

N. DESOLNEUX-MOULIS

Variables action-angle à singularités d'après Eliasson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 4B
, p. 25-35

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__4B_25_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIABLES ACTION-ANGLE A SINGULARITES
D'APRES ELLIASSON

N. DESOLNEUX-MOULIS

Ceci est l'exposé du schéma de la démonstration du théorème d'Elliasson dans le cas elliptique.

On s'attachera surtout à donner la structure de la démonstration pour les détails des récurrences on renvoie à la thèse d'Elliasson ou à son article à paraître aux Commentarii Helvetici.

Note. Toutes les fonctions considérées par la suite seront supposées de classe C^∞ .

I. Principales définitions et Enoncé du théorème.

Dans toute la suite nous nous plaçons dans un voisinage de 0 de \mathbb{R}^{2n} , U qui sera muni soit de la structure symplectique standard ω_0 , soit d'une autre structure ω (qui sera précisée au cours de la démonstration).

On notera $\{, \}_0$ le crochet de Poisson associé à ω_0 , $\{, \}_\omega$ le crochet de Poisson associé à ω . La structure ω_0 (resp. ω) étant donnée, on considère \langle, \rangle_0 (resp. \langle, \rangle) un produit scalaire compatible, ∇f (resp. $\nabla^\circ f$ le gradient d'une fonction) et J_0 (resp. J) l'opérateur de \mathbb{R}^{2n} tel que $J_0 \nabla^\circ f$ (resp. $J \nabla f$) soit le champ hamiltonien de f pour la structure ω_0 (resp. ω).

ALGÈBRE DE LIE \mathcal{Q} DES FORMES QUADRATIQUES SUR \mathbb{R}^{2n}

Soit \mathcal{Q} l'ensemble des formes quadratiques sur \mathbb{R}^{2n} muni d'un crochet de Poisson $\{, \}$.

Un élément q de Q étant considéré comme une application de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} , on vérifie que le crochet de Poisson $\{, \}$ induit sur Q une structure d'algèbre de Lie. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : Toute sous algèbre de Cartan $\mathcal{H}^{(2)}$ de Q est de dimension n , et il existe dans \mathbb{R}^{2n} un système de coordonnées symplectiques $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tel que : $\mathcal{H}^{(2)}$ admette une base formée d'éléments de l'une des formes suivantes :

$$(1) \quad q_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2)$$

$$(2) \quad q_i = x_i y_i$$

$$(3) \quad q_i = (x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1})$$

$$q_{i+1} = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$

Ces deux derniers types d'éléments (3) se présentent toujours par paires.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

Au lieu d'étudier Q on étudie \mathcal{X} l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens des éléments de Q .

L'algèbre \mathcal{X} est une algèbre de champs linéaires le crochet étant le crochet usuel des champs de vecteurs, une sous algèbre de Cartan \mathcal{C} de \mathcal{X} est donc une sous algèbre maximale de champs hamiltoniens linéaires commutant 2 à 2. La proposition se démontre alors facilement en construisant dans \mathbb{C}^{2n} une base de vecteurs propres pour tous les opérateurs linéaires associés aux éléments de \mathcal{C} .

DEFINITION 1 : Une sous algèbre de Cartan de Q sera dite de type elliptique si elle admet une base formée d'éléments de type (1).

THEOREME : Soient h_1, \dots, h_n n applications de classe C^∞ de U dans \mathbb{R} vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(i) \quad h_i(0) = 0$$

$$(ii) \quad Dh_i(0) = 0$$

$$(iii) \quad \{h_i, h_j\}_0 = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n .$$

(iv) l'algèbre de Lie engendrée par les jets d'ordre 2 en 0 des $h_i (1 \leq i \leq n)$ est de type elliptique.

Alors, il existe U_1 un voisinage de 0 contenu dans U , ϕ un difféomorphisme symplectique de U_1 sur $\phi(U_1)$, et n applications $\psi_i (1 \leq i \leq n)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} tels que

$$\forall i (1 \leq i \leq n) \quad h_i \circ \phi (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \psi_i(q_1 \dots q_n)$$

$$\text{où } q_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2)$$

NOTATION : Dans toute la suite si h est une application de U des \mathbb{R} , on notera $h^{(2)}$ le jet d'ordre 2 de h en 0.

REMARQUE. Dans sa thèse Eliasson a démontré un théorème analogue, dans le cas où l'algèbre de Lie engendrée par les $h_i^{(2)}$ est de dimension n mais de type non elliptique.

Dans toute la suite, on notera \mathcal{H} (respectivement $\mathcal{H}^{(2)}$) l'algèbre de Lie (commutative) engendrée par h_1, \dots, h_n (respectivement $h_1^{(2)}, \dots, h_n^{(2)}$).

II. Définition du lieu singulier et propriétés.

DEFINITION 2 :

Le lieu singulier S (resp. $S^{(2)}$) de \mathcal{H} (resp. $\mathcal{H}^{(2)}$) est :

$$S = \{ z ; z \in U, \text{rang} (Dh_1(z), \dots, Dh_n(z)) < n \}$$

$$S^{(2)} = \{ z ; z \in U ; \text{rang} (Dh_1^{(2)}(z), \dots, Dh_n^{(2)}(z)) < n \}$$

on pose :

$$S_r = \{ z ; z \in U \text{ rang} (Dh_1(z), \dots, Dh_n(z)) \leq r \}$$

$$S_r^{(2)} = \{ z ; z \in U \text{ rang} (Dh_1^{(2)}(z), \dots, Dh_n^{(2)}(z)) \leq r \}$$

REMARQUE.

- La notion qui sera utilisée dans la suite est celle de germe en 0 de lieu singulier. Par abus de langage on raisonnera toujours sur le lieu singulier.

$$- S_r \subset S_{r+1} \quad \text{et} \quad S_r^{(2)} \subset S_{r+1}^{(2)}$$

$$S_0^{(2)} = \{0\}$$

$$S_1^{(2)} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i \quad E_i = \left\{ z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) ; \right. \\ \left. \begin{array}{l} x_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \\ y_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \end{array} \right\}$$

$$S_2^{(2)} = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (E_i + E_j)$$

On définit ainsi par récurrence l'espace $S_{h+1}^{(2)}$ comme réunion des sous-espaces engendrés par :

un sous espace $E \subset S_r^{(2)}$ et un sous-espace E_i .

Le but de la première partie de la démonstration du théorème est de montrer que S_r est une réunion de graphes au-dessus des sous-espaces contenus dans $S_r^{(2)}$ (pour $1 \leq r < n$) et qu'il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(S_r) = S_r^{(2)}$ (pour $1 \leq r < n$).

QUELQUES LEMMES SUR LES SINGULARITES.

LEMME 1 : Soient X_1, \dots, X_n n champs de vecteurs définis sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{2n} tels que

- (i) le jet d'ordre 1 de X_j en 0 est ∇q_j
- (ii) $\text{rang} (X_1, \dots, X_n) \leq r$ sur S_r

Soit Z un champ de vecteurs tel que :

- (iii) $\text{rang} (Z, X_1, \dots, X_n) \leq n$ partout
- (iv) $\text{rang} (Z, X_1, \dots, X_n) \leq r$ sur $S_r^{(2)}$

Alors il existe n fonctions $\xi_1 \dots \xi_n$ de classe C^∞ sur un voisinage de 0 telles que $Z(z) = \sum_n \xi_i(z) X_i(z)$.

DEMONSTRATION.

De l'hypothèse (i) sur $X_1 \dots X_n$ on déduit que $X_1 \dots X_n$ sont indépendants sur un ouvert dense de U (le complémentaire de $S^{(2)}$). Le seul problème est donc la continuité et la différentiabilité des fonctions ξ_j sur $S^{(2)}$.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de vecteurs et la dimension des strates du lieu singulier en appliquant les 2 lemmes (très simples) suivants :

LEMME 2 :

Soit f une application de classe C^∞ de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} telle que $f|_{E_1} = 0$
Alors il existe g_1 et h_1 2 applications de classe C^∞ telles que
 $f = x_1 g_1 + y_1 h_1$.

LEMME 3 :

Soient V_i ($1 \leq i \leq m$) m sous-espaces contenus dans $S_2^{(2)}$
 f_i ($1 \leq i \leq n$) m applications de V_i dans \mathbb{R} .
On suppose que $f_i = f_j$ sur $V_i \cap V_j$.
Alors il existe f de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} telle que $f|_{V_i} = f_i$.

III. Démonstration du théorème

Elle se fait en 3 étapes.

A) CONSTRUCTION D'UN DIFFÉOMORPHISME ϕ TEL QUE $\phi(S) = S^{(2)}$

On construit le difféomorphisme ϕ par induction sur la dimension des strates en faisant l'hypothèse de récurrence suivante :

Hypothèse de récurrence : R_{k-1}

Pour tout i ($1 \leq i < k$) soit (h_1, \dots, h_i) une famille d'applications d'un voisinage de 0 de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iii), du théorème et l'hypothèse (iv)' : l'algèbre de Lie engendrée par $h_1^{(2)}, \dots, h_i^{(2)}$ est de type elliptique de dimension i . Alors il existe un difféomorphisme ϕ_i d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{2n} tel que $\phi_i(S_i) = S_i^{(2)}$.

(Dans cet énoncé S_i est le lieu singulier de la famille engendrée par h_1, \dots, h_i).

Si $k = 1$ R_0 est toujours vérifiée car $S_0 = 1$ point.

Supposons R_{k-1} vérifiée on démontre R_k en appliquant le lemme suivant (lemme 4) successivement à tous les sous-espaces contenues dans $S_k^{(2)}$ pour la structure symplectique $\phi_{k-1}^*(\omega_0)$ et les fonctions $h_1 \circ \phi_{k-1}, \dots, h_k \circ \phi_{k-1}$.

LEMME 4 :

Soit h_1, \dots, h_k k applications de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iii), (iv)'. Soit \mathcal{H}_k l'algèbre engendrée par $h_1 \dots h_k$. On suppose que $S_{k-1} = S_{k-1}^{(2)}$.

Soit E un sous-espace symplectique de dimension $2(k-1)$ contenu dans S_{k-1} .

Soit h un élément de \mathcal{H}_k vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $h^{(2)}/E = 0$

(ii) $h^{(2)}/E^\perp$ est une forme quadratique non singulière..

(iii) $\mathcal{H}^{(2)}/E$ est une sous-algèbre de cartan de dimension $2(k-1)$ de Q/E .

Alors il existe une unique sous-variété N de \mathbb{R}^{2k} tangente à E en 0 sur laquelle le rang de Dh_1, \dots, Dh_k est inférieur à k .

En outre si h' est une autre application de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} telle que $\{h', h_i\} = 0$ pour $1 \leq i \leq k$.

Alors le rang de Dh_1, \dots, Dh_k, Dh' est inférieur à k sur N .

Principe de la démonstration du lemme 4 :

Sans rien changer à la généralité du problème, on peut supposer que $h_1^{(2)}/E, \dots, h_{k-1}^{(2)}/E$ engendrent $\mathcal{H}^{(2)}/E$ et que $h_k = h$.

Pour toute application $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^k on considère le champ :

$$X^\varepsilon(z) = \varepsilon_1 J \nabla h_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} J \nabla h_{k-1} + J \nabla h$$

et on cherche ε voisin de 0 telle que l'équation $X^\varepsilon(z) = 0$ admette des solutions en z dans un voisinage de 0.

On pose $F = E^\perp$ et on note Π_E, Π_F les projections orthogonales respectives sur E et F on pose $\Pi_E(z) = z_E, \Pi_F(z) = z_F$.

Pour toute application ε de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^k assez proche de 0, le théorème des fonctions implicites (applicable grâce à l'hypothèse (ii)) montre qu'il existe une application φ_ε d'un voisinage de 0 dans E , dans F telle que :

$$\Pi_F X^\varepsilon(z_E, \varphi_\varepsilon(z_E)) = 0.$$

On résoud ensuite l'équation $\Pi_E X^\varepsilon(z_E, \varphi_\varepsilon(z_E)) = 0$ en appliquant le lemme 1 sur les singularités aux champs $\Pi_E X^\varepsilon, \Pi_E J \nabla h_1, \dots, \Pi_E J \nabla h_{k-1}, \Pi_E J \nabla h_k$.

L'hypothèse de récurrence montre que les hypothèses du lemme 1 sur le rang de ce système de vecteur sur le lieu singulier sont bien vérifiées. On en déduit l'existence de fonctions $c_{i,\varepsilon}(z_E)$ telles que :

$$\Pi_E X^\varepsilon(z_E, \varphi_\varepsilon(z_E)) = \sum_{i=1}^k c_{i,\varepsilon}(z_E) \Pi_E J \nabla h_i(z_E, \varphi_\varepsilon(z_E))$$

Il reste donc pour déterminer ε à résoudre le système de k équations à k inconnues.

L'application ε étant ainsi déterminée, le graphe de φ_ε est une sous-variété N , tangente à E en 0 le long de laquelle le rang de $Dh_1(z), \dots, Dh_k(z)$ est inférieur à k .

En outre si h' est telle que $\{h', h_i\} = 0$ l'image par le flot de $J \text{ grad } h'$ de N vérifie les mêmes propriétés. La variété N d'après sa définition étant unique, N est invariante par le flot de $J \text{ grad } h'$; N étant symplectique et de dimension $2(k-1)$ le long de N $J \text{ grad } h'$ est combinaison linéaire de $J \text{ grad } h'_k$ ($1 < U < k$)
Donc N est contenue dans le lieu singulier $S_{k-1}(\mathcal{H})$.

FIN DE LA CONSTRUCTION DU DIFFÉOMORPHISME.

Avec les notations précédentes on pose :

$$\phi(z_E, z_F) = (z_E, z_F - \varphi_\varepsilon(z_E))$$

On remarque que ce difféomorphisme laisse fixe le sous-espace d'équation $z_E = 0$ ainsi que tous les points où $z_F = 0$ et $\varphi_\varepsilon(z_E) = 0$. C'est-à-dire tout les points de E contenus dans $S_{k-2}(\mathcal{H})$.

B) CONSTRUCTION DES FONCTIONS ψ

D'après la partie A, nous pouvons supposer que outre les hypothèses du théorème les lieux singuliers de \mathcal{H} et $\mathcal{H}^{(2)}$ coïncident.

Dans toute la suite, on utilisera le lemme suivant :

LEMME 5 : Soit sur \mathbb{R}^{2n} une fonction h telle que : $\{h, q_i\} = 0$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$). Alors il existe une application ψ de \mathbb{R}^n de \mathbb{R} telle que :

$$h = \psi(q_1, \dots, q_n).$$

REMARQUE. Plus intuitivement les hypothèses du lemme se traduisent par : h est constante sur les tores d'équation $q_i = c_i$ ($1 \leq i \leq n$)

DEMONSTRATION.

Elle se fait par récurrence sur n .

Si $n = 1$ $q = x^2 + y^2$; la fonction h est constante sur les cercles $x^2 + y^2 = r^2$.

Le théorème d'inversion locale appliqué au passage en coordonnées polaires montre que la fonction ψ existe et est continue sur un voisinage de 0 et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$; pour montrer que cette application est de classe C^∞ on se ramène à un théorème classique sur les fonctions paires définies sur \mathbb{R} en considérant l'application $h(x, 0)$; La démonstration précédente se généralise facilement au cas où la fonction h dépend d'un paramètre t .

Nous faisons l'hypothèse de récurrence suivante (H).

H_{n-1} | Soit h une application de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$ dans \mathbb{R} telle que :

 | $\{h, q_i\} = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ $(q_i(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2$

 | Alors il existe une application ψ d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{n-1}$ telle que

 | $h(t, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \psi(t, q_1, \dots, q_{n-1})$

Démontrons l'assertion précédente du rang n . (H_n).

D'après l'hypothèse de récurrence, en prenant pour paramètre (t, x_n, y_n) il existe une fonction ψ_{n-1} telle que

$$h(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \psi_{n-1}(t, x_n, y_n, q_1, \dots, q_{n-1}) .$$

En appliquant une fois encore l'hypothèse de récurrence à la fonction ψ_{n-1} en considérant (t, q_1, \dots, q_n) comme paramètres on en déduit qu'il existe une fonction telle que :

$$\psi_{n-1}(t, x_n, y_n, q_1, \dots, q_{n-1}) = \psi(t, q_1, \dots, q_n) .$$

CONSTRUCTION DE LA FONCTION ψ

Nous construisons la fonction ψ de l'énoncé du théorème par récurrence sur les strates au lieu singulier.

Sans rien changer à la généralité du problème, nous pouvons supposer que $h_i^{(2)} = q_i$.

CONSTRUCTION SUR LES STRATES DE DIMENSION 2

Le lemme de Morse appliqué à la restriction de h_i à E_i montre qu'il existe un difféomorphisme $\phi_{i,1}$ de E_i tel que :

$$h_i|_{E_i} \circ \phi_{i,1} = q_i$$

Le lemme montre alors qu'il existe des fonctions $\psi_{j,i,1}$ telles que :

$$\text{si } j \neq i \quad h_j|_{E_i} \circ \phi_{i,1} = \psi_{j,i,1}(q_i)$$

$$j = i \quad \psi_{i,i,1}(q_i) = q_i .$$

On construit alors le difféomorphisme diagonal

$$\phi_1 = (\phi_{1,1}, \dots, \phi_{n,1}) .$$

D'autre part $\psi_{j,i,1}(0) = 0 \quad \forall j$ et $\forall i$. On pose $\psi_{j,1}(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n \psi_{j,i,1}(q_i)$

On remarque que $\psi_{j,1}|_{E_i} = \psi_{j,i,1}$.

LEMME DE RECURRENCE.

On suppose sur \mathbb{R}^{2k} espace symplectique données k fonctions (h_1, \dots, h_k) vérifiant les hypothèses au théorème et telles que $S_{k-1}(\mathcal{H}_k) = S_{k-1}(\mathcal{H}_k^{(2)})$ où \mathcal{H}_k est l'algèbre de Lie engendrée par $h_1 \dots h_k$. On suppose d'autre part qu'il existe des fonctions ψ_1, \dots, ψ_k définies sur \mathbb{R}^{2k} telles que :

$$h_i = \psi_i(q_1, \dots, q_k) \text{ sur } S_{k-1}(\mathcal{H}_k) .$$

Alors il existe un difféomorphisme local ϕ_k de \mathbb{R}^{2k} tel que $h_i \circ \phi_k = \psi_i(q_1, \dots, q_k)$ sur un voisinage de 0.

En outre si h est une fonction définie sur \mathbb{R}^{2k} telle que $\{h, h_i\} = 0$ alors il existe ψ telle que $h \circ \phi_k = \psi(q_1, \dots, q_k)$.

Principe de la démonstration du lemme de récurrence

On applique la méthode dite du chemin de Moser. On construit un champ de vecteurs Z_t dépendant du temps tel que :

$$\forall_j \quad 1 \leq j \leq k \quad d(\psi_j(q_1, \dots, q_n) + t(h_j - \psi_j(q_1, \dots, q_n))) \lrcorner Z_t = -(h_j - \psi_j(q_1, \dots, q_n))$$

La construction de Z_t est possible car $h_j - \psi_j(q_1, \dots, q_n)$ s'annule sur $S_{k-1}(\mathcal{H}_k)$ grâce au lemme 1 sur les singularités.

On remarque que Z_t s'annule sur $S_{k-1}(\mathcal{H}_k)$. On pose ϕ_t le flot de Z_t , on vérifie que ϕ_1 est le difféomorphisme cherché.

La deuxième partie de la conclusion se déduit immédiatement du lemme.

Indications sur la construction globale des fonctions ψ_i et du difféomorphisme ϕ

On construit d'abord, comme indiqué ci-dessus les fonctions $\psi_{i,1}$ et le difféomorphisme ϕ_1 . Puis à chaque sous-espace $E_i + E_j$ on applique le lemme de récurrence, ce qui permet de construire sur $E_i + E_j$ les fonctions $\psi_{\ell,i,j,2}$ et le difféomorphisme $\phi_{i,j,2}$ (pour $1 \leq \ell \leq n$) $\phi_{i,j,2}$ est l'identité en restriction à $E_i + E_j$ et $\psi_{\ell,i,j,2} / E_i = \psi_{\ell,i,1}$.

Le procédé diagonal utilisé au début de ce paragraphe permet donc de construire un difféomorphisme ϕ_2 de \mathbb{R}^{2n} et des fonctions $\psi_{\ell,2}$ telles que pour tout triplé (i,j,ℓ) , on ait :

$$h_\ell \circ \phi_2 / E_i + E_j = \psi_{\ell,i,j,2}(q^1, \dots, q_n) .$$

On est alors en mesure d'appliquer le lemme de récurrence à chaque sous-espace $E_i + E_j + E_k$.

C) CONSTRUCTION D'UN DIFFEOMORPHISME SYMPLECTIQUE TEL QUE LE THEOREME SOIT VERIFIE.

Le difféomorphisme ϕ construit à l'étape B) de la démonstration transforme la forme symplectique ω_0 en une forme $\omega_1 = \phi^*(\omega_0)$

On remarque d'autre part que le feuilletage en tores T^n défini par les équations $q_i = c_i$ est lagrangien pour les structures symplectiques définies par les formes ω_0 et ω_1 . En effet pour la structure initiale c'est évident. Pour la structure définie par ω_1 on remarque que :

$$\{h_i \circ \phi, h_j \circ \phi\}_{\omega_1} = \{h_i, h_j\}_{\omega_0} = 0$$

et le feuilletage défini par les équations $h_i \circ \phi = k_i$ coïncide avec le feuilletage défini par les équations $q_i = c_i$. On montre sous ces hypothèses qu'il existe un difféomorphisme ψ respectant le feuilletage tel que $\psi^* \omega_1 = \omega_0$. (La démonstration de ce point est très détaillée dans la thèse d'Elliason).

Alors $h_i \circ \phi \circ \psi$ est constante sur chaque feuille du feuilletage donc il existe des fonctions ψ'_i telles que

$$h_i \circ \phi \circ \psi = \psi'_i(q_1, \dots, q_n).$$