PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALEXIS MARIN

Les arbres de Shub-Smale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 4B
, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___4B_1_0>

LES ARBRES DE SHUB-SMALE

par **Alexis Marin**

*

En calculant des valeurs approchées des racines d'un polynôme d'une variable complexe, Shub et Smale ont associé à chaque polynôme p un arbre Γ_p plongé dans $\mathbb{C}$. Smale a alors demandé quels arbres aplatis pouvaient s'obtenir ainsi. Cet exposé répond à cette question ; il apparaîtra que les arbres de Shub-Smale permettent de paramétrer les polynômes par leurs valeurs critiques.

I. COMMENT SHUB ET SMALE ONT INTRODUIT LEURS ARBRES ; UNE INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA METHODE DE NEWTON.

Pour approcher une racine d'un polynôme p Newton itère l'application $N(v) = v - \frac{p(v)}{p'(v)}$ à partir d'un point v_o . Si la valeur initiale v_o est proche d'une racine w la suite $v_n = N^n(v_o)$ converge quadratiquement vers w ($|v_{n+1}-w| \leqslant A|v_n-w|^2$ et donc $|v_n-w| \leqslant (A|v_o-w|)^{2^n-1}|v_o-w|$).

Si v_i est éloigné des racines, la suite de Newton v_n peut avoir un comportement chaotique et l'on cherche, en modifiant la méthode de Newton, à obtenir, quitte à perdre en vitesse, une méthode itérative ayant une meilleure convergence globale.

L'idée essentielle des travaux de Shub et Smale est de considérer le champ de vecteur $n(v) = \frac{p(v)}{p'(v)}$, l'application de Newton s'interprète alors comme l'itération d'Euler avec le pas 1 pour résoudre l'équation différentielle :

$$v' = -n(v) \tag{1}$$

Comme $p'(v)n(v) = p(v)$ les courbes intégrales de (1) sont envoyées par p sur les rayons issus de 0, le feuilletage orienté (par n) $\mathcal{F}_p$ que ces courbes définissent, est donc la préimage par p du feuilletage par les rayons issus de 0 dans le but. Remarquons aussi que n(v) est positivement colinéaire à $v(v) = \overline{2p'(v)}p(v)$, le gradient de $|p|$, et donc, suivre les courbes intégrales de (1), revient à minimiser $|p|$ en descendant les lignes de gradient.

Les algorithmes que Shub et Smale proposent consistent à chercher à coller de plus près aux feuilles de $\mathcal{F}_p$: une étude de la géométrie de $\mathcal{F}_p$ est donc nécessaire.

Les singularités de $\mathcal{F}_p$ sont des sources aux racines de p et des selles (éventuellement multiples) aux points critiques non racines. La réunion des séparatrices aboutissant à de tels points critiques est un graphe sur lequel $\mathbb{C}$ se rétracte (en remontant les feuilles de $\mathcal{F}_p$) c'est donc un arbre, la classe d'isotopie de cet arbre dans $\mathbb{C}$ est **l'arbre de Shub-Smale** Γ_p de p. On note Γ_p^+ l'union de Γ_p et des séparatrices partant des points critiques, Γ_p^+ découpe $\mathbb{C}$ en les bassins d'attraction des racines de p : la figure 1 représente $\mathcal{F}_p$, Γ_p, Γ_p^+ pour $p(v) = \frac{1}{2}v^3 - v + 1$.

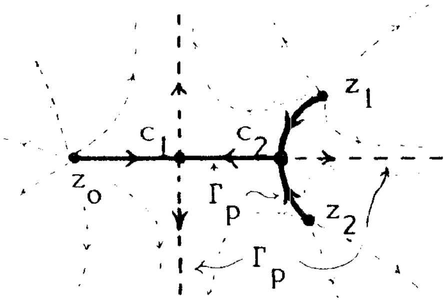


Figure 1

On montre que $\mathcal{F}_p$ est transverse à tout cercle S contenant les racines et que Γ_p^+ coupe S en au plus 2(d-1) points. Si de plus $p(v) = v^d + a_{d-1}v^{d-1} + \ldots + a_0$ avec $|a_i| \leqslant 1$ et $R \geqslant 2$ alors le cercle $S_R = \{|v| = R\}$ contient les racines de p et si v_0 est hors de 2(d-1) intervalles chacun de mesure normalisée $\frac{1}{\pi d}[\theta + 2\mathrm{arc}\ \sin(\frac{1}{R-1})]$ le polynôme p a un inverse sur le secteur $W(p(v_0),\theta) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |\mathrm{Arg}(\frac{p(v_0)}{z})| < \theta\}$.

Lorsqu'une valeur initiale v_0 a un tel secteur de sécurité, une modification de la méthode de Newton permet d'approcher une racine de p en un nombre d'itérations explicitement contrôlé. Comme sur S_R les mauvaises valeurs initiales sont dans une réunion de 2(d-1) intervalles dont on connaît la mesure, un principe des tiroirs permet, en un nombre d'itérations explicitement donné en fonction de R, θ ,d et ε d'obtenir un v_n avec

$|p(v_n)| < \varepsilon$. Pour un exposé plus détaillé des travaux de Shub-Smale voir l'exposé n° 670 du Séminaire Bourbaki.

II. REALISATION DES ARBRES DE SHUB-SMALE.

Smale a demandé : "Quels arbres aplatis s'obtiennent comme arbre de Shub-Smale d'un polynôme de degré d ?"

Pour répondre à cette question il suffit d'extraire les propriétés combinatoires des arbres de Shub-Smale de polynômes réduits de degré d on obtient ainsi la notion **d'arbre de Shub-Smale abstrait** (ou **S-arbre**) de degré d. Correspondant aux valeurs critiques de p on a la notion de **S-arbre coloré**. La réponse à la question de Smale est alors donnée par les deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Tout S -arbre a une coloration admissible.*

Lemme 2. *Soit* (Γ,c) *un S-arbre coloré de degré d, alors il y a un polynôme réduit* $p(v) = v^d + a_{d-2}v^{d-2} + \ldots + a_o$ *avec* $(\Gamma_p,p) = (\Gamma,c)$. *Si* q *est un autre tel polynôme il y a une racine d-ienne de l'unité* ω *telle que* $q(v) = p(\omega v)$.

Définitions. Un **S-arbre** est une classe d'isotopie d'arbres orientés Γ plongés dans $\mathbb{C}$ avec :

(i) $\Gamma^\circ = Z_\Gamma \amalg X_\Gamma$, Z_Γ sont **les zéros de** Γ, X_Γ **les points critiques de** Γ .

(ii) Il n'y a pas d'arête aboutissant à un zéro.

(iii) En tout point critique il y a au moins deux arêtes rentrantes et toute arête sortante est adjacente à deux arêtes rentrantes.

Le degré du S-arbre Γ **est** $\#(Z_\Gamma)$.

Un zéro z de Γ **est voisin d'un point critique** x s'il y a un chemin décroissant dans Γ allant de x à z qui, à chaque point critique rencontré, prend la "première à droite". On note $V_\Gamma(x)$ l'ensemble des zéros voisins de x, le plongement de Γ dans $\mathbb{C}$ muni $V_\Gamma(x)$ **d'un ordre cyclique.**

Une **coloration admissible** d'un S-arbre Γ est $c : X_\Gamma \to \mathbb{C}^*$ telle que :

(iv) Sur l'étoile de tout zéro $\mathrm{Arg} \circ c$ définit le même ordre cyclique que le plongement de Γ dans $\mathbb{C}$.

(v) S'il y a une arête croissante joignant x_1 à x_2 alors $c(x_2) = tc(x_1)$ avec $t > 1$.

(vi) Si $c(x_1) = c(x_2)$ alors soit $x_1 = x_2$, soit $V_\Gamma(x_1) \cap V_\Gamma(x_2) = \emptyset$.

Un S-arbre est dit **générique** si tous ses sommets critiques sont d'ordre 2 et s'il n'y a pas de liaison entre eux. **Une coloration générique** d'un S-arbre générique est une coloration c telle que $\mathrm{Arg}\circ$ est injective.

Remarquons que la donnée d'un S-arbre générique Γ sans son plongement dans $\mathbb{C}$ et $c : X_\Gamma \to \mathbb{C}^*$ avec $\mathrm{Arg}\circ c$ injective permet de définir une unique classe d'isotropie de plongements de Γ dans $\mathbb{C}$ faisant de (Γ, c) un S-arbre coloré.

Il est clair que si p est un polynôme réduit (i.e. sans racines multiples) de degré d alors $Z_{\Gamma_p} = p^{-1}(0)$, $X_{\Gamma_p} = (p')^{-1}(0)$ et $c = p_{|X}$ définit sur Γ_p une structure de S-arbre coloré.

Le lemme 1 est un exercice facile. Pour démontrer le lemme 2 il suffit de remarquer que :

Le S-arbre coloré (Γ_p, p) d'un polynôme réduit p détermine la monodromie de p vu comme revêtement ramifié de $\mathbb{C}$.

Soient en effet $c_1,\dots,c_n$ les valeurs critiques du polynôme réduit p et $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ les lacets de $\mathbb{C} - \{c_1,\dots,c_m\}$ représentés sur la figure 2 et notons

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{c_1,\dots,c_m\}) \to \mathfrak{S}(p^{-1}(0))$$

la monodromie de p. En utilisant, au voisinage de chaque point critique x_j des cartes (à la source et au but) dans lesquelles p s'écrive $v \mapsto v^{m_j}$ $(m_j \geq 2)$, on obtient la décomposition en cycles de $\rho(\gamma_i)$:

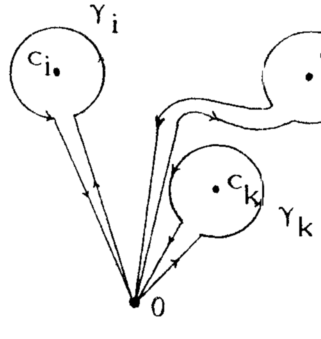


Figure 2

(*) $\rho(\gamma_i) = \prod_{p(x_j)=c_i} V_{\Gamma_p}(x_j)$ (où les zéros voisins de x_j sont rangés dans leur ordre cyclique).

Cette description est donc donnée uniquement en termes du S-arbre coloré (Γ_p,p) et donc pour tout S-arbre coloré (Γ ,c) de degré d on peut considérer la surface de Riemann S munie d'une application méréomorphe $\pi : S \to \mathbb{C} \cup \infty$ ramifiée sur Im(c) $\cup \{\infty\}$ dont la monodromie est décrite par (*) (ou l'on substitue (Γ ,c) à (Γ_p,p)!). Comme en descendant le long des préimages des rayons issus de 0 on rétracte $S - \pi^{-1}(\infty)$ sur un arbre (isomorphe à Γ) la surface S est de genre 0 et $\pi^{-1}(\infty)$ est réduit à un point ∞_S. Le théorème d'uniformisation de Riemann fournit alors un isomorphisme holomorphe $\varphi : (\mathbb{C}, \infty) \to (S, \infty_S)$ et, comme $p = \pi \quad \varphi : \mathbb{C} \cup \infty \hookleftarrow$ vérifie $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, p est un polynôme de degré celui de π, soit $\#(Z_\Gamma) = d$. Le reste du lemme résulte de ce que φ est unique modulo les isomorphismes affines de $\mathbb{C}(v \longmapsto av+b,\ a \neq 0)$.

III. EXERCICES ET PROBLEMES.

Un exercice marqué d'une étoile est un exercice que je ne sais pas résoudre mais qui ne semble pas conduire au démarrage d'une série d'énoncés intéressants comme c'est le cas pour les problèmes (bien sûr je ne sais pas résoudre les problèmes !).

Exercice 1.

a) Soit p un polynôme réduit dont on connaît le graphe coloré ; déterminez le graphe coloré de p+k où $k \in \mathbb{C}$.

b) Déterminez le graphe coloré de $p_t(v) = v^5-5v+4t$ où $t = x+iy \in \mathbb{C}$. [Il change quand t franchit l'une des 12 demi-droites $\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $|t| \geqslant 1$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,0,1\}^2 - \{(0,0)\}$.]

Problème 1.

a) Soient p et q deux polynômes réduits ; déterminez, lorsque les polynômes p+q, p.q et $p \circ q$ sont réduits, leur S-arbre coloré en fonction de ceux de p et de q (i.e. peut-on "calculer" avec la représentation d'un polynôme par, valeurs critiques et monodromie ?)

b) (Cf. Risler, exposé n° 637 du Séminaire Bourbaki). Soit p un polynôme à coefficients réels (respectivement complexes) ; le diamètre combinatoire de Γ_p est-il borné en fonction de la complexité additive de p sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) indépendamment du degré de p ?

Exercice 2.

a) Soit Γ un graphe fini à n sommets $\{1,\dots,n\}$ à chaque arête a de Γ associons la transposition τ_a des extrémités de a. Soit G_Γ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les τ_a. Prouvez que G_Γ agit transitivement sur $\{1,\dots,n\}$ si et seulement si Γ est connexe.

b) Soient $a_1,\dots,a_m$ un ordre sur les arêtes de Γ ; prouvez que si $\tau_{a_1} \circ \dots \circ \tau_{a_m}$ est un cycle d'ordre n alors dim $H_1(\Gamma)$ est pair et que si Γ est un arbre, alors $\tau_{a_1} \circ \dots \circ \tau_{a_m}$ est un cycle d'ordre n.

c) (*) Donnez une démonstration purement combinatoire de b).

d) (*) Faire l'analogue de a), b) et c) correspondant au cas de S-arbres non génériques.

[Pour a) et b) remarquez qu'en groupant les deux arêtes aboutissant à chaque point critique d'un S-arbre générique Γ on obtient un arbre dont les sommets sont Z_Γ et les arêtes X_Γ.]

Exercice 3.

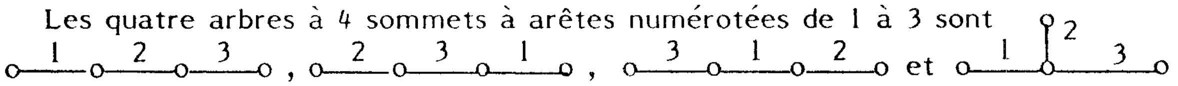
a) Prouvez que le nombre d'arbres à d sommets dont les arêtes sont numérotées de 1 à d-1 est 1 pour d=2 et d^{d-3} pour d > 2.

b) En déduire (grâce au lemme 2) que le degré de l'application qui, à $(a_0,\dots,a_{d-2})$ fait correspondre $(b_0,\dots,b_{d-2})$ où $v^{d-1} + b_{d-2}v^{d-2} + \dots + b_0$ est le polynôme dont les racines sont les valeurs critiques de $v^d + a_{d-2}v^{d-2} + \dots + a_0$ est d^{d-2} .

c) (*) Démontrez b) algébriquement.

Problème 2.

Les quatre arbres à 4 sommets à arêtes numérotées de 1 à 3 sont



Lorsque l'on fixe les valeurs critiques d'un polynôme p un arbre Γ_p linéaire est trois fois plus fréquent qu'un arbre étoilé.

a) Soit $E = \{p(v) = v^4+a_2v^2+a_1v+a_0 \mid |a_i| \leqslant 1$ et $\Gamma_p =$ o—o—o—o$\}$.

Est-ce que la mesure de Lebesgue (sur les coefficients a_i) de E est proche de $3/4\ \pi^3$?

b) Déterminez le nombre d'arbres à d sommets et pour chacun, le nombre d'arbres à arêtes numérotées lui correspondant. Quels sont les S-arbres les plus fréquents ?

(i) quand on fixe les valeurs critiques d'un polynôme.

(ii) quand on borne les coefficients du polynôme.

c) Grâce aux réponses obtenues en b) (ii), donnez une manière intelligente d'appliquer le principe des tiroirs pour trouver toutes les racines d'un polynôme p.

*

Abordant la question de Smale du point de vue "stabilité des systèmes dynamiques définis par une équation differentielle", Shub, Tishler et Williams ont, de manière indépendante, répondu à la question de Smale [The Newtonian Graph of a Complex Polynomial, Soumis à S.I.A.M. J. of Math. Anal.] .