PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

M. JOURLIN

B. LAGET

Transformations morphologiques anisotropes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 4B
, p. 37-68

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___4B_37_0>

TRANSFORMATIONS MORPHOLOGIQUES ANISOTROPES

M. JOURLIN et B. LAGET

1. INTRODUCTION

Au début de ce siècle, MINKOWSKI[11] a associé à tout corps convexe K du plan un coefficient d'asymétrie défini par :

$$\varphi(K) = \sup_{a \in K} \inf_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{h_{K,a}(\theta)}{h_{K,a}(\theta+\pi)} = \sup_{a \in K} \varphi_K(a)$$

où $h_{K,a}(.)$ désigne la fonction-support de K par rapport au point a.
Le nombre $\varphi(K)$ varie dans l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$ et les bornes $\frac{1}{2}$ et 1 caractérisent respectivement la classe des triangles et celle des corps convexes à centre de symétrie.

La fonction $\varphi_K(.)$ évalue le centrage dans K d'un point de K et réalise son maximum en un seul point appelé <u>point critique</u> de K.

Par la suite NEUMANN[12] a donné une expression du coefficient $\varphi(K)$ utilisant la fonction radiale de K :

$$\varphi(K) = \sup_{a \in K} \inf_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{\rho_{K,a}(\theta)}{\rho_{K,a}(\theta+\pi)}$$

Cet auteur a aussi démontré que le point critique de K appartient à trois droites remarquables.

Vers 1950, divers auteurs ont repris l'étude du coefficient $\varphi(K)$ et tout particulièrement HAMMER[7] qui a associé à K deux familles de corps convexes définies par :

$$K_t = \bigcap_{a \in Fr(K)} H_{a,\frac{1+t}{2}}(K) \qquad \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$K^s = \bigcup_{a \in Fr(K)} H_{a,\frac{1+s}{2}}(K) \qquad \text{si } s \geqslant 1$$

où $H_{a,\alpha}$ désigne l'homothétie de centre a et de rapport α et Fr(K) l'ensemble frontière de K. Ces ensembles sont obtenus par des roulements sans glissement d'un homothétique de K dans ou sur K.

Dans l'approche de HAMMER l'outil principal est la notion de diamètre affine de K, c'est-à-dire de corde de K aux extrémités de laquelle passent deux droites d'appui à K parallèles.

Dans cet article, nous avons en vue les applications de ces notions à la Classification des Formes. Nous donnons tout d'abord une définition des deux familles introduites par HAMMER à l'aide des bandes d'appui de K. L'utilisation des fonctions-support est alors naturelle pour étudier ces ensembles et les homothétiques de l'ensemble différence S(K) de K permettent de les écrire à l'aide de la soustraction et de l'addition de MINKOWSKI selon les formules :

$$K_t = K \ominus (1-t)\ S(K) \qquad \text{pour } t \in [0,1]$$

$$K^s = K \oplus (s-1)\ S(K) \qquad \text{pour } s \in [1,+\infty[$$

On peut alors envisager de s'affranchir de l'hypothèse de convexité.

Nous faisons ainsi apparaître deux nouvelles transformations morphologiques pour lesquelles l'élément structurant est naturellement généré par l'objet à étudier et non pas imposé a priori comme il est d'usage en Morphologie Mathématique Classique. Rappelons que cette discipline, qui trouve son origine dans les travaux de l'Ecole de

Fontainebleau[10],[13], est fondée sur les notions d'érosion et de dilatation d'un ensemble. Ces transformations ont des propriétés fonctionnelles bien codifiées. Aussi pour éviter toute confusion nous **proposons** d'appeler la transformation $K \to K_t$ (resp. $K \to K^s$) **t-réduction** (resp. s-extension) de K et de parler à leur propos de Morphologie Anisotrope.

Il semble intéressant de remarquer que les transformations dont nous venons de parler associent à tout corps convexe K d'autres corps qui sont modelés sur K à l'aide d'un élément structurant généré par K. On peut donc envisager de développer une théorie des modelages réductifs et extensifs d'un ensemble donné.

Signalons enfin qu'une homothétie de rapport r positif n'est une r-réduction (ou r-extension si r est supérieur à 1) que dans l'hypothèse où K est à centre de symétrie. Dans le cas contraire, les réductions (resp. extensions) successives de K associeront à K des objets de plus en plus dissymétriques (resp. symétriques). Par cette approche dynamique nous entrevoyons la possibilité d'associer à K des paramètres de forme : allongement, asymétrie, ...

2. EXTENSION ET REDUCTION ANISOTROPES

Soient K un corps convexe du plan et a un point de K. Pour un angle orienté θ, on note $\delta_{a,\theta}$ la demi-droite de direction θ issue de a et $D_\theta(K)$ la droite d'appui à K qui coupe perpendiculairement $\delta_{a,\theta}$. Les droites $D_\theta(K)$ et $D_{\theta+\pi}(K)$ sont parallèles, ne dépendent pas du point a choisi dans K, définissent une bande $B_\theta(K)$ et deux demi-plans $H_\theta(K)$ et $H_{\theta+\pi}(K)$ qui tous les trois contiennent K. Le diamètre de FERET de K dans la direction θ est par définition la largeur de la bande $B_\theta(K)$ et on le désignera par $d_K(\theta)$. Pour tout réel positif r, on note $C_{\theta,r}$ la bande coaxiale à $B_\theta(K)$ et homothétique dans le rapport r. On pose :

$$K(r) = \bigcap_{\theta \in [0,2\pi]} C_{\theta,r}$$

DEFINITION 1. Pour un nombre $t \in [0,1]$ (resp. $s \in [1,+\infty[$), l'application $K \to K(t)$ (resp. $K \to K(s)$) est appelée t-réduction (resp. s-extension) anisotrope.

Pour la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$K(t) = K_t$ pour $t \in [0,1]$

$K(s) = K^s$ pour $s \in [1,+\infty[$

Précisons tout de suite que le cas des convexes du plan d'intérieur vide (segments ou singletons) ne pose aucun problème ou donne lieu à des résultats triviaux. C'est pourquoi nous nous limitons toujours aux corps convexes.

PROPOSITION 1. La famille $(K^s)_{s \in [1,+\infty[}$ constitue une suite croissante de convexes compacts contenant K.

La famille $(K_t)_{t \in [0,1]}$ constitue une suite croissante de convexes compacts contenus dans K.

Si on désigne par $t_o(K)$ la borne inférieure des nombres réels t pour lesquels l'érodé correspondant K_t est non vide, alors ce nombre t_o appartient à l'intervalle $[0,\frac{1}{3}]$ et l'intersection $\bigcap_{t \in]t_o,1]} K_t$ est égale à K_{t_o}.

De plus, l'ensemble K_{t_o} est toujours réduit à un point et pour t appartenant à $]t_o,1]$ l'ensemble K_t est d'intérieur non vide.

PREUVE - Si r et r' sont deux nombres réels positifs vérifiant $r < r'$, il est évident que les bandes correspondantes $C_{\theta,r}$ et $C_{\theta,r'}$ satisfont pour chaque direction θ à l'inclusion $C_{\theta,r} \subset C_{\theta,r'}$, ce qui assure les deux premiers résultats.

L'érodé $K_{\frac{1}{3}}$ contient le centre de gravité de K[9] et par définition les réels t utilisés sont positifs : on a donc bien $t_o \in [0,\frac{1}{3}]$.

Nous verrons par la suite que ces bornes sont atteintes. Ainsi l'encadrement fourni est optimal.

Il est clair que K_{t_o} satisfait l'inclusion $K_{t_o} \subset \bigcap_{t \in]t_o,1]} K_t$. Démontrons l'inclusion inverse. Soit x un point n'appartenant pas à K_{t_o}. Alors, il existe une bande C_{θ,t_o} ne contenant pas x et comme cette bande est fermée, la distance $d(x,C_{\theta,t_o})$ de x à C_{θ,t_o} est un nombre non nul noté α. Pour $t_1 = t_o + \frac{\alpha}{d_K(\theta)}$ par exemple, x n'appartient pas à C_{θ,t_1}. Ainsi x n'appartient pas à $\bigcap_{t \in]t_o,1]} K_t$ d'où l'inclusion cherchée.

Montrons maintenant que K_{t_o} est non vide. Dans le cas contraire, pour tout élément x de K il existe une bande C_{θ_x,t_o} ne contenant pas x et la distance $d(x,C_{\theta_x,t_o})$ est un nombre strictement positif noté α_x.

Ainsi les éléments y de la boule ouverte $B(x,\frac{\alpha_x}{2}[$ vérifient $d(y,C_{\theta_x,t_o}) > \frac{\alpha_x}{2}$. On a alors l'inclusion $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x,\frac{\alpha_x}{2}[$ et de ce recouvrement ouvert de K on peut extraire un recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\frac{\alpha_{x_i}}{2}[$$

On pose alors $t_1 = t_o + \dfrac{\underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Min}} \ \alpha_{x_i}}{\underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Max}} \ d_K(\theta_{x_i})}$

En conclusion, il existe $t_1 > t_o$ tel que pour tout élément x de K on puisse trouver un élément x_i de K vérifiant $x \notin C_{\theta_{x_i},t_1}$ ce qui établit $K_{t_1} = \emptyset$ en contradiction avec la définition de t_o.

Montrons que K_{t_o} est d'intérieur vide. Pour cela, soit t un réel tel que K_t soit d'intérieur non vide. Nous allons montrer qu'il existe alors $t_1 < t$ tel que K_{t_1} soit d'intérieur non vide, ce qui suffira compte-tenu de la définition de t_o. Par hypothèse, on peut trouver un point a de K_t et un réel $\varepsilon > 0$ tels que la boule ouverte $B(a,\varepsilon[$ soit incluse dans K_t. Dans chaque direction θ nous définissons un nombre $t_1(\theta)$ par la relation :

$$(1) \quad t_1(\theta)\, d_K(\theta) = t\, d_K(\theta) - \varepsilon$$

A $t_1(\theta)$ correspond une bande $C_{\theta,t_1(\theta)}$ coaxiale à la bande $C_{\theta,t}$ et dont la largeur est inférieure de ε à celle de $C_{\theta,t}$.

Dans ces conditions, il est clair que la boule ouverte $B(a,\frac{\varepsilon}{2}[$ est incluse dans $C_{\theta,t_1(\theta)}$. De la relation (1), nous tirons :

$$t_1(\theta) = t - \frac{\varepsilon}{d_K(\theta)}$$

On peut alors définir le réel t_1 par :

$$t_1 = \sup_{\theta\in[0,\pi]} t_1(\theta) = t - \operatorname{Inf}\left[\frac{\varepsilon}{d_K(\theta)}\right] = t - \frac{\varepsilon}{d_M}$$

Nous savons que la boule $B(a,\frac{\varepsilon}{2}[$ sera contenue dans la bande $C_{t_1,\theta}$ pour toute valeur de θ et par conséquent, on aura bien $B(a,\frac{\varepsilon}{2}[\subset K_{t_1}$ et K_{t_1} est d'intérieur non vide.

Désormais l'ensemble K_{t_o} est soit un segment, soit un singleton. Montrons que le premier cas ne peut pas se produire. Plus généralement si K_t est un segment, pour un point x n'appartenant pas à K_t, il existe une bande $C_{\theta(x),t}$ ne contenant pas x et contenant K_t. Soit a le milieu de K_t et m et m' les intersections de la médiatrice de K_t avec le bord de K. Si θ_o désigne la direction du vecteur $\vec{am}$,

quand x tend vers a sur le segment [ma] la bande $C_{\theta(x),t}$ tend vers $C_{\theta_o,t}$ et K_t est donc inclus dans le bord de $C_{\theta_o,t}$ homothétique de D_{θ_o}.

De la même manière, lorsque x tend vers a sur [m'a], la bande $C_{\theta(x),t}$ tend vers $C_{\theta_o+\pi,t}$ et l'ensemble K_t est inclus dans l'homothétique de $D_{\theta_o+\pi}$. Ainsi D_{θ_o} et $D_{\theta_o+\pi}$ sont confondues et le convexe compact K de départ serait d'intérieur vide (i.e. serait lui-même un segment) ce que nous avons exclu au départ.

Enfin, pour établir que K_t est d'intérieur non vide si $t > t_o$, il suffit de voir que K_t n'est pas réduit à un point. Dans le cas contraire, soit ω le point formant K_t. Comme l'application $\theta \to d(\omega, (C_{\theta,t})^c)$ est continue sur le compact $[0,\pi]$, elle atteint sa valeur minimum qui vaut zéro. Il existe donc un angle α pour lequel ω appartient au bord de la bande $C_{\alpha,t}$. Ainsi ω ne peut appartenir à C_{α,t_o} et comme K_{t_o} est inclus dans K_t, l'ensemble K_{t_o} serait réduit à l'ensemble vide.■

REMARQUE 1. Pour tout corps convexe K le singleton K_{t_o} n'est autre que le point critique et le coefficient $t_o(K)$ apparaît comme un coefficient d'asymétrie d'ailleurs relié au nombre $\varphi(K)$ de MINKOWSKI par :

$$\varphi(K) = \frac{1 - t_o(K)}{1 + t_o(K)}$$

La proposition suivante donne une caractérisation des ensembles K_t en terme de fonction-support ou de fonction radiale. Précisons que la fonction-support de K peut être définie par rapport à n'importe quel point a choisi pour origine par la formule :

$$h_{K,a}(\theta) = \sup_{x \in K} \vec{ax}.\overrightarrow{n(\theta)}$$

où $\overrightarrow{n(\theta)}$ est le vecteur unitaire de direction θ.

Il n'en est pas de même pour la fonction radiale qui ne peut être définie que par rapport à un point a contenu dans K. Rappelons[6] les égalités :

$$h_{K \oplus L,a} = h_{K,a} + h_{L,a}$$

et

$$h_{\lambda K,a} = \lambda h_{K,a}$$

vraies pour tous corps convexes K et L et tout réel λ positif.

PROPOSITION 2. Soit K un corps convexe et soit t un nombre réel de l'intervalle $[0,1[$. L'ensemble K_t est formé des points a de K satisfaisant la double inégalité :

$$(1) \qquad \forall\theta \in [0,2\pi] \quad \frac{1-t}{1+t} \leqslant \frac{h_{K,a}(\theta)}{h_{K,a}(\theta+\pi)} \leqslant \frac{1+t}{1-t}$$

Les points de $Fr(K_t)$ sont ceux pour lesquels une des deux égalités est vérifiée pour une direction.

Des résultats identiques peuvent être énoncés pour la fonction radiale.

PREUVE - Un point a est dans K_t si et seulement si il appartient à toutes les bandes $C_{\theta,t}$, autrement dit si on a les deux inégalités suivantes :

$$\forall\theta \in [0,2\pi] \qquad h_{K,a}(\theta) \geqslant \frac{1-t}{2}\, d_K(\theta) \quad \text{et} \quad h_{K,a}(\theta+\pi) \geqslant \frac{1-t}{2}\, d_K(\theta)$$

où $d_K(\theta)$ désigne le diamètre de FERET de K dans la direction θ, c'est-à-dire la largeur de la bande $B_\theta(K)$.

En remplaçant $d_K(\theta)$ par $h_{K,a}(\theta) + h_{K,a}(\theta+\pi)$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient directement la relation (1) de la Proposition 2.

Si maintenant a est intérieur à K_t, il existe une boule $B(a,\varepsilon]$ contenue dans K_t et pour chaque point a' de $B(a,\varepsilon]$ on a pour toute direction θ :

$$\frac{h_{K,a'}(\theta)}{h_{K,a'}(\theta+\pi)} \geqslant \frac{1-t}{1+t}$$

et l'égalité ne peut se produire que sur la sphère $S(a,\varepsilon)$. Ainsi, pour la direction θ, on a l'inégalité stricte :

$$\frac{h_{K,a}(\theta)}{h_{K,a(\theta+\pi)}} > \frac{1-t}{1+t}$$

Réciproquement, si a est un point de K_t vérifiant la double inégalité stricte (1), la continuité de l'application $a \to \dfrac{h_{K,a}(\theta)}{h_{K,a}(\theta+\pi)}$ permet d'exhiber une boule $B(a,\varepsilon[$ dont les points satisfont aussi (1). Alors $B(a,\varepsilon[$ est contenue dans K_t et $a \in \overset{\circ}{K}_t$.

Enfin la relation :

$$\rho_{K,a}(\theta) = \underset{\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[}{\mathrm{Inf}} \frac{h_{K,a}(\theta+\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

vraie pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et tout $a \in K$ permet de démontrer les mêmes résultats pour la fonction radiale.■

Le corollaire suivant donne une relation de réciprocité entre s-extension et $\frac{1}{s}$ - réduction qui traduit la stabilité des corps convexes par fermeture en morphologie anisotrope.

COROLLAIRE 1. Pour tout corps convexe K et tout nombre réel s strictement supérieur à 1, on a les égalités :

$$(K^s)_{\frac{1}{s}} = K$$

$$d_{K^s}(.) = s\, d_K(.)$$

$$h_{K^s,a}(.) = h_{K,a}(.) + \frac{s-1}{2} d_K(.) \qquad \forall a \in \mathbb{R}^2$$

<u>PREUVE</u> - Un calcul simple montre que pour tout nombre réel $s > 1$, la fonction radiale de K^s exprimée par rapport à un point a de K vérifie l'égalité suivante :

$$\rho_{K^s,a}(\theta) = \operatorname*{Inf}_{\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{s+1}{2} h_{K,a}(\theta+\alpha) + \frac{s-1}{2} h_{K,a}(\theta+\alpha+\pi)\right)$$

Montrons maintenant que K est inclus dans $(K^s)_{\frac{1}{s}}$. Comme pour $s > 1$, on a l'inégalité $\frac{s-1}{2} \leqslant \frac{(s+1)^2}{2(s-1)}$, il est clair que :

$$\rho_{K^s,a}(\theta) \leqslant \frac{1+\frac{1}{s}}{1-\frac{1}{s}} \rho_{K^s,a}(\theta+\pi)$$

On conclut en utilisant la proposition précédente.

Pour obtenir les trois égalités cherchées, il suffit de remarquer que pour toute direction θ on a : $d_{K^s}(.) \leqslant s d_K(.)$ ce qui assure les inégalités suivantes :

$$d_K(.) \leqslant d_{(K^s)_{\frac{1}{s}}}(.) \leqslant \frac{1}{s} d_{K^s}(.) \leqslant d_K(.)$$

Ainsi les deux premières égalités sont démontrées. Pour la troisième on a déjà :

$$h_{K^s,a}(.) \leqslant h_{K,a}(.) + \frac{s-1}{2} d_K(.)$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$h_{K,a}(.) = h_{(K^s)_{\frac{1}{s}},a}(.) \leqslant h_{K^s,a}(.) + \frac{1-s}{2} d_K(.) \blacksquare$$

On peut établir deux autres relations de réciprocité que nous énonçons ici :

$$(K^s)_t = K(st) \qquad \forall s > 1 \qquad \forall t \in [0,1[$$

et

$$(K_t)^s \subset K(st) \qquad \forall s > 1 \qquad \forall t \in [0,1[$$

et une relation de compatibilité :

$$(K^s)^{s'} = K^{ss'} = (K^{s'})^s \qquad \forall s \text{ et } s' > 1$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que les ensembles $K(r)$ sont bien ceux introduits par HAMMER.

COROLLAIRE 2. Pour tout corps convexe K, on a les égalités :

(1) $$K_t = \bigcap_{x \in Fr(K)} H_{x,\frac{1+t}{2}}(K) \qquad \forall t < 1$$

(2) $$K^s = \bigcup_{x \in Fr(K)} H_{x,\frac{1+s}{2}}(K) \qquad \forall s > 1$$

PREUVE -

(1) Un point a appartient à $\bigcap_{x \in Fr(K)} H_{x,\frac{1+t}{2}}(K)$ si, et seulement si, pour tout point x de $Fr(K)$ il existe un point y de K aligné avec a et x tel que $\frac{ax}{xy} = \frac{1+t}{2}$. Cette relation est équivalente à la double inégalité énoncée dans la proposition 2 pour la fonction radiale de K.

(2) Il suffit de démontrer que les deux ensembles ont même fonction support. Or, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a :

$$\sup_{x \in Fr(K)} \left(h_{H_{x,\frac{1+s}{2}}(K),a}(\theta) \right)$$

$$= \sup_{x \in Fr(K)} \sup_{y \in K} \left(\overrightarrow{aH_{x,\frac{1+s}{2}}(y)} \cdot \overrightarrow{n(\theta)} \right)$$

$$= \sup_{x \in Fr(K)} \left(\frac{1-s}{2} \overrightarrow{ax} . \overrightarrow{n(\theta)} + \sup_{y \in K} \left(\frac{1+s}{2} \overrightarrow{ay} . \overrightarrow{n(\theta)} \right) \right)$$

$$= h_{K^s,a}(\theta) . \blacksquare$$

L'égalité (1) citée dans ce corollaire a été démontrée par DOUSSON[2] de façon géométrique. Ce résultat lui a permis d'établir que l'homothétique négatif de K d'aire maximale contenu dans K est obtenu quand on centre l'homothétie au point critique. Le rapport d'homothétie est alors $\frac{t_o-1}{t_o+1}$.

Pour démontrer le principal résultat de cet article, qui généralise un résultat de HAMMER[8], nous rappelons que le symétrisé au sens de MINKOWSKI de K par rapport au point ω choisi comme origine, est défini par $S_\omega(K) = \frac{1}{2} K \oplus \frac{1}{2} K^-(\omega)$, où $K^-(\omega)$ est le symétrique de K par rapport au point ω. L'ensemble $S_\omega(K)$ est centré en ω, et sa forme ne dépend pas de ce point puisque $S_{\omega'}(K) = T_{\overline{\omega\omega'}}(S_\omega(K))$ où $T_{\overline{\omega\omega'}}$ désigne la translation de vecteur $\overline{\omega\omega'}$.

Nous allons utiliser $S_\omega(K)$ comme un élément structurant pointé par ω.

<u>REMARQUE 2</u>. Dans [1]DELFINER montre que l'ensemble $S_\omega(K)$ est l'union des diamètres affines de K centrés par translation en ω. Pour alléger l'écriture, nous adoptons les notations suivantes : $S(K) = S_\omega(K)$ et $\alpha S(K) = H_{\omega,\alpha}(S_\omega(K))$.

THEOREME 1. Pour tout corps convexe K et tout réel $s > 1$ et $t \in [0,1[$ on a les égalités : $K^s = K \oplus (s-1)\, S(K)$ et $K_t = K \ominus (1-t)\, S(K)$.

PREUVE - Pour la première égalité, il suffit de remarquer que la fonction support de S(K) exprimée par rapport à ω n'est autre que la fonction $\frac{1}{2}d_K(.)$. On a alors :

$$h_{K \oplus (s-1)S(K),\omega}(.) = h_{K,\omega}(.) + \frac{s-1}{2}\, d_K(.) = h_{K^s,\omega}(.)$$

Pour la seconde égalité, nous procédons par équivalence. Rappelons que a est un point de $K \ominus (1-t)\, S(K)$ si, et seulement si, $(1-t)\, S_a(K)$ est inclus dans K, c'est-à-dire que $\frac{1-t}{2}d_K(.) \leqslant h_{K,a}(.)$, ce qui est équivalent à l'inégalité :

$$\frac{1-t}{1+t} \leqslant \frac{h_{K,a}(\theta)}{h_{K,a}(\theta+\pi)} \qquad \forall\, \theta \in [0,2\pi]$$

En permutant les rôles de θ et $\theta+\pi$, on obtient l'autre inégalité qui permet de conclure en utilisant la proposition 2.■

Ce théorème montre que dans le cadre de la Morphologie Anisotrope, on peut finalement s'affranchir de l'hypothèse de convexité. Toutefois notre objectif n'est pas de développer ici ce point de vue. Le résultat précédent a un autre intérêt : il prouve que l'extension anisotrope a tendance à symétriser les corps convexes.

COROLLAIRE. Pour tout corps convexe K, on a l'égalité :

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s-1} K^s = S(K)$$

PREUVE - Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{s-1} K^s = \frac{1}{s-1} \big(K \oplus (s-1)\ S(K)\big) = \frac{1}{s-1} K \oplus S(K) \blacksquare$$

Remarquons que K_{t_o} est le point où on peut centrer un homothétique de S(K) d'aire maximale contenu dans K. Le rapport d'homothétie est alors $1-t_o$ et ce résultat est à rapprocher de celui de DOUSSON cité plus haut. Il permet aussi de définir un coefficient d'asymétrie de K par :

$$b_1(K) = (1-t_o)^2 \frac{\mu(S(K))}{\mu(K)}$$

où μ représente la mesure de LEBESGUE dans le plan.

Signalons dans le même ordre d'idée que K_{t_o} est aussi le point où on peut centrer un homothétique de S(K) d'aire minimale contenant K, le rapport d'homothétie étant alors $1+t_o$. En d'autres termes :

$$1+t_o(K) = \operatorname{Inf} \{\alpha, \qquad \exists a \qquad T_{\overrightarrow{\omega a}}(\alpha S(K)) \supset K\}$$

et

$$1-t_o(K) = \operatorname{Sup} \{\beta, \qquad \exists a \qquad T_{\overrightarrow{\omega a}}(\beta S(K)) \subset K\}$$

Les autres conséquences de ce théorème font l'objet du paragraphe suivant.

3. EVOLUTION DE LA STRUCTURE DU BORD D'UN CORPS CONVEXE PAR EXTENSION ET REDUCTION ANISOTROPES

Rappelons que deux points x et y de Fr(K) sont diamétralement opposés si il existe une direction θ telle que $x \in D_\theta(K)$ et $y \in D_{\theta+\pi}(K)$.
Le segment [x,y] est alors un diamètre affine associé à la direction θ. En général, ce segment est porté par une droite dont la direction est différente de θ. Nous désignerons par $\gamma(x)$ l'ensemble des points diamétralement opposés à x.

PROPOSITION 3. Pour tout corps convexe K et tout nombre réel $s > 1$, on a les égalités :

$$Fr(K^s) = \bigcup_{x \in Fr(K)} H_{x,\frac{1-s}{2}}(\gamma(x)) = \bigcup_{y \in Fr(K)} H_{y,\frac{1+s}{2}}(\gamma(y))$$

En particulier, $H_{x,\frac{1-s}{2}}(\gamma(x))$ est l'ensemble des points de contact avec K^s des droites d'appui opposées à celles de x.

PREUVE[9] - La démonstration se fonde sur la remarque suivante. Pour toute direction θ, il existe un point x de Fr(K) tel que :

$$D_\theta(K^s) = T_{\frac{s-1}{2}\overrightarrow{u_K(\theta)}}(D_\theta(K)) = H_{x,\frac{1-s}{2}}(D_{\theta+\pi}(K))$$

où $\overrightarrow{u_K(\theta)}$ désigne le vecteur $d_K(\theta)\ \overrightarrow{n(\theta)}$.■

Ce résultat donne dans le cas particulier des polygones convexes des formules explicites. Si n(K) désigne le nombre d'arêtes, p(K) le nombre de couples de côtés deux à deux parallèles, et n_i le nombre d'arêtes de l'arc $\gamma(x_i)$ opposé au sommet x_i, on a :

$$n(K^s) = 2\,\bigl(n(K) - p(K)\bigr) = n(K) + \sum_{i=1}^{n} n_i$$

L'évolution de la structure du bord par réduction est plus complexe. Cela est dû à la perte d'efficacité de certaines directions.

DEFINITION 2. Une direction θ est <u>t-efficace</u> pour un corps convexe K si l'égalité :

$$D_\theta(K_t) = T_{\frac{t-1}{2}\overrightarrow{u_K(\theta)}}(D_\theta(K))$$

est vraie.

Remarquons qu'intuitivement une direction θ est t-efficace si l'un des bords de la bande $C_{\theta,t}$ est droite d'appui à l'ensemble K_t c'est-à-dire intervient dans le modelage de K_t.

Supposons maintenant que la frontière de K soit orientée dans le sens trigonométrique.

On note alors $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ les directions associées aux droites d'appui supportant la tangente à droite et à gauche en x et $P_K(x)$ le parallélogramme circonscrit à K dont deux des côtés sont portés par les droites $D_{\alpha(x)}(K)$ et $D_{\beta(x)}(K)$.

L'évolution de la structure du bord d'un corps convexe par réduction est en partie clarifiée par les lemmes et la proposition énoncés ci-dessous.

LEMME 1. Si x est sur la frontière de K_t, on peut trouver un angle θ_o de $[0,\pi]$ tel que x appartienne à la droite $D_{\theta_o,t}$ et donc x est un point frontière de $C_{\theta_o,t}$.

PREUVE - Il suffit de démontrer que pour $x \in Fr(K_t)$ il existe une direction θ_o telle que la distance $d(x,(C_{\theta_o,t})^c)$ de x au complémentaire de $C_{\theta_o,t}$ soit nulle. Soit $\varepsilon(x) = \inf_{\theta \in [0,\pi]} d(x,(C_{\theta,t})^c)$.

Montrons que $\varepsilon(x)$ ne peut être strictement positif. En effet dans ce cas la boule ouverte centrée en x et de rayon $\frac{\varepsilon(x)}{2}$ par exemple serait contenue dans les bandes $C_{\theta,t}$ et donc dans K_t ce qui est impossible puisque x est point-frontière de K_t. Ainsi $\varepsilon(x)$ est nul et comme l'application $\theta \to d(x,(C_{\theta,t})^c)$ est continue sur le compact $[0,\pi]$, il existe une direction θ_o réalisant $d(x,(C_{\theta_o,t})^c) = 0$.■

LEMME 2. Si x est un point anguleux de Fr(K) et si les directions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont t-efficaces, le point d'intersection y des droites $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$ et $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\beta)}}(D_\beta(K))$ est point de contact de ces droites avec K_t. Ce point est sur la diagonale A(x) de $P_K(x)$ issue de x.

PREUVE - Il est clair que le point y est situé sur A(x). S'il n'appartient pas à K_t, les droites $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$ et $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\beta)}}(D_\beta(K))$ rencontrent la frontière de K_t en deux points u et v.

Ces points sont situés de part et d'autre de A(x) et par convexité de K_t, il existe un point z appartenant à la fois à $Fr(K_t)$ et à la droite xy tout en étant extérieur au segment [x,y]. Les droites d'appui en z ont une direction strictement comprise entre α et β. D'après le Lemme 1., il existe alors une direction θ strictement comprise entre α et β telle que la droite $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\theta)}}(D_\theta(K))$ soit droite d'appui en z à K_t, ce qui est impossible. En effet, par définition de $P_K(x)$, la droite $D_{\theta+\pi}(K)$ coupe nécessairement le segment A(x).

D'après le Théorème de THALES, le point de concours de $T_{\frac{t-1}{2}\frac{}{u_K(\theta)}}(D_\theta(K))$ avec A(x) appartient au segment [x,y].■

Nous allons maintenant établir un résultat analogue pour les points réguliers. Si x est un point de Fr(K) par lequel passe une unique droite d'appui à K, notons $\alpha(x)$ la direction de cette droite. Si x est birégulier (à courbure non nulle) on note A(x) l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x\} \cup (D_{\alpha+\pi}(K) \cap Fr(K))$. Enfin, si x est seulement régulier et que $D_{\alpha+\pi}(K)$ a un contact de même nature, on note A(x) le quadrilatère non convexe défini par les intersections de Fr(K) avec $D_\alpha(K)$ et $D_{\alpha+\pi}(K)$.

LEMME 3. Si x est un point régulier de Fr(K) et si $T_{\frac{t-1}{2}\overrightarrow{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$ est droite d'appui de K_t, les points de contact de cette droite avec K_t sont contenus dans l'ensemble A(x).

PREUVE - Il suffit de démontrer que tout point a de $T_{\frac{t-1}{2}\overrightarrow{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$ qui n'appartient pas à A(x) n'est pas contenu dans K_t. Si a est un tel point, il existe un point y' appartenant à $D_{\alpha+\pi}(K) \cap Fr(K)$ tel que l'intersection y des droites ay' et $D_\alpha(K)$ n'appartienne pas à la frontière de K .

Seul le cas de figure présentant un double méplat nécessite de choisir y' dans $D_{\alpha+\pi}(K) \cap Fr(K)$. Dans les deux autres situations tout y' convient.

Soit donc z le point de concours du segment [a,y] et Fr(K). On a :

$$\frac{az}{ay'} < \frac{ay}{ay'} = \frac{1-t}{1+t}$$

La proposition 2 permet alors d'affirmer que le point a n'appartient pas à K_t.■

D'après les lemmes précédents, il est clair que la zone éventuelle de contact de la droite $T_{\frac{t-1}{2}\overrightarrow{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$ avec $Fr(K_t)$ est située dans A(x). On pose alors :

$$x(t) = A(x) \cap T_{\frac{t-1}{2}\overrightarrow{u_K(\alpha)}}(D_\alpha(K))$$

et

$$t_o(x) = \text{Inf}\ \{t,\ x(t) \cap Fr(K_t) \neq \emptyset\}$$

Il est évident que $t_o(x)$ est compris entre $t_o(K)$ et 1 et la proposition suivante montre comment ce coefficient $t_o(x)$ permet d'apprécier la contribution du point x dans la génération du bord des ensembles K_t.

PROPOSITION 4. Soient K un corps convexe et x un point de Fr(K). Les assertions suivantes sont vraies :

(1) Pour $t \geq t_o(x)$ l'ensemble $x(t) \cap Fr(K_t)$ est non vide.

(2) Pour $t < t_o(x)$ deux cas peuvent se produire :

(i) Si x est un point anguleux, l'un des intervalles $]\alpha(x),\beta(x)]$ ou $[\alpha(x),\beta(x)[$ est formé de directions t-inéfficaces.

(ii) Si x est un point régulier, la direction $\alpha(x)$ est t-inéfficace et a un point de contact anguleux avec K_t.

PREUVE (1) - Soit y un point de $x(t) \cap Fr(K_t)$. Deux cas sont possibles. Si x n'appartient pas à un méplat, il existe un diamètre affine [x,z] contenant y tel que $xy = (1-t)xz$. De plus pour toute direction $\theta \notin [\alpha(x),\beta(x)]$, la droite $T_{\frac{1-t}{2}\overrightarrow{u_K}(\theta)}(D_\theta(K))$ coupe le segment [x,y[. Ainsi pour $t' > t$, le point y' défini par $xy' = (1-t')xz$ appartient à $x(t') \cap Fr(K_{t'})$. Supposons maintenant que x soit sur un méplat [a,b] ; étant donné la nature de A(x), on peut trouver un point $x_1 \in [a,b]$ et un diamètre affine $[x_1,z]$ contenant y tels que $x_1y = (1-t)\, x_1z$. La preuve se conclut de la même façon que dans le cas précédent.

(2)- Si x est anguleux, l'une des directions $\alpha(x)$ ou $\beta(x)$ est t-inéfficace et il en est de même de toutes les directions de $]\alpha(x),\beta(x)[$. Le raisonnement est le même lorsque x est régulier en posant $\alpha(x) = \beta(x)$.■

Ce résultat permet d'affirmer qu'un point anguleux de Fr(K) ne peut générer qu'un point anguleux de $Fr(K_t)$ et qu'un point régulier de $Fr(K_t)$ ne peut être généré que par un point régulier de Fr(K). Il permet aussi de préciser l'évolution du paramètre $t_o(K^s)$ en fonction de s.

COROLLAIRE 1. Soit K un corps convexe et s un nombre réel supérieur à un. On a l'égalité :

$$t_o(K^s) = \frac{t_o(K)}{s}$$

PREUVE - Comme $t_o(K) = \underset{x \in Fr(K)}{\text{Inf}} t_o(x)$, il suffit de remarquer que si z est un point de $Fr(K^s)$, il existe un point x de Fr(K) pour lequel $z \in H_{x,\frac{1-s}{2}}(\gamma(x))$. Alors $t_o(z) = \frac{1}{s} t_o(x)$ ce qui prouve l'inégalité :

$$t_o(K^s) \geq \frac{t_o(K)}{s}$$

La réciproque est identique en associant à tout point x de Fr(K) un point z de $H_{x,\frac{1-s}{2}}(\gamma(x))$.■

Pour conclure ce paragraphe, nous abordons les propriétés d'ouverture anisotrope des corps convexes. Cette notion est intimement liée à celle de bi-efficacité d'une direction.

DEFINITION 3. Une direction θ est t-bi-efficace si les directions θ et θ+π sont t-efficaces.

On peut associer à tout corps convexe K le coefficient $t_1(K)$ qui est la borne inférieure des nombres réels t pour lesquels toutes les directions sont t-bi-efficaces. Il est facile de démontrer l'égalité :

$$t_1(K) = \text{Inf}\ \{t,\ (K_t)^{1/t} = K\}$$

c'est-à-dire que $t_1(K)$ mesure le degré d'ouverture de K au sens de la Morphologie Anisotrope. Remarquons tout de suite que pour $t \in [t_1(K), 1]$ on a les égalités :

$$(K_t)^s = K(ts),\ \ \forall s \geq 1 \qquad \text{et} \qquad (K_t)_{t'} = K_{tt'},\ \ \forall t' \in [0,1]$$

Pour pouvoir préciser les liens existant entre les propriétés de régularité de Fr(K) et les valeurs prises par le coefficient $t_1(K)$, la notion de points anguleux en position symétrique est nécessaire.

DEFINITION 4. Un point anguleux de Fr(K) est en position symétrique si le sommet opposé à x dans le parallélogramme $P_K(x)$ est un point de Fr(K).

Notons $\Lambda(K)$ l'ensemble des points anguleux de K et I(K) le complémentaire de $\bigcup_{x \in \Lambda(K)} [\alpha(x), \beta(x)]$ dans $[0, 2\pi]$.

PROPOSITION 5. Soit K un corps convexe.

(1) Si K a un bord régulier, alors :

$$t_1(K) = \sup_{x \in Fr(K)} t_o(x) = \operatorname{Inf} \{t, K_t \text{ est à bord régulier}\}.$$

(2) Si K est à bord régulier par morceaux et si les points anguleux de K sont en position symétrique, alors $t_1(K) < 1$ et :

$$t_1(K) = \sup_{x \in Fr(K) \setminus \Lambda(K)} (t_o(x)) = \operatorname{Inf} \{t, I(K_t) = I(K)\}$$

(3) Si K est un polygone ayant un nombre fini de sommets, alors les arêtes de K sont deux à deux parallèles si, et seulement si, $t_1(K) < 1$.

PREUVE - Deux remarques préliminaires qui se démontrent directement seront utiles dans la suite :

(i) Si K admet un point anguleux en position non symétrique, alors $t_1(K) = 1$.

(ii) Si pour $t < 1$, l'ensemble K_t admet un point anguleux en position symétrique, il en est de même de K.

Etablissons maintenant la proposition.

(1) D'après la première assertion de la proposition 4, on peut affirmer que $t_1(K) = \sup_{x \in Fr(K)} t_o(x)$. Il en est de même de l'inégalité :

$$t_1(K) \leqslant \mathrm{Inf}\ \{t,\ K_t \text{ à bord régulier}\}.$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, on suppose qu'il existe un réel t strictement compris entre ces deux nombres. L'ensemble K_t admet alors un point anguleux qui d'après la remarque (ii) est en position non symétrique, donc d'après la remarque (i) on a l'égalité $t_1(K_t) = 1$. Soit t' un nombre positif strictement inférieur à 1, tel que $tt' = t_1(K)$, donc $((K_t)_{t'})^{1/t'} = (K_{tt'})^{1/t'} = K_t$, ce qui prouve que $t_1(K_t) \leqslant t' < 1$, ce qui aboutit à une contradiction et prouve l'égalité cherchée.

(2) D'après la remarque (i), il suffit de démontrer la double égalité. Les points anguleux de Fr(K) sont en position symétrique, ils sont donc deux à deux diamétralement opposés. Le seuil $t_1(K)$ ne peut être atteint que par disparition d'un arc, ou apparition d'un point anguleux en position non symétrique. Comme pour toute direction θ de I(K), les droites d'appui $D_\theta(K)$ et $D_{\theta+\pi}(K)$ ont un contact régulier avec K, on a alors :

$$t_1(K) = \sup_{x \in Fr(K) \setminus \Lambda(K)} t_o(x) \leqslant \mathrm{Inf}\ \{t,\ I(K) = I(K_t)\}$$

Pour démontrer la deuxième égalité, on suppose qu'il existe un nombre réel t strictement compris entre ces deux nombres. Comme précédemment $t_1(K_t) = 1$ et on conclut de la même façon.

(3) Il suffit de démontrer la condition nécessaire. Si $t_1(K) < 1$, il existe t tel que $t_1(K) < t < 1$ et $n(K_t) = n(K)$, alors les égalités suivantes :

$$n(K) = n\left((K_t)^{1/t}\right) = 2\left(n(K_t) - p(K_t)\right)$$

montrent que $n(K) = 2p(K)$.■

Ce résultat permet la mise en évidence de caractéristiques de forme.

COROLLAIRE. Pour un corps convexe K à bord régulier, si tous les ensembles K_t ont un bord régulier alors K admet un centre de symétrie.

PREUVE - On a $t_1(K) = t_o(K)$, donc $t_o(x) = t_o(K)$ $\forall x \in Fr(K)$. Ainsi toutes les directions sont t_o-efficaces. Comme K_{t_o} est réduit à un point, cela veut dire que les bandes C_{θ,t_o} sont réduites à des droites, ceci ne peut se produire que si $t_o(K) = 0$.■

Dans la proposition 5, nous avons démontré que les polygones "anisotropiquement" ouverts ont des arêtes deux à deux parallèles. Le résultat suivant donne une caractérisation analogue pour les corps convexes à bord C^2.

PROPOSITION 6. Les corps convexes à bord C^2 anisotropiquement ouverts sont ceux pour lesquels les méplats éventuellement présents sur la frontière, sont deux à deux parallèles.

PREUVE - Soit K un corps convexe à bord C^2. Le rayon de courbure du contact de $D_\theta(K)$ avec Fr(K) est $R_K(\theta) = h_K(\theta) + h''_K(\theta)$.
Ainsi $R_K(\theta) + R_K(\theta+\pi) = d_K(\theta) + d''_K(\theta)$.

Démontrons maintenant que pour une direction θo telle que $\lim\limits_{\theta \to \theta_o} R_K(\theta) = +\infty = \lim\limits_{\theta \to \theta_o+\pi} R_K(\theta)$, on a $\lim\limits_{\theta \to \theta_o} \dfrac{R_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)} \neq 0$.

En effet, dans le cas contraire, on peut écrire que :

$$1 = \lim_{\theta \to \theta_o} \left(1 + \frac{R_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)}\right) = \lim_{\theta \to \theta_o} \frac{d_K(\theta) + d''_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)}$$

$$= \lim_{\theta \to \theta_o} \frac{d''_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)}$$

ce qui impose la condition $\lim_{\theta \to \theta_o} d''_K(\theta) = +\infty$. Dans ce cas, la fonction d_K ne peut être de classe C^2.

Remarquons maintenant que $t_1(K) \leqslant t$ si, et seulement si, :

$$h_{K_t}(.) = h_K(.) + \frac{t-1}{2} d_K(.)$$

Donc $t_1(K) = \operatorname{Inf} \{t \; ; \; \frac{R_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)} \geqslant \frac{1-t}{1+t}, \qquad \forall \theta \in [0,2\pi]\}$

Ainsi $t_1(K) = 1$ si, et seulement si, il existe une direction θ pour laquelle $\frac{R_K(\theta)}{R_K(\theta+\pi)} = 0$, ce qui ne peut se produire que lorsque $R_K(\theta+\pi)$ est infini et $R_K(\theta)$ fini.■

4. CORPS CONVEXES DONT LA FORME EST PRESERVEE PAR REDUCTION OU EXTENSION

Dans ce paragraphe nous abordons l'étude des corps convexes dont la forme est préservée par extension ou réduction. Le premier cas ne pose aucun problème et met en évidence le rôle particulier des objets à centre de symétrie. En revanche, le second est rendu plus délicat par l'aspect non réversible des t-réductions lorsque certaines directions deviennent inefficaces.

Un lemme technique est nécessaire.

LEMME 4. Soit K un corps convexe dont la forme est préservée par t-réduction, alors :

$$K_t = H_{\omega,\lambda(t)}(K) \quad \text{où} \quad \{\omega\} = K_{t_o} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{t-t_o}{1-t_o}$$

De plus une direction θ est t-éfficace si et seulement si :

$$h_{K,\omega}(\theta) = \varphi(K)\ h_{K,\omega}(\theta+\pi)$$

PREUVE - Calculons le plus grand nombre réel positif λ, pour lequel un translaté de λK est contenu dans K_t, ce qui ne peut se produire que lorsque : $K_t \ominus (\lambda K)^- \neq \phi$. Mais :

$$K_t \ominus \lambda K^- = (K \ominus (1-t)\ S(K)) \ominus \lambda K^-$$

$$= (1-\lambda)\ (K \ominus \frac{1-t}{1-\lambda}\ \ S(K))$$

Ainsi : $\dfrac{t-\lambda(t)}{1-\lambda(t)} = t_o(K)$

ce qui donne la valeur désirée de $\lambda(t)$ et montre que le centre d'homothétie est le point critique.

Remarquons que pour toute direction θ on a :

$$h_{K,\omega}(\theta) - h_{K_t,\omega}(\theta) = \frac{1-t}{1-t_o}\ h_{K,\omega}(\theta).$$

Ainsi la direction θ est t-éfficace si et seulement si :

$$\frac{1-t}{1-t_o}\ h_{K,\omega}(\theta) = \frac{1-t}{2}\ d_K(\theta)$$

ce qui est équivalent à la relation annoncée.

Le deuxième point du lemme 4 fournit une propriété des corps convexes à point anguleux en position non symétrique et stables par réduction, qui marque leur spécificité. En effet, de tels corps convexes n'admettent pas de direction bi-éfficace, car dans le cas contraire il existe une direction θ telle que :

$$\frac{h_{K,\omega}(\theta)}{h_{K,\omega}(\theta+\pi)} = \varphi(K) = \frac{h_{K,\omega}(\theta+\pi)}{h_{K,\omega}(\theta)}$$

et donc K a un centre de symétrie ce qui est impossible. Ainsi ces corps convexes admettent au moins trois points anguleux et pour tout point régulier x, l'arc $\gamma(x)$ est réduit à un point anguleux. Dans le cas des polygônes, ils ne peuvent avoir de paire de côtés parallèles.

THEOREME 2.

(1) Les seuls corps convexes dont la forme est préservée par une s-extension sont ceux présentant un centre de symétrie.

(2) Les seuls corps convexes dont la forme est préservée par une t-réduction sont ceux pour lesquels :

$$t_o(x) = t_o(K) \qquad \forall\, x \in Fr(K) \setminus \Lambda(K)$$

PREUVE -

(1) Si $K^s = H_{\omega,\lambda}(K)$, en comparant les diamètres de ces deux ensembles, on établit facilement l'égalité $\lambda = s$. Il suffit alors d'exprimer les fonctions supports de K et K^s par rapport à ω pour démontrer que K est centré en ω.

(2) Démontrons que la condition est nécessaire. D'après le lemme 4 on a :

$$K_t = H_{\omega,\lambda(t)}(K) \quad \text{avec } \{\omega\} = K_{t_o} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{t-t_o}{1-t_o}$$

Soit x un point régulier de K, son homologue x(t) dans K_t est lui aussi régulier ce qui d'après la proposition 4 montre que la direction θ de la droite d'appui en x est t-éfficace.

On peut donc affirmer d'après le lemme 4 que :

$$\frac{h_{K,\omega}(\theta)}{h_{K,\omega}(\theta+\pi)} = \frac{1-t_o}{1+t_o}$$

Ainsi :

$$(1) \qquad h_{K_{t_o},\omega}(\theta) = h_{K,\omega}(\theta) - \frac{1-t_o}{2} \quad d_K(\theta)$$

ce qui prouve que la direction θ est t_o-éfficace et donc que $t_o(x) = t_o(K)$.

Réciproquement, en adoptant les mêmes notations que dans la preuve directe, On peut affirmer que pour toute direction θ ayant un contact régulier avec K la formule (1) est vérifiée, on obtient donc en annulant $h_{K_{t_o},\omega}(\theta)$:

$$h_{K,\omega}(\theta) = \varphi(K) \quad h_{K,\omega}(\theta+\pi).$$

D'après la proposition 4 la direction θ est aussi t-éfficace, pour tout t compris entre $t_o(K)$ et 1, on a donc :

$$h_{K_t,\omega}(\theta) = \frac{1+t}{2} \quad h_{K,\omega}(\theta) - \frac{1-t}{2} \quad h_{K,\omega}(\theta+\pi)$$

$$= \frac{t-t_o}{1-t_o} \quad h_{K,\omega}(\theta)$$

ce qui démontre que K_t est homothétique à K.■

Ce théorème masque la différence existant entre les corps convexes à point anguleux en position non symétrique et les autres. En effet dans ce dernier cas la proposition 5 permet d'affirmer que :

$$t_1(K) = \sup_{x \in Fr(K) \setminus \Lambda(K)} (t_o(x))$$

et la préservation de la forme par une t-réduction n'est possible que lorsque : $t_1(K) = t_o(K)$. C'est-à-dire lorsque K a un centre de symétrie.

En revanche, dans le premier cas, nous avons déjà remarqué que les corps convexes considérés admettent au moins trois points anguleux, notés $(x_i)_{i\in[1,n]}$ et la forme de K sera préservée lorsque :

$$\bigcap_{i\in[1,n]} A(x_i) = K_{t_o}$$

Lorsqu'on se restreint au cas des polygones, cette propriété est vérifiée par les polygones réguliers, mais ne les caractérise pas. Par exemple le polygone engendré par quatres points a,b,c,d situés sur un cercle de diamètre ac et tels que b et d sont symétriques par rapport à ce diamètre, a sa forme préservée par t-réduction. Remarquons pour conclure que dans le cas des polygones réguliers on a le résultat suivant qui nous a été suggéré par un des réferees de cet article.

PROPOSITION 7. Soit K un polygône convexe régulier ayant 2n+1 sommets et t un nombre compris entre $t_o(K)$ et 1, alors le t-érodé de K est homothétique à K dans le rapport :

$$\lambda = \frac{1+t}{2} - \frac{1-t}{2\cos\frac{\pi}{2n+1}}$$

De plus, le coefficient de MINKOWSKI de K vaut :

$$\varphi(K) = \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

PREUVE - On note R le rayon du cercle circonscrit à K, α l'angle $\frac{2\pi}{2n+1}$, ℓ la longueur d'un côté et d la largeur du polygône dans les directions normales aux arêtes. On désigne par ω le centre du cercle circonscrit, a un sommet de K, b la projection de a sur le côté opposé, c le milieu de [a,b] et b(t) le point homologue de b dans K_t. On a :

$$d = R\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\omega c = R - \frac{d}{2} = \frac{R}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

et le rapport d'homothétie est :

$$\lambda = \frac{\omega b(t)}{\omega b} = \frac{t\omega b - (1-t)\omega c}{R\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= t - \frac{(1-t)\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1+t}{2} - \frac{1-t}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Enfin, la condition $\lambda = 0$ donne la valeur de t_o et celle de $\varphi(K)$.■

4. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons mis en évidence deux nouvelles transformations morphologiques qui semblent bien adaptées à l'étude des propriétés de symétrie des corps convexes du plan. Ces transformations utilisent un élément structurant généré par l'objet à étudier et non donné a priori comme il est d'usage en Morphologie Mathématique.

Remarquons à ce propos que d'autres expressions des ensembles K^s et K_t sont possibles permettant chacune une approche constructive. Toutefois, elles ne font pas appel à la notion d'élément structurant. La première de ces expressions définit l'ensemble K^s à l'aide d'un balayage de l'extérieur de K par des segments dont la taille varie en fonction de leur direction, en effet :

$$K^s = K \cup \bigcup_{x \in Fr(K)} \bigcup_{y \in \gamma(x)} H_{x,\frac{1-s}{2}}([x,y])$$

De même la formule :

$$K_t = \overline{K \setminus \bigcup_{x \in Fr(K)} \bigcup_{y \in \gamma(x)} H_{x,\frac{1-t}{2}}([x,y])}$$

donne une expression duale pour l'ensemble K_t.

La deuxième expression possible utilise la notion de glissement[3],[4] d'un homothétique de K sur ou dans K. En effet si K et L sont deux corps convexes du plan, on note $K \boxplus L$ l'union des translatés de L ayant une intersection non vide avec K^s. On a alors[9] :

$$K^s = K \boxplus \frac{1-s}{2} K = K \boxplus \frac{s-1}{2} K$$

c'est-à-dire que l'ensemble K^s est obtenu en faisant glisser, sans le faire rouler, l'ensemble $\frac{1-s}{2}$ K sur K. On peut évidemment définir l'opération duale notée $\boxminus$ en posant :

$$K \boxminus L = K \setminus \bigcup_{\vec{u} \in I} T_{\vec{u}}(L)$$

où I est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $T_{\vec{u}}(K) \cap L^c \neq \emptyset$. Nous avons démontré dans[9] que :

$$K_t = K \boxminus \frac{1-t}{2} K = K \boxminus \frac{t-1}{2} K$$

Le paramètre $t_1(K)$ qui, rappelons-le, mesure le degré d'ouverture anisotrope du corps convexe K s'interprète alors comme la borne inférieure des nombres réels t pour lesquels l'ensemble $\frac{1-t}{2}$ K (ou $\frac{t-1}{2}$ K) glisse librement dans K.

BIBLIOGRAPHIE

1. Delfiner, P., 'Etude de la transformation B T(B) = ~ B + i- B~' , ***Note du Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique de Fontainebleau*** (1969).

2. **Dousson,** P., 'Erosion Anisotrope. Résultats Généraux. Elément Structurant', ***Pré-publication, Département de Mathématique s,*** flJniversitë de Saint-Etienne, 1984) .

3. Firey, W.M.J., 'Inner Contact Measure', ***Mathematika*** 26 (1979), 106-112.

4. Goodey, P.R., 'Connectivity and Freely Rolling Convex Bodies', ***Mathematika*** 29 (1982), 249-259.

5. Grunbaum, B., 'Measure of Symetry for Convex Sets', ***Proc. Symp. Pur. Math.*** *7_* AMS (1963).

6. Guggenheimer, H., 'Applicable Geometry', Krieger Pub Co, New-York (1977) .

7. Hammer, P.C., 'Convex Bodies Associated with a Convex Body', ***Proc. A.M.S. 2*** (1951), 781-793.

8. Hammer, P.C., 'Convex Curves of Constant Minkowski Breadth', ***Proc. Symp. Pur. Math.*** *7* AMS (1963).

9. Jourlin, M., Läget, B., 'Contribution de la Morphologie Directionnelle à la Reconnaissance des Formes', Thèses de Doctorat d'Etat, (Université de Saint-Etienne, 1984).

10. Matheron, G., 'Random sets and Integral Geometry', J. Wiley, New-York (1975) .

11. Minkowski, H. , 'Allgemein Lehrsätre über Konvexe Polyeder', ***Nach-Ges-Wi ss-Gottingen*** (1897), 198-219.

12. Neumann, B.H., ,'On Some Affine Invariants of closed Convex Regions', ***J. Lond. Math. Soc.*** _14 (1939), 262-272.

13. Serra, J., 'Mathematical Morphology and Image Analysis', Ac. Press, New-York (1982).

Adresse des auteurs :

Laboratoire Traitement du Signal
et Instrumentation / UA-CNRS-842
23, rue du Dr Paul MicheIon
42023 SAINT-ETIENNE CEDEX 2
France