quad q_2(X) = \operatorname{Im}(\det X) \quad (X \in \underline{g})$$

et son image par $R_{\underline{h}}$ est l'algèbre $\mathbb{R}[a, b, c]$. L'homomorphisme $R_{\underline{h}} : P(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^G \rightarrow P(\underline{h}_{\mathbb{R}})^W$ est injectif, mais n'est pas surjectif. On notera par exemple que pour $X = \operatorname{diag}(x+iy, -x-iy)$, on a :

$$(a+b)(x, y) = x^2 + y^2 = |\det X|$$

de sorte que $(a+b)$ est la restriction à $\underline{h}_{\mathbb{R}}$ d'une fonction continue G -invariante, qui n'est pas de classe C^1 . En fait, il est facile de voir que $P(\underline{h}_{\mathbb{R}})^W$ est un module libre de rang 2 sur $R_{\underline{h}}(P(\underline{g}_{\mathbb{R}})^G)$. Par ailleurs, un calcul direct montre que l'ensemble $\chi(\underline{h}_{\mathbb{R}})^W$ des champs de vecteurs W -invariants sur $\underline{h}_{\mathbb{R}}$ est un module libre de rang 4 sur $\mathbb{R}[a-b,c]$ et que $\chi(\underline{g}_{\mathbb{R}})^G$ est un module libre de rang 2 sur $P(\underline{g}_{\mathbb{R}})^G$, de sorte que $R_{\underline{h}} : \chi(\underline{g}_{\mathbb{R}})^G \rightarrow \chi(\underline{h}_{\mathbb{R}})^W$ est injective mais non surjective. Soit par exemple (on interprète les champs de vecteurs comme des opérateurs différentiels) :

$$L = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

On a $L(a-b) = 2(a+b)$. Si $L = R_{\underline{h}}(L')$ avec L' dans $\chi(\underline{g}_{\mathbb{R}})$, on aurait : $2(a+b) = R_{\underline{h}}(L'q_1)$, ce qui est absurde.

0.3. Il semble donc préférable d'aborder la question posée par une autre méthode. C'est ce que nous faisons ici, en utilisant les idées et résultats de Kostant ([K]). D'ailleurs, nous traitons la question pour une classe d'algèbres de Lie complexes \underline{g} , bien plus large que celle des algèbres réductives, à savoir celle des algèbres de Takiff (voir le texte pour des détails) dont le prototype le plus simple est celui du produit semi-direct d'une algèbre semi-simple par son espace vectoriel sous-jacent, relativement à la représentation adjointe. Il apparaîtra que pour ces algèbres (qui sont à radical nilpotent), la plupart des résultats de Kostant concernant la théorie des invariants des algèbres réductives complexes se généralisent. On en déduira par exemple :

Théorème : Soit \underline{g} une algèbre de Takiff complexe, de rang r , et soit (p_1, \dots, p_r) un système de générateurs homogènes algébriquement indépendants

de $P(\mathfrak{g})^G$ (un tel système existe). Notons $q_k = \operatorname{Re} p_k$, $q_{k+r} = \operatorname{Im} p_k$ ($1 \leq k \leq r$). Alors :

1) Toute fonction f de classe C^k et G -invariante sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f(X) = f_0(q_1(X), \dots, q_{2r}(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

où f_0 est une fonction de classe C^k (de $2r$ variables réelles)

2) Tout champ de vecteurs invariant L de classe C^k sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$L = \sum_{\ell} \phi_{\ell} dq_{\ell}$$

où les ϕ_{ℓ} sont G -invariantes de classe C^k sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Ainsi, pour cette classe d'algèbres de Lie, les diverses factorisations des invariants de classe C^k à travers les invariants élémentaires se font sans perte de dérivabilité.

En résumé, on traite de la théorie des invariants pour des groupes non réductifs et les résultats concernant les invariants de classe C^k (même particularisés au cas des algèbres réductives) semblent originaux.

1. LES ALGÈBRES DE LIE $\mathfrak{g} \times_{\operatorname{ad}} \mathfrak{g}$

1.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On considère l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_{\operatorname{ad}} \mathfrak{g}$, produit semi-direct de l'espace vectoriel sous-jacent de \mathfrak{g} par l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , relativement à la représentation adjointe de \mathfrak{g} ($\{0\} \times \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$, isomorphe à \mathfrak{g}). On notera $X = (X_0, X_1)$ l'élément général de $\tilde{\mathfrak{g}}$, où X_0 et X_1 sont des éléments de \mathfrak{g} . Les algèbres de Takiff ([Ta]) sont

celles obtenues par itération de cette construction, en partant d'une algèbre de Lie semi-simple \underline{g} . Que \underline{g} soit semi-simple ou non, on a :

$$[(Y_0, Y_1), [X_0, X_1]] = ([Y_0, X_1] + [Y_1, X_0], [Y_1, X_1])$$

d'où il résulte que $\text{ad}((Y_0, Y_1))$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \text{ad } Y_1 & \text{ad } Y_0 \\ 0 & \text{ad } Y_1 \end{pmatrix}$$

(où ad désigne la représentation adjointe de \underline{g}). Dès lors :

$$\det(\lambda + \text{ad}((Y_0, Y_1))) = (\det(\lambda + \text{ad } Y_1))^2$$

et le polynôme discriminant $D_{\tilde{g}}$ (le coefficient de la plus petite puissance de λ qui apparaît effectivement dans le développement du polynôme caractéristique "générique" de \tilde{g}) se calcule au moyen de $D_{\underline{g}}$ par :

$$D_{\tilde{g}}(Y_0, Y_1) = (D_{\underline{g}}(Y_1))^2$$

Le rang de \tilde{g} est donc le double du rang de \underline{g} et un élément (Y_0, Y_1) de \tilde{g} est générique ssi Y_1 est un élément générique de \underline{g} .

1.2. Supposons dorénavant que \underline{g} est quadratique, i.e. qu'elle est munie d'une forme bilinéaire symétrique B , invariante et non dégénérée. Alors :

$$\tilde{B}((X_0, X_1), (Y_0, Y_1)) = B(X_0, Y_1) + B(X_1, Y_0)$$

définit sur \tilde{g} une forme bilinéaire symétrique, invariante et non dégénérée.

1.3. Soit p une fonction polynomiale sur \underline{g} (à valeurs dans le corps de base). On définit le gradient $dp : \underline{g} \rightarrow \underline{g}$ de p , au moyen de B . Autrement dit :

$$B(dp(X), Y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 p(X+tY) \quad (X, Y \text{ dans } \underline{\mathfrak{g}})$$

Soit G le groupe adjoint de $\underline{\mathfrak{g}}$. Si p est G -invariante, alors dp est un champ de vecteurs invariant :

$$dp(\text{Ad}(x)X) = \text{Ad}(x) dp(X) \quad (x \in G, X \in \underline{\mathfrak{g}})$$

1.4. Soit \tilde{G} le groupe adjoint de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Sa représentation adjointe (dans $\tilde{\mathfrak{g}}$) est déterminée par les formules :

$$\text{Ad}(\exp(0, Z))(X_0, X_1) = (\text{Ad}(\exp Z)X_0, \text{Ad}(\exp Z)X_1)$$

$$\text{Ad}(\exp(Z, 0))(X_0, X_1) = (X_0 + [Z, X_1], X_1)$$

Soit p une fonction polynomiale G -invariante sur $\underline{\mathfrak{g}}$. On pose :

$$P(X_0, X_1) = p(X_1) \quad (X_0 \text{ et } X_1 \text{ dans } \underline{\mathfrak{g}})$$

$$Q(X_0, X_1) = B(X_0, dp(X_1))$$

Ceci définit deux fonctions polynomiales P et Q sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, et ces deux fonctions sont \tilde{G} -invariantes. De plus, si p_1, \dots, p_r sont des fonctions polynomiales G -invariantes et algébriquement indépendantes sur $\underline{\mathfrak{g}}$, alors les fonctions sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui leur sont associées comme ci-dessus, à savoir $P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r$ sont elles-mêmes algébriquement indépendantes (voir par exemple ([Sa], 9.5), et le lemme suivant).

1.5. Lemme : Soit (X_0, X_1) un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

$$(i) \quad dP(X_0, X_1) = (dp(X_1), 0)$$

$$dQ(X_0, X_1) = (d^2 p(X_1) \cdot X_0, dp(X_1))$$

(ii) Soient p_1, \dots, p_r des fonctions polynômes G -invariantes sur $\underline{\mathfrak{g}}$,

et $P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r$, les fonctions \tilde{G} -invariantes sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui leur sont associées. Alors $dp_1(x_1), \dots, dp_r(x_1)$ sont des éléments linéairement indépendants de \mathfrak{g} ssi $dp_1(x_0, x_1), dq_1(x_0, x_1), \dots, dp_r(x_0, x_1), dq_r(x_0, x_1)$ sont des éléments linéairement indépendants de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Démonstration : (i) $\tilde{B}(dP(x_0, x_1), (Y_0, Y_1)) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 P(x_0 + tY_0, x_1 + tY_1)$
 $= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 p(x_1 + tY_1) = B(dp(x_1), Y_1) = \tilde{B}((dp(x_1), 0), (Y_0, Y_1))$

de même :

$$\begin{aligned} \tilde{B}(dQ(x_0, x_1), (Y_0, Y_1)) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 B(x_0 + tY_0, dp(x_1 + tY_1)) \\ &= B(Y_0, dp(x_1)) + B(x_0, d^2 p(x_1) \cdot Y_1) \\ &= B(Y_0, dp(x_1)) + B(d^2 p(x_1) \cdot x_0, Y_1) \end{aligned}$$

par la symétrie de la dérivée seconde de p . D'où :

$$\tilde{B}(dQ(x_0, x_1), (Y_0, Y_1)) = \tilde{B}((d^2 p(x_1) \cdot x_0, dp(x_1)), (Y_0, Y_1))$$

(ii) est évident, compte-tenu de (i)

1.6. Pour une algèbre de Lie quadratique \mathfrak{g} , les représentations adjointe et coadjointe sont équivalentes. On peut parler d'éléments réguliers de l'algèbre de Lie : par définition, un élément X de \mathfrak{g} sera dit régulier si la forme linéaire $Y \rightarrow B(Y, X)$ qu'il définit sur \mathfrak{g} est régulière au sens habituel ([D] 1.11.6), ou ce qui revient au même, si son centralisateur $Z(X; \mathfrak{g})$ dans \mathfrak{g} est de dimension minimale. Ceci étant, il est facile de voir que si x_1 est un élément régulier de \mathfrak{g} , alors (x_0, x_1) est un élément régulier de $\tilde{\mathfrak{g}}$, quel que soit x_0 dans \mathfrak{g} ([Sa], 8.4.).

2. PROPRIETES DES ALGEBRES DE TAKIFF

2.1. A partir de maintenant, on commence à étudier les propriétés moins superficielles des algèbres de Takiff complexes. On suppose donc \underline{g} réductive complexe et pour fixer les idées que la restriction de B à $[\underline{g}, \underline{g}] \times [\underline{g}, \underline{g}]$ est la forme de Killing de l'algèbre semi-simple $[\underline{g}, \underline{g}]$. On utilisera les résultats de Kostant ([K]). Soit (X_1, Y_1, H_1) un $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet principal de \underline{g} . On notera \underline{t} la transversale de Kostant associée à cette donnée, à savoir :

$$\underline{t} = X_1 + \underline{Z}(Y_1; \underline{g})$$

Il est possible de trouver une base (u_1, \dots, u_r) de $\underline{Z}(Y_1; \underline{g})$ (r est le rang de \underline{g}) et un système p_1, \dots, p_r de fonctions polynomiales homogènes et G -invariantes sur \underline{g} tels que :

(i) (p_1, \dots, p_r) est un système de générateurs (algébriquement indépendants) de l'algèbre $P(\underline{g})^G$ des fonctions polynomiales G -invariantes sur \underline{g} .

(ii) Pour $1 \leq i \leq r$ et tout (z_1, \dots, z_r) dans \mathbb{C}^r , on a :

$$p_i \left(X_1 + \sum_k z_k u_k \right) = z_i \quad (2;1)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} B(dp_i(X_1 + \sum_k z_k u_k), u_j) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_0 p_i(X_1 + \sum_k z_k u_k + tu_j) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \delta_j^i (z_i + tu_i) \end{aligned}$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker. Ainsi ; pour tout A dans \underline{t}

$$B(dp_i(A), u_j) = \delta_j^i \quad (2;2)$$

Soit $\Omega = G(\underline{t})$ la réunion des G -orbites qui rencontrent \underline{t} ; c'est un ouvert G -invariant, constitué d'éléments réguliers de \mathfrak{g} , dense dans \mathfrak{g} (pour la topologie numérique), qui est aussi l'ensemble des X dans \mathfrak{g} tels que $dp_1(X), \dots, dp_r(X)$ soit linéairement indépendants. Alors, pour chaque X dans Ω , l'orbite $G.X$ de X sous G rencontre \underline{t} en un point et un seul, à savoir :

$$X_1 + \sum_k p_k(X) u_k$$

Notons enfin la propriété de transversalité (aux orbites) de \underline{t} : pour chaque Y dans \underline{t} , on a $\mathfrak{g} = \underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) \oplus [Y, \mathfrak{g}]$. On a en effet :

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) + \dim [Y, \mathfrak{g}]$$

car Y est régulier. Il suffit donc de montrer que :

$$\underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) \cap [Y, \mathfrak{g}] = \{0\}$$

Soit $X = \sum \alpha_k u_k$ un élément de $\underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) \cap [Y, \mathfrak{g}]$. Alors X est orthogonal (relativement à B) à $\underline{Z}(Y; \mathfrak{g})$, qui contient les $dp_i(Y)$ ($1 \leq i \leq r$). Donc (pour $1 \leq i \leq r$) (avec l'aide de (2;2)) :

$$0 = B(dp_i(Y), \sum \alpha_k u_k) = \sum_k \delta_i^k \alpha_k = \alpha_i$$

d'où le résultat.

2.2. On va transférer ces propriétés de \mathfrak{g} à $\tilde{\mathfrak{g}}$. On utilisera les notations suivantes : $\tilde{X} = (0, X_1)$, $\tilde{Y} = (0, Y_1)$, $\tilde{H} = (0, H_1)$, $\tilde{t} = \tilde{X} + \underline{Z}(\tilde{Y}; \tilde{\mathfrak{g}})$ et $\tilde{\Omega} = \mathfrak{g} \times \Omega$. Alors $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{H})$ est un $\underline{\mathfrak{sl}}(2)$ -triplet de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et $\tilde{\Omega}$ est un ouvert \tilde{G} -invariant, constitué d'éléments réguliers de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et dense dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. Les éléments \tilde{X} et \tilde{Y} sont des éléments nilpotents réguliers de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Par

ailleurs :

$$\underline{Z}(\tilde{Y}; \tilde{\mathfrak{g}}) = \underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) \times \underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g})$$

de sorte que $\underline{Z}(\tilde{Y}; \tilde{\mathfrak{g}})$ admet comme base les $2r$ éléments : $(u_1, 0), \dots, (u_r, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_r)$, et $\underline{\mathfrak{t}} = \underline{Z}(Y_1; \mathfrak{g}) \times \underline{\mathfrak{t}}$.

Soient maintenant $P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r$ les fonctions \tilde{G} -invariantes sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, associées à p_1, \dots, p_r , comme expliqué dans 1.4.

2.3. LEMME : (i) Pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$P_i \left(\left(\sum_k \zeta_k u_k, x_1 + \sum_k z_k u_k \right) \right) = z_i \quad (2;3)$$

$$Q_i \left(\left(\sum_k \zeta_k u_k, x_1 + \sum_k z_k u_k \right) \right) = \zeta_i$$

(ii) Soit (z_0, z_1) dans $\tilde{\Omega}$. L'orbite de (z_0, z_1) sous \tilde{G} rencontre $\underline{\mathfrak{t}}$ en un point et un seul, à savoir :

$$\left(\sum_k Q_k(z_0, z_1) u_k, x_1 + \sum_k P_k(z_0, z_1) u_k \right)$$

DEMONSTRATION : (i) Par définition des P_i et Q_i , on a :

$$P_i \left(\left(\sum_k \zeta_k u_k, x_1 + \sum_k z_k u_k \right) \right) = p_i(x_1 + \sum_k z_k u_k) = z_i$$

d'après la formule (2;1), et :

$$Q_i \left(\left(\sum_k \zeta_k u_k, x_1 + \sum_k z_k u_k \right) \right) = B \left(\sum_k \zeta_k u_k, dp_i(x_1 + \sum_k z_k u_k) \right) = \zeta_i$$

d'après la formule (2;2)

(ii) Par définition de Ω , il existe x dans G tel que $Ad(x)Z_1 \in \underline{\mathfrak{t}}$. On

peut donc supposer que Z_1 appartient à \underline{t} . D'après la propriété de transversalité de \underline{t} , on a :

$$\underline{g} = \underline{Z}(Y_1; \underline{g}) \oplus [Z_1, \underline{g}]$$

et il existe x' dans \underline{g} tel que $Z_0 + [x', Z_1] \in \underline{Z}(Y_1; \underline{g})$. Donc :

$$\text{Ad}(\exp(x', 0))(Z_0, Z_1) = (Z_0 + [x', Z_1], Z_1)$$

appartient à $\underline{Z}(Y_0) \times \underline{t} = \tilde{\underline{t}}$. Donc l'orbite de (Z_0, Z_1) rencontre $\tilde{\underline{t}}$. Si

$(\sum \zeta_k u_k, X_1 + \sum z_k u_k)$ est un point de cette orbite, on a d'après la première partie du lemme :

$$z_i = P_i(Z_0, Z_1), \quad \zeta_i = Q_i(Z_0, Z_1) \quad (1 \leq i \leq r)$$

D'où le résultat.

2.4. COROLLAIRE : $(P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r)$ est un système de générateurs de $P(\tilde{\underline{g}})^{\tilde{G}}$.

DEMONSTRATION : Soit f une fonction polynomiale \tilde{G} -invariante sur $\tilde{\underline{g}}$.

Pour (Z_0, Z_1) dans $\tilde{\underline{g}}$, on pose :

$$f'((Z_0, Z_1)) = f((\sum Q_k(Z_0, Z_1) u_k, X_1 + \sum P_k(Z_0, Z_1) u_k))$$

Alors f' est une fonction \tilde{G} -invariante, et par sa définition même, a même restriction à $\tilde{\underline{t}}$ que f . Les deux fonctions f et f' sont donc égales dans $\tilde{\Omega}$, donc égales partout. Donc f appartient à la sous-algèbre de $P(\tilde{\underline{g}})^{\tilde{G}}$ engendrée par $P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r$.

2.5. LEMME : Soit A un élément de $\tilde{\underline{t}}$. Alors :

$$\begin{aligned}\tilde{B}(dP_i(A), (u_j, 0)) &= 0 \\ \tilde{B}(dP_i(A), (0, u_j)) &= \delta_j^i \\ \tilde{B}(dQ_i(A), (0, u_j)) &= 0 \\ \tilde{B}(dQ_i(A), (u_j, 0)) &= \delta_j^i.\end{aligned}$$

DEMONSTRATION : Soit $A = (A_0, A_1)$. Alors (formules du lemme 1.5) :

$$\begin{aligned}dP_i(A) &= (dp_i(A_1), 0) \\ \tilde{B}(dP_i(A), (u_j, 0)) &= 0 \quad (\text{par définition de } \tilde{B}) \\ \tilde{B}(dP_i(A), (0, u_j)) &= B(dp_i(A_1), u_j) = \delta_j^i\end{aligned}$$

d'après (2;2). De même :

$$\begin{aligned}dQ_i(A) &= (d^2p_i(A_1) \cdot A_0, dp_i(A_1)) \\ \tilde{B}(dQ_i(A), (u_j, 0)) &= B(dp_i(A), u_j) = \delta_j^i \\ \tilde{B}(dQ_i(A), (0, u_j)) &= B(d^2p_i(A_1) \cdot A_0, u_j) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 B(dp_i(A_1 + tA_0), u_j)\end{aligned}$$

Or $A_1 + tA_0$ appartient à \underline{t} , puisque $A_1 \in X_1 + \underline{Z}(Y_1; \underline{q})$ et $A_0 \in \underline{Z}(Y_1; \underline{q})$.

Donc $B(dp_i(A_1 + tA_0), u_j) = \delta_j^i$. D'où le résultat.

2.6. Comme dans 2.1., on en déduit la transversalité de $\tilde{\underline{t}}$:

$$\tilde{\underline{q}} = \underline{Z}(\tilde{Y}; \tilde{\underline{q}}) \oplus [A, \tilde{\underline{q}}]$$

pour tout A dans $\tilde{\underline{t}}$. Enfin, compte-tenu du lemme 1.5, on voit que l'ouvert $\tilde{\Omega}$

est aussi l'ensemble des points (X_0, X_1) de $\tilde{\underline{q}}$ tels que

$dP_1(X_0, X_1), \dots, dP_r(X_0, X_1), dQ_1(X_0, X_1), \dots, dQ_r(X_0, X_1)$ soient linéairement indépendants.

Ceci termine la démonstration du transfert à $\tilde{\mathfrak{g}}$ des propriétés de \mathfrak{g} .
 Par itération du procédé de construction de Takiff, on en déduit que ces propriétés sont valables pour toutes les algèbres de Takiff.

2.8. J'ignore si un élément (x_0, x_1) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est régulier si et seulement si x_1 est un élément régulier de \mathfrak{g} . Pour le transfert à $\tilde{\mathfrak{g}}$ des propriétés des sous-algèbres de Cartan (en particulier de la possibilité d'obtenir une décomposition triangulaire), on pourra consulter [Sa].

3. FONCTIONS INVARIANTES SUR UNE ALGÈBRE DE TAKIFF

3.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Takiff. Conformément à ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, on peut fixer dans \mathfrak{g} deux éléments nilpotents réguliers x_1 et y_1 de telle sorte que le sous-espace affine :

$$\underline{t} = x_1 + \underline{Z}(y_1; \mathfrak{g})$$

rencontre chacune des G -orbites d'un ouvert (invariant et dense) Ω , en un point et un seul. De plus, on peut trouver une base (u_1, \dots, u_r) de $\underline{Z}(y_1; \mathfrak{g})$ (r est le rang de \mathfrak{g}) et un système (p_1, \dots, p_r) de générateurs homogènes algébriquement indépendants de $P(\mathfrak{g})^G$ tels que :

$$p_i(x_1 + \sum_k z_k u_k) = z_i \quad (1 \leq i \leq r), (z \in \mathbb{C}^r).$$

On peut introduire l'application $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^r$, dont les composantes sont p_1, \dots, p_r ; cette application admet une section $s : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathfrak{g}$, définie par $s(z) = x_1 + \sum_k z_k u_k$, dont l'image est la transversale \underline{t} . Le théorème des invariants polynomiaux de Takiff (corollaire 2.4. ci-dessus) peut s'énoncer de la manière suivante : si $f \in P(\mathfrak{g})^G$, il existe une et une seule fonction

polynôme f_0 sur \mathbb{C}^r telle que $f = f_0 \circ p$; autrement dit l'application $p^* : P(\mathbb{C}^r) \rightarrow P(\mathfrak{g})^G$, ($p^*(f_0) = f_0 \circ p$), est un isomorphisme d'algèbres.

3.2. On peut maintenant s'intéresser à divers types de fonctions invariantes sur \mathfrak{g} , en particulier les fonctions polynomiales, ou de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$), ou analytiques sur l'espace vectoriel (réel) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ obtenu par restriction des scalaires (bien évidemment, G est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, qui s'identifie au groupe adjoint de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$). L'ensemble $G(\mathfrak{t})$ est un ouvert dense, constitué d'éléments réguliers, et pour X dans Ω , on a :

$$\mathfrak{t} \cap G.X = \{X_1 + \sum_k p_k(X) u_k\}$$

Si f est une fonction polynomiale (resp. de classe C^k , $0 \leq k \leq \omega$), la fonction f_0 définie sur \mathbb{C}^r au moyen de : $f_0(z) = f(s(z))$ est polynomiale (resp. de classe C^k). On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est exactement celle de 2.4.

PROPOSITION : L'application p^* est un isomorphisme de l'algèbre des fonctions polynomiales (pour la structure réelle de \mathbb{C}^r) (resp. des fonctions analytiques ; des fonctions de classe C^k) sur l'algèbre $P(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^G$ (resp. l'algèbre des fonctions analytiques G -invariantes sur \mathfrak{g} ; l'algèbre des fonctions G -invariantes de classe C^k sur \mathfrak{g})

On peut évidemment exprimer ces résultats en introduisant les parties réelles et imaginaires des polynômes "holomorphes" p_k ($1 \leq k \leq r$) :

$$q_k = \frac{1}{2} (p_k + \bar{p}_k) \quad q_{k+r} = \frac{1}{2i} (p_k - \bar{p}_k)$$

et l'application polynomiale $q : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$, $q = (q_1, \dots, q_{2r})$. Par exemple,

le théorème des invariants polynomiaux s'écrit sous la forme :

$$P(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^G \simeq \mathbb{R}[q_1, \dots, q_{2r}] .$$

4. CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS SUR UNE ALGÈBRE DE TAKIFF

4.1. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et G son groupe adjoint. Par définition un champ de vecteurs invariant est une application $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ qui est G -invariante, c'est-à-dire telle que (pour tous x dans G et X dans \mathfrak{g}) :

$$L(\text{Ad}(x)X) = \text{Ad}(x) L(X) \quad (4;1)$$

On désigne par $\chi(\mathfrak{g})$ (resp. $\chi^h(\mathfrak{g})$, $\chi^a(\mathfrak{g})$, $\chi^k(\mathfrak{g})$) l'ensemble des champs de vecteurs invariants polynomiaux (resp. holomorphes, analytiques, de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$)) (cela sous-entend que \mathfrak{g} est soit réelle, soit complexe).

4.2. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Takiff. On fixe une forme bilinéaire symétrique B sur \mathfrak{g} , invariante et non dégénérée. A un champ de vecteurs invariant $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, on associe la fonction $F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$F(X, Y) = B(X, L(Y)) \quad (X \text{ et } Y \text{ dans } \mathfrak{g})$$

Les propriétés utiles de F sont les suivantes :

- (i) Elle est linéaire par rapport à X
- (ii) $F(\text{Ad}(x)X, \text{Ad}(x)Y) = F(X, Y)$ pour tout x dans G .
- (iii) $F((X+[Z, \mathfrak{g}], Y) = F(X, Y)$ pour tout Z sans que $[Z, Y] = 0$.

Cette dernière propriété se démontre comme suit (où Z' parcourt \mathfrak{g}) :

$$\begin{aligned} F(X+[Z, Z'], Y) &= F(X, Y) + B([Z, Z'], Y) \\ &= F(X, Y) - B(Z', [Z, L(Y)]) \end{aligned}$$

Comme L est invariant, on a (pour tout réel t) (en appliquant (4;1))

$$L(Y) = \text{Ad}(\exp tZ) L(Y) = L(Y) + t[Z, L(Y)] + \sum_{k \geq 2} \frac{t^k}{k!} (\text{ad } Z)^k L(Y)$$

d'où $[Z, L(Y)] = 0$ et :

$$F(X + [Z, Z'], Y) = F(X, Y)$$

On est amené à considérer l'algèbre de Takiff $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_{\text{ad}} \mathfrak{g}$. Il apparaît alors que la fonction F est \tilde{G} -invariante sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ (d'après les formules donnant la représentation adjointe de \tilde{G} (1.4)).

4.3. On reprend les notations du paragraphe 2. On calcule la restriction de F à $\tilde{\mathfrak{t}}$. On a :

$$F(\sum \zeta_k u_k, X_1 + \sum z_k u_k) = \sum_{\ell} \zeta_{\ell} F(u_{\ell}, X_1 + \sum z_k u_k)$$

Comme F est \tilde{G} -invariante, on a pour tous X et Y dans \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= \sum_{\ell} Q_{\ell}(X, Y) F(u_{\ell}, X_1 + \sum_k P_k(X, Y) u_k) \\ &= \sum_{\ell} B(X, dp_{\ell}(Y)) F(u_{\ell}, X_1 + \sum_k P_k(Y) u_k) \end{aligned}$$

Donc :

$$L(Y) = \sum_{\ell} \phi_{\ell}(Y) dp_{\ell}(Y) \quad (4;2)$$

avec :

$$\phi_{\ell}(Y) = F(u_{\ell}, X_1 + \sum_k P_k(Y) u_k) \quad (1 \leq \ell \leq r)$$

Ceci étant, il est clair que si L est polynomial (resp. holomorphe, analytique, de classe C^k), il en est de même de F et par suite aussi des "coefficients"

ϕ_ℓ ($1 \leq \ell \leq r$). Comme les éléments $dp_1(Y), \dots, dp_r(Y)$ de \underline{g} sont linéairement indépendants chaque fois que Y est dans $\Omega = G(\underline{t})$, on voit qu'une égalité $\sum_{\ell} \phi_\ell dp_\ell = 0$, où les coefficients ϕ_ℓ sont des fonctions continues, ne peut être réalisée que si tous les ϕ_ℓ sont nuls. Ainsi $\chi(\underline{g})$ est un module libre de rang r sur $P(\underline{g})^G$ et (dp_1, \dots, dp_r) en est une base. De même pour $\chi^h(\underline{g})$, considéré comme module sur l'algèbre des fonctions holomorphes G -invariantes. Pour traiter le cas de $\underline{g}_{\mathbb{R}}$, on reprend la formule (4;2), en introduisant les parties réelles et imaginaires des fonctions

ϕ_ℓ ($\phi_\ell = \Phi_\ell + i\psi_\ell$) ($1 \leq \ell \leq r$) :

$$L = \sum_{\ell} \Phi_\ell dp_\ell + \sum_{\ell} \psi_\ell (idp_\ell)$$

Donc $\chi(\underline{g}_{\mathbb{R}})$ est un $P(\underline{g}_{\mathbb{R}})^G$ -module libre de rang $2r$ et $(dp_1, \dots, dp_r, idp_1, \dots, idp_r)$ en est une base. On a évidemment des énoncés analogues pour $\chi^a(\underline{g}_{\mathbb{R}})$ et $\chi^k(\underline{g}_{\mathbb{R}})$ ($0 \leq k \leq \infty$)

4.4. Posons $B_{\mathbb{R}}(X, Y) = 2 \operatorname{Re} B(X, Y)$ pour tous X et Y dans \underline{g} , et (comme dans 3.2) $p_k = q_k + iq_{k+r}$ ($1 \leq k \leq r$). Les gradients des fonctions q_k , calculés au moyen de $B_{\mathbb{R}}$, sont :

$$dq_k = \frac{1}{2} dp_k, \quad dq_{k+r} = \frac{1}{2i} dp_k \quad (1 \leq k \leq r)$$

on peut donc remplacer, dans ce qui a été énoncé ci-dessus, le système de générateurs de module $(dp_1, \dots, dp_r, idp_1, \dots, idp_r)$ par (dq_1, \dots, dq_{2r}) .

4.6. Soit L un champ de vecteurs invariant sur \underline{g} (ou sur $\underline{g}_{\mathbb{R}}$) ; considéré comme opérateur différentiel, il opère dans l'algèbre des fonctions invariantes correspondante (l'algèbre des fonctions invariantes polynomiales si L est polynomial, celle des fonctions invariantes C^∞ si L est C^∞ , etc...).

D'où une opération composante radiale θ (voir [Ra] , 2.1) qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Par exemple :

$$\theta : \chi(\underline{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}}(P(\underline{\mathfrak{g}})^G)$$

$$\theta : \chi(\underline{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(P(\underline{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})^G)$$

$$\theta : \chi^{\infty}(\underline{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(\underline{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})^G)$$

Il est facile de démontrer qu'une telle application θ est injective. Dans le cas où $\underline{\mathfrak{g}}$ est réductive (complexe), l'algèbre de Lie $\theta(\chi(\underline{\mathfrak{g}}))$ a été caractérisée par le théorème de Schwarz ([Sch]) comme étant l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\underline{\mathfrak{t}}$ qui sont tangents à l'ensemble "discriminant" de $\underline{\mathfrak{g}}$ (voir aussi [Se]). Il serait intéressant d'avoir une caractérisation du même type pour les images des différentes applications θ .

BIBLIOGRAPHIE

- [D] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [K] B. KOSTANT, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., 85, 1963, 327-404.
- [Ra] M. RAIS, *Champs de vecteurs invariants sur une algèbre de Lie réductive complexe*, à paraître.
- [Sa] S. SAAD, *Représentation coadjointe et idéaux primitifs pour une classe d'algèbres de Lie*, Thèse, Université de Poitiers, 1978.
- [Sch] G.W. SCHWARZ, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, IHES, Publications mathématiques, 51, 37-135.
- [Se] J. SEKIGUCHI, *Invariant vector fields on a simple Lie algebra under the adjoint action*, J. Math. Soc. Japan, 36, n° 1, 1984, 147-159.
- [So] L. SOLOMON, *Invariants of reflexion groups*, Nagoya Math. J., 22, 1963, 57-64.
- [Ta] S.J. TAKIFF, *Rings of invariant polynomials for a class of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 160, 1971, 249-262.