J. P. DUFOUR

P. MOLINO

# Chapitre VI Compactification d'actions de $\mathbb{R}^n$ et variables action-angle avec singularités

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 161-183

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___1B_161_0>

# CHAPITRE VI

## Compactification d'actions de $\mathbb{R}^n$ et variables Action-Angle avec singularités

J.P. Dufour et P. Molino

**Résumé :** On considère une action infinitésimale de $\mathbb{R}^n$ sur une variété $V$, munie d'un espace vectoriel d'intégrales premières ; on donne une condition suffisante pour que, au voisinage d'une orbite compacte, il existe une action du tore $\mathbb{T}^n$ ayant les mêmes orbites, et commutant avecl'action infinitésimale donnée. Comme corollaire, on retrouve le théorème de H. Eliasson sur l'existence de variables Action-Angle avec singularités pour un système hamiltonnien.

### I. Introduction.

Dans ce travail, la différentiabilité est entendue, sauf mention expresse du contraire, au sens $C^\infty$.

On considère une variété différentiable $V$, et sur cette variété un couple $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, où $\mathfrak{X}$ est une algèbre de Lie commutative de dimension $n$ de champs de vecteurs différentiables, et $\mathfrak{A}$ un espace vectoriel de dimension $p$ d'intégrales premières communes à tous ces champs de vecteurs. On verra $\mathfrak{X}$ comme définissant une action infinitésimale de $\mathbb{R}^n$ sur $V$ ; si les éléments de $\mathfrak{X}$ sont complets, alors on peut intégrer cette action infinitésimale pour obtenir une action de $\mathbb{R}^n$ sur $V$ admettant $\mathfrak{X}$ comme algèbre de champs fondamentaux. Pour tout $x \in V$, on notera $\mathcal{O}_x$ l'orbite de $x$ par $\mathfrak{X}$.

#### I.1. Ellipticité transverse de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ en un point $x_o$.

Soit $x_o \in V$. On notera $\mathfrak{I}_{x_o}$ l'isotropie de $\mathfrak{X}$ en $x_o$, c.à.d.

l'ensemble des champs de $\mathcal{X}$ qui s'annulent en $x_o$ . On notera $\mathcal{X}_{x_o}$ le sous-espace de $T_{x_o}V$ formé des vecteurs $X(x_o)$ où $X$ parcourt $\mathcal{X}$ ; c'est le tangent à $\mathcal{O}_{x_o}$ en $x_o$. On pose :

$$K_{x_o} = \bigcap_{f\in\mathcal{A}} \operatorname{Ker} df_{x_o}$$

et

$$N^T_{x_o} = K_{x_o} / \mathcal{X}_{x_o} .$$

Tout élément $X$ de $\mathcal{J}_{x_o}$ est tel que son linéarisé $X'_{x_o}$ en $x_o$ laisse invariants $K_{x_o}$ et $\mathcal{X}_{x_o}$. Il détermine donc un champ de vecteurs linéaire $X'^{x_o}_T$ sur $N^T_{x_o}$, que l'on appellera "linéarisé transverse" de $X$ en $x_o$. On notera $\mathcal{X}'^{x_o}_T$ l'algèbre de Lie abélienne formée par ces linéarisés transverses.

De même , si $\mathcal{B}_{x_o}$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $df_{x_o} = 0$, pour toute $f \in \mathcal{B}_{x_o}$ , le jet d'ordre 2 en $x_o$ de la fonction $f-f(x_o)$ détermine une forme quadratique sur $K_{x_o}$ , dont le noyau contient $\mathcal{X}_{x_o}$ . Par passage au quotient, on obtient une forme quadratique $f'^{x_o}_T$ sur $N^T_{x_o}$ . L'ensemble des formes quadratiques ainsi obtenues sera noté $\mathcal{A}'^{x_o}_T$.

<u>Définition.</u> Le couple $(\mathcal{X}'^{x_o}_T, \mathcal{A}'^{x_o}_T)$ est le linéarisé transverse de $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ en $x_o$. On dira que $(\mathcal{X} , \mathcal{A})$ est <u>transversalement elliptique en $x_o$</u> si son linéarisé transverse est tel que :

(i) $\dim \mathcal{J}_{x_o} = \dim \mathcal{X}'^{x_o}_T$ et $\dim \mathcal{B}_{x_o} = \dim \mathcal{A}'^{x_o}_T$

(ii) il existe des coordonnées linéaires $(x^1,\ldots x^s,y^1,\ldots,y^s)$ sur $N^T_{x_o}$ telles que $\mathcal{X}'^{x_o}_T$ admette pour base les rotations infinitésimales $y^j\dfrac{\partial}{\partial x^j} - x^j\dfrac{\partial}{\partial y^j}$, $j = 1,\ldots,s$, et que $\mathcal{A}'^{x_o}_T$ admette pour base les fonctions $(x^j)^2 + (y^j)^2$, $j = 1,\ldots,s$.

On peut réécrire la condition (ii) en disant que $N^T_{x_o}$ admet une structure d'espace vectoriel symplectique pour laquelle $\mathcal{X}'^{x_o}_T$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal du groupe $SP(N_{x_o})$, $\mathcal{A}'^{x_o}_T$ étant l'algèbre de

Poisson des hamiltonniens correspondants.

On observera également que la condition d'ellipticité transverse impose les relations

$$\dim V = n + p \ ; \ \dim \mathcal{O}_{x_o} = n - s \ ; \ \operatorname{rang}_{x_o} \mathfrak{A} = p - s,$$

où $\operatorname{rang}_{x_o} \mathfrak{A}$ est égal à $\dim\left\{df_{x_o} / f \in \mathfrak{A}\right\}$.

## I.2. Le résultat principal.

**Théorème.** Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ un couple formé d'une algèbre de Lie abélienne de dimension $n$ de champs de vecteurs sur la variété $V$, et d'un espace vectoriel d'intégrales premières de cette algèbre de Lie. On considère un point $x_o \in V$ tel que :
(i) l'orbite $\mathcal{O}_{x_o}$ de $x_o$ par $\mathfrak{X}$ est compacte
(ii) $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ est transversalement elliptique en $x_o$ ;
alors il existe un voisinage $U$ de $x_o$, saturé d'orbites de $\mathfrak{X}$, et une action différentiable effective du tore $\mathbb{T}^n$ sur $U$ ayant les mêmes orbites que $\mathfrak{X}$ et laissant invariants tous les champs de vecteurs appartenant à $\mathfrak{X}$.

Dans le cas où $s = 0$, on retrouve un résultat élémentaire : l'action infinitésimale de $\mathbb{R}^n$ définie par $\mathfrak{X}$ est localement libre au voisinage de $\mathcal{O}_{x_o}$, qui est nécessairement un tore. L'existence des intégrales premières assure que la feuille $\mathcal{O}_{x_o}$ du feuilletage en orbites est sans holonomie ; par suite, les orbites voisines sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : U \to \overline{U} \subset \mathbb{R}^p$ de fibre-type $\mathbb{T}^n$. Dans $U$, les champs de $\mathfrak{X}$ sont complets et définissent donc une action $\varphi$ de $\mathbb{R}^n$. L'isotropie $I_x$ de cette action en un point $x$ de $U$ dépend alors différentiablement de $\pi(x)$ et définit en chaque point un réseau dans $\mathbb{R}^n$. Le passage au quotient par ce réseau fournit l'action cherchée de $\mathbb{T}^n$.

Dans le cas général, la situation est la suivante : pour $x \in \mathcal{O}_{x_o}$, soient $K_x = \bigcap_{f \in \mathfrak{A}} \operatorname{Ker} df_x$ et $N_x^T = K_x / \mathfrak{X}_x$. Alors $\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_o}} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{x_o}} N_x^T$ est un fibré vectoriel sur $\mathcal{O}_{x_0}$ de fibre-type $\mathbb{R}^{2s}$. L'algèbre $\mathfrak{X}$ se relève - via les groupes locaux à un paramètre - en une algèbre abélienne $\mathfrak{X}^B$ d'automorphismes infinitésimaux du fibré principal $B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}})$ des repères de $\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}$.

Les hypothèses faites impliquent que les orbites de $\mathfrak{X}^B$ sont des tores de dimension n, sous-fibrés principaux de $B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}})$ de groupe structural $\mathbb{T}^s$.

Par intégration des champs de $\mathfrak{X}^B$, on définit une action $\varphi^B$ de $\mathbb{R}^n$ comme groupe d'automorphismes de $B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}})$. Utilisant les propriétés de l'espace $\mathcal{A}$ d'intégrales premières, on vérifiera :

(i) que les champs de $\mathfrak{X}$ sont encore complets dans un voisinage saturé U de $\mathcal{O}_{x_0}$ (ii) que, pour l'action correspondante $\varphi$ de $\mathbb{R}^n$ sur U, le réseau $\Gamma_{x_0}$ d'isotropie de l'action $\varphi^B$ se prolonge dans U en réseau $\Gamma_x$ dépendant différentiablement de x, et tel que $\Gamma_x$ soit contenu dans l'isotropie $I_x$ de l'action $\varphi$.

Il ne restera plus alors qu'à passer au quotient par le réseau $\Gamma_x$ pour obtenir l'action cherchée de $\mathbb{T}^n$.

## I.3. Application aux variables Action-Angle avec singularités.

On considère un système hamiltonien $(P,\omega,H)$, où P est une variété différentiable de dimension 2n munie de la forme symplectique $\omega$ et du hamiltonien différentiable $H : P \to \mathbb{R}$.

**Définition.** Un système de coordonnées Action-Angle avec singularités de rang $\ell$, adapté au système, sur un ouvert U de P est un système $(x^1,y^1,\dots,x^k,y^k,q^1,\dots,q^\ell,\theta^1,\dots,\theta^\ell)$ avec $n = k + \ell$, tel que :

(i) $x \to (x^1(x),\dots,\theta^\ell(x))$ définisse un difféomorphisme $\phi$ de U sur $D(0,r_1)\times\dots\times D(0,r_k) \times \Omega \times \mathbb{T}^\ell$, où $D(0,r_i)$ est le disque ouvert de rayon $r_i$ dans $\mathbb{R}^2$, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$ et $\mathbb{T}^\ell$ le tore de dimension $\ell$

(ii) $\omega = \phi^*\omega_0$, où $\omega_0 = \sum_{i=1}^{k} dx^i \wedge dy^i + \sum_{j=1}^{\ell} dq^j \wedge d\theta^j$.

(iii) $H \circ \phi^{-1}$ n'est fonction que de
$q^1,\dots,q^\ell,\ (x^1)^2 + (y^1)^2,\dots,(x^k)^2 + (y^k)^2$.

Les coordonnées Action-Angle classiques correspondent à $k = 0$. Les sous-variétés $(x^1, y^1) = 0$ définissent les singularités des coordonnées Action-Angle. On peut utiliser les coordonnées polaires classiques $(\rho^1, \varphi^1)$ sur les disques $D(0, r_1)$ ; alors, en dehors des singularités, le système $(\frac{1}{2}(\rho^1)^2, \ldots, \frac{1}{2}(\rho^k)^2, q^1, \ldots, q^\ell, \varphi^1, \ldots, \varphi^k, \theta^1, \ldots, \theta^\ell)$ forme un système de coordonnées Action-Angle classique. Le passage de ces dernières à $(x^1, y^1, \ldots, x^k, y^k, q^1, \ldots, q^\ell, \theta^1, \ldots, \theta^\ell)$ généralise le passage des "coordonnées de Delaunay" aux "coordonnées de Poincaré" dans le problème des deux corps [A-M].

Le théorème d'Arnold-Liouville [A-M] donne un critère d'existence de coordonnées Action-Angle classiques ; il a été généralisé depuis de plusieurs manières [voir [F-M] et les références qui y figurent, [D-D], [F]], en particulier pour obtenir des coordonnées Action-Angle à singularités : d'abord par Vey [V], dans le cas analytique avec $\ell = 0$, et Rüsssmann [R] dans le cas $n = 2$ ; enfin, réc emment, par Eliasson [E].

Utilisant la notion d'ellipticité transverse introduite en I.1, on peut énoncer le théorème d'Eliasson de la manière suivante :

> <u>Théorème d'Eliasson.</u> Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Lie abélienne [pour le crochet de Poisson] de dimension $n$ d'intégrales premières du système hamiltonien $(P, \omega, H)$. On note $\mathfrak{A}^\#$ l'algèbre de Lie abélienne des champs hamiltoniens correspondants. Soit $x_o \in P$ tel que :
>
> (i) l'orbite $F_{x_o}$ de $x_o$ par $\mathfrak{A}^\#$ est compacte et de dimension $\ell$
>
> (ii) $(\mathfrak{A}^\#, \mathfrak{A})$ est transversalement elliptique en $x_o$.
>
> Alors, il existe, sur un voisinage ouvert $U$ de $x_o$ dans $P$, un système de coordonnées Action-Angle avec singularités de rang $\ell$ adapté au système.

Ici, la condition (ii) d'ellipticité transverse se traduit de la façon suivante : la forme $\omega_{x_o}$ restreinte à $K_{x_o}$ a pour noyau $\mathfrak{A}^\#_{x_o}$ et définit donc une forme symplectique réduite $\omega^T_{x_o}$ sur $N^T_{x_o}$. Si l'on veut, c'est la version infinitésimale du procédé classique de réduction de l'espace des phases par une action hamiltonienne, voir [A-M]. L'isotropie $\mathfrak{I}_{x_o}$ de $\mathfrak{A}^\#_{x_o}$ en $x_o$ opère naturellement dans $(N^T_{x_o}, \omega^T_{x_o})$ et définit ainsi une sous-algèbre abélienne $\mathfrak{I}^T_{x_o}$ <u>d'isotropie infinitésimale réduite</u> de

$\mathfrak{sp}(N^T_{x_o}, \omega^T_{x_o})$. La condition (ii) signifie alors que $\mathfrak{J}^T_{x_o}$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $SP(N^T_{x_o}, \omega^T_{x_o})$.

Montrons comment le théorème d'Eliasson se déduit de façon élémentaire de notre résultat principal : d'après celui-ci, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_o$ dans $P$, saturé d'orbites de $\mathfrak{F}^*$, et une action différentiable effective

$$\Phi : \mathbb{T}^n \times U \to U$$

qui a les mêmes orbites que $\mathfrak{F}^*$ et respecte les champs appartenant à $\mathfrak{F}^*$.

L'action $\Phi$ étant effective, la réunion $U'$ dans $U$ des orbites de dimension $n$ est un ouvert dense connexe de $U$ [c'est une propriété bien connue des actions de groupes de Lie compacts]. Dans $U'$, les hypothèses du théorème d'Arnold-Liouville sont satisfaites en chaque point pour le système d'intégrales premières $\mathfrak{F}$, ce qui permet [au voisinage de chaque point] de construire une action symplectique $\Phi'$ de $\mathbb{T}^n$ ayant les mêmes orbites que $\Phi$ et commutant avec celle-ci. Ceci implique que l'on passe [localement] de $\Phi$ à $\Phi'$ par un changement de base du tore à coefficients entiers ; il en résulte que $\Phi$ est elle-même symplectique dans $U'$, donc par continuité dans $U$ tout entier.

Ceci étant, il ne reste plus qu'à appliquer les résultats classiques concernant les formes normales d'actions symplectiques de tores, voir par exemple [A-M-M], pour arriver au résultat.

## II. Démonstration du résultat principal.

Comme ci-dessus, la dimension de $V$ sera $n + p$, celle de $\mathfrak{X}$ sera $n$, celle de $\mathfrak{F}$ sera $p$, et celle de $N_{x_o}$ sera $2s$. On notera $r = n - s$ la dimension de l'orbite $\mathcal{O}_{x_o}$, et $r' = p - s$ celle de $d\mathfrak{F}_{x_o} = \{df_{x_o} / f \in \mathfrak{F}\}$.

La démonstration se fera en utilisant une récurrence sur $s$ : on se ramènera par un procédé d'éclatement du cas $\dim \mathfrak{J}_{x_o} = s$ au cas $\dim \mathfrak{J}_{x_o} < s$.

Observons au préalable qu'on ne change rien au problème si l'on remplace $\mathfrak{F}$ par un autre espace $\mathfrak{F}_1$ de même dimension d'intégrales premières de $\mathfrak{X}$ ayant la propriété d'engendrer fonctionnellement la même algèbre $\hat{\mathfrak{A}}$ de fonctions sur V. En particulier, on pourra toujours se ramener au cas où toutes les fonctions de $\mathfrak{A}$ s'annulent en $x_o$.

## II.1. Construction de bonnes coordonnées, et intégration des champs de $\mathfrak{X}$ au voisinage de $\mathcal{O}_{x_o}$.

**Lemme 1.** Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_{x_o}$ de $x_o$, muni de coordonnées locales $(v,\mu,u) = (v^1,\dots,v^r,\mu^1,\dots,\mu^{r'},u^1,\dots,u^{2s})$ telles que, en notant $x = (x^1,\dots,x^s) = (u^1,\dots,u^s)$ et $y = (y^1,\dots,y^s) = (u^{s+1},\dots,u^{2s})$, on ait les propriétés suivantes :

(i) les coordonnées de $x_o$ sont nulles.

(ii) $\mathfrak{X}$ admet une base $(V_1,\dots,V_r,W_1,\dots,W_s)$ qui s'écrit en coordonnées locales

$$V_k = \frac{\partial}{\partial v^k} \qquad \text{pour } k = 1,\dots,r$$

$$W_i = \sum_{k=1}^{r} W_i^k(\mu,u)\frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{a=1}^{2s} W''^a_i(\mu,u)\frac{\partial}{\partial u^a} \qquad \text{pour } i = 1,\dots,s$$

où les $W_i$ s'annulent en $x_o$, où $W''^a_i(\mu,0) = 0$, et où le linéarisé en $x_o$ de $\sum_{a=1}^{2s} W''^a_i(\mu,u)\frac{\partial}{\partial u^a}$ est égal à $y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ pour $i = 1,\dots,s$.

(iii) $\mathfrak{A}$ admet une base $(g_1,\dots,g_{r'},f_1,\dots,f_s)$ qui s'écrit en coordonnées locales

$$g_{k'}(v,\mu,u) = \mu^{k'} \qquad \text{pour } k' = 1,\dots,r'$$

$$f_j(v,\mu,u) = \gamma_j^o(\mu) + (x^j)^2 + (y^j)^2 + \gamma_j^2(\mu)(u) + \|u\|^2\epsilon_j(\mu,u)$$

pour $j = 1,\dots,s$, où $\gamma_j^2(\mu)$ est une forme quadratique en $u$, dépendant du paramètre $\mu$, avec $\gamma_j^o(0) = \gamma_j^2(0) = 0$

$$\|u\|^2 = \sum_{a=1}^{2s} |u^a|^2 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to o} \epsilon_j(\mu,u) = 0$$

(iv) la fonction $f = f_1+\dots+f_s$ s'écrit en coordonnées locales

$f(v,\mu,u) = \|u\|^2 + \gamma(\mu)$, où $\gamma$ est une fonction différentiable nulle pour $\mu = 0$.

Démonstration. On commence par choisir des bases $(V_1,\dots,V_r, W_1,\dots,W_s)$ de $\mathfrak{X}$, et $(g_1,\dots,g_{r'},f_1,\dots,f_s)$ de $\mathfrak{A}$, telles que $W_1,\dots,W_s,df_1,\dots,df_s$ s'annulent en $x_o$. On peut alors choisir des coordonnées $(v,\mu,u)$ centrées en $x_o$, telles que :

$$V_k = \frac{\partial}{\partial v^k} \text{ pour } k = 1,\dots,r, \quad \text{et} \quad g_{k'}(v,\mu,u) = \mu^{k'} \quad \text{pour } k' = 1,\dots,r'.$$

On a alors nécessairement :

$$W_i = \sum_{k=1}^{r} W_i^k(\mu,u)\frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{a=1}^{2s} W''^a_i(\mu,u)\frac{\partial}{\partial u^a} \qquad \text{pour } i = 1,\dots,s.$$

Les espaces $K_{x_o}$ et $\mathfrak{X}_{x_o}$ s'identifient aux espaces engendrés respectivement par $\left(\frac{\partial}{\partial v^1},\dots,\frac{\partial}{\partial v^r},\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{2s}}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial v^1},\dots,\frac{\partial}{\partial v^r}\right)$ ; donc $N^T_{x_o}$ s'identifie naturellement à l'espace engendré par $\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{2s}}\right)$. Pour $j = 1,\dots,s$, la forme quadratique sur $N^T_{x_o}$ définie par le jet d'ordre 2 de $f_j$ correspond à $\displaystyle\sum_{a,b=1}^{2s} \frac{\partial^2 f_j}{\partial u^a \partial u^b}(0,\dots,0)u^a u^b$. De même, le linéarisé transverse de $W_i$ correspond, pour $i = 1,\dots,s$, au champ

$\displaystyle\sum_{a,b=1}^{2s} \frac{\partial W''^a_i}{\partial u^b}(0,\dots,0)u^b \frac{\partial}{du^a}$. L'hypothèse d'ellipticité transverse montre alors que, par un changement linéaire sur les $u^a$, on peut imposer :

- que le linéarisé en $x_o$ de $\displaystyle\sum_{a=1}^{2s} W''^a_i(\mu,u)\frac{\partial}{\partial u^a}$ s'écrive

$$y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\substack{a=1,\dots,2s\\ k'=1,\dots,r'}} \lambda^a_{ik'}\,\mu^{k'}\frac{\partial}{\partial u^a}, \text{ pour } i = 1,\dots,s,$$

- que $f_j(v,\mu,u) = \gamma^0_j(\mu) + \gamma^1_j(\mu)(u) + (x^j)^2 + (y^j)^2 + \gamma^2_j(\mu)(u) + \|u\|^2\epsilon_j(\mu,u)$, pour $j = 1,\dots,s$, où $\gamma_j^1(\mu)$ et $\gamma_j^2(\mu)$ sont des formes respectivement linéaire et quadratique en $u$, dépendant du paramètre $\mu$, et telles que $\gamma_j^1(0) = 0$ et $\gamma_j^2(0) = 0$.

Ceci étant, $f = f_1+\dots+f_s$ apparait comme un déploiement de paramètre $\mu$ d'une fonction de Morse des variables $u^a$, de la forme $u \to \|u\|^2+$ termes de degré > 2. La théorie élémentaire du déploiement [qui peut, ici, être retrouvée directement "à la main"] permet d'affirmer qu'il existe un changement de variables $(\mu,u) \to (\mu,h_\mu(u))$, dont le jet d'ordre 1 en (0,0) est l'identité, et qui met $f$ sous la forme (iv) ; cf [W].

Dans les nouvelles coordonnées, la fonction $\|u\|^2= f(v,\mu,u) - \gamma(\mu)$ est une intégrale première locale de $\mathfrak{X}$. En écrivant en particulier que la dérivée de $\|u\|^2$ suivant $W_i$ est nulle, on vérifie la propriété (ii).

Fixons maintenant $j$, et écrivons que $W_i.f_j = 0$ pour $i = 1,\dots,s$. On notera $f_j^{(\mu)}$ la fonction $f_j$, regardée comme fonction de $u^1,\dots,u^{2s}$, à paramètre $\mu$, et $W''^{(\mu)}_i$ le champ de vecteurs $W''_i = \sum_{a=1}^{2s} W'^a_i(\mu,u) \dfrac{\partial}{\partial u^a}$, regardé comme champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{2s}$, à paramètre $\mu$. On remarque que $W''^{(\mu)}_i$ est nul à l'origine de $\mathbb{R}^{2s}$, et on notera $\overline{W}''^{(\mu)}_i$ son linéarisé à l'origine. En écrivant que $W''^{(\mu)}_i.f_j^{(\mu)}=0$, donc que la partie principale à l'origine de cette fonction est nulle, il vient
$\langle \gamma_j^1(\mu), \overline{W}''^{(\mu)}_i\rangle = 0$. Posant :

$$\gamma_j^1(\mu)(u) = \sum_{a=1}^{2s} \varphi_{ja}(\mu)u^a \qquad \text{et} \qquad \overline{W}''^{(\mu)}_i = \sum_{a,b=1}^{2s} \eta^a_{ib}(\mu)u^b \frac{\partial}{\partial u^a},$$

il vient :

$$\sum_{a=1}^{2s} \varphi_{ja}(\mu)\eta^a_{ib}(\mu) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1,\dots,s \quad \text{et} \quad b = 1,\dots,2s.$$

Considérons ceci comme un système linéaire de $2s^2$ équations en les inconnues $\varphi_{ja}(\mu)$. Pour $\mu = 0$, compte tenu de (ii), ce système est de rang $2s$. Il en sera de même pour $\mu$ assez petit, ce qui implique la nullité des fonctions $\varphi_{ja}(\mu)$. Ainsi, au besoin en restreignant le domaine $\mathcal{U}_{x_0}$, on vérifie $\gamma_j^1(\mu) = 0$, ce qui complète le point (iii) -//-

La fonction différentiable $\gamma(\mu^1,\dots,\mu^{r'})$ qui apparait au point (iv) du lemme ci-dessus n'est à priori définie qu'au voisinage de l'origine. On la prolonge arbitrairement en une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^{r'}$, ce qui permet de définir sur V la fonction globale

$$h = f - \gamma(g_1, \ldots, g_{r'})$$

qui est par construction une intégrale première de $\mathfrak{X}$. L'expression de cette fonction dans les "bonnes coordonnées" $(v, \mu, u)$ est

$$h(v, \mu, u) = \|u\|^2.$$

<u>On notera S la partie de V d'équation $h = 0$.</u> C'est automatiquement une réunion d'orbites de $\mathfrak{X}$.

<u>Lemme 2.</u> On peut restreindre V de manière que :

(i) S soit une sous-variété plongée V

(ii) au voisinage de tout point de S il existe des coordonnées locales $(v, \mu, u)$ dans lesquelles h s'écrive $\|u\|^2$

(iii) les champs appartenant à $\mathfrak{X}$ soient complets.

<u>Démonstration.</u> En transportant les coordonnées obtenues au lemme 1 par un difféomorphisme local obtenu en intégrant un champ appartenant à $\mathfrak{X}$, on peut construire de "bonnes coordonnées" au voisinage d'un point x quelconque de l'orbite $\mathcal{O}_{x_0}$. En restreignant V à un voisinage tubulaire assez petit de $\mathcal{O}_{x_0}$, on peut ainsi assurer le point (ii), qui implique (i).

Observons maintenant que, dans tous les systèmes de "bonnes coordonnées" considérés, la base $(g_1, \ldots, g_{r'}, f_1, \ldots, f_s)$ de $\mathfrak{k}$ utilisée est la même, et aussi la fonction $h = \|u\|^2$. On peut définir l'application globale $G : V \to \mathbb{R}^{r'}$ de composantes $g_1, \ldots, g_{r'}$, dont la restriction $G_S$ à S est une submersion. De plus, $G_S^{-1}(0)$ a l'orbite $\mathcal{O}_{x_0}$ comme composante connexe. Quitte à restreindre V, on pourra donc supposer que $G_S : S \to \Omega_S \subset \mathbb{R}^{r'}$ est une fibration triviale, dont $\mathcal{O}_{x_0}$ est la fibre audessus de l'origine. En restriction à S, les orbites de $\mathfrak{X}$ ont toutes pour dimension r, et sont les fibres de $G_S$.

Remarquons finalement que la fonction $h + \|G\|^2$ s'écrit dans les bonnes coordonnées :

$$\sum_{i=1}^{s} [(x^i)^2 + (y^i)^2] + \sum_{k'=1}^{r'} (\mu^{k'})^2 .$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la condition $h + \|G\|^2 < \epsilon$ définit un voisinage tubulaire de $\mathcal{O}_{x_o}$, dans lequel les orbites de $\mathfrak{X}$ sont tracées sur les tubes compacts d'équation $h + \|G\|^2 = $ cste. En remplaçant $V$ par un tel voisinage tubulaire, on en déduit que les champs de $\mathfrak{X}$ sont complets. -//-

## II.2. Contrôle de l'isotropie au voisinage de $\mathcal{O}_{x_o}$.

Utilisant désormais les conclusions du Lemme 2, on peut intégrer les champs de vecteurs de $\mathfrak{X}$ de manière à définir une action $\varphi : E \times V \to V$, où $E \cong \mathbb{R}^n$. On notera $\varphi(\tau, x) = \varphi_\tau(x)$.

Pour $x \in \mathcal{O}_{x_o}$, on note comme en I.3, $K_x = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \operatorname{Ker} df_x$, $N_x^T = K_x / \mathfrak{X}_x$ ;

$\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{x_o}} N_x^T$ est un fibré vectoriel sur $\mathcal{O}_{x_o}$ de fibre-type $\mathbb{R}^{2s}$,

et de fibré de repères $B(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$. L'action $\varphi$ se relève de façon naturelle en une action $\varphi^B : E \times B(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}}) \to B(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$, par laquelle $E$ agit comme groupe d'automorphismes de ce fibré de repères.

Le jet d'ordre 2 de $h$ détermine en tout point $x$ de $\mathcal{O}_{x_o}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $N_x^T$, ce qui munit $\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}}$ d'une structure de fibré vectoriel euclidien. Cette structure est invariante par l'action de $E$. Si donc $O(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$ est le fibré des repères orthonormés correspondant, l'action $\varphi^B$ laisse invariant ce sous-fibré principal de $B(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$. L'isotropie $I_{x_o}$ de $\varphi$ en $x_o$ se relève en un tore maximal dans le groupe orthogonal de $N^T_{x_o}$. Il en résulte que les orbites de $\varphi^B$ sont des tores de dimension $n$, c.-à-d. que l'isotropie de $\varphi^B$ en un point de $O(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$ [elle est d'ailleurs indépendante du point choisi] sera un réseau

$\Gamma_{x_o}$ de E, contenu dans $I_{x_o}$.

On dira que $\Gamma_{x_o}$ est <u>l'isotropie transverse</u> de l'action $\varphi$ en $x_o$.

Le pas essentiel de la démonstration du résultat principal est la proposition suivante :

> <u>Proposition 1.</u> Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $x_o$ dans V et, pour tout $\tau_o \in \Gamma_{x_o}$, une unique application différentiable $\tau : \mathcal{V} \to E$ vérifiant :
> (i) $\tau(x_o) = \tau_o$
> (ii) pour tout $x \in \mathcal{V}$, $\tau(x)$ appartient à l'isotropie $I_x$ de $\varphi$ en x.

Montrons comment ce résultat entraîne facilement le théorème : on choisit une base $(\tau_o^1,\ldots,\tau_o^n)$ du réseau $\Gamma_{x_o}$, et on prolonge pour tout i l'élément $\tau_o^i$ en une application différentiable $\tau^i : \mathcal{V} \to E$ à valeurs dans l'isotropie de $\varphi$. On restreint $\mathcal{V}$ pour que les $\tau^i$ restent linéairement indépendants, puis on le sature d'orbites [on sait que l'isotropie est constante sur chaque orbite]. Finalement, on obtient l'action $\psi : \mathbb{T}^n \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ cherchée en posant :

$$\psi(t_1,\ldots,t_n,x) = \varphi(t_1\tau^1(x)+\ldots+ t_n\tau^n(x),x).$$

<u>Reste à démontrer la proposition 1.</u> La fin de ce travail est consacré à cette démonstration, qui se fait par <u>récurrence sur s.</u>

<u>Si s = 0</u>, $\varphi$ est localement libre, et $\mathcal{A}$ est engendré par p fonctions dont les différentielles restent linéairement indépendantes au voisinage de l'orbite $\mathcal{O}_{x_o}$. La résolution de l'équation $\varphi_{\tau(x)}(x) = x$ en la fonction inconnue $\tau : \mathcal{V} \to E$ vérifiant $\tau(x_o) = \tau_o$ se fait par simple application du théorème des fonctions implicites, $\tau$ ne dépendant en fait que des p variables transverses aux orbites. D'où le résultat.

<u>On supposera dans la suite le résultat démontré dans tous les cas où la dimension de $N^T_{x_o}$ est < s.</u> L'idée est d'utiliser un éclatement de V le long de la sous-variété S pour se ramener à cette situation.

## II.3. Description générale de la méthode d'éclatement.

Le principe de l'éclatement est de remplacer la sous-variété S par le fibré en espaces projectifs associé au fibré normal à S. En fait, ici, on utilisera la fonction h pour décrire un "éclatement orienté" qui s'identifie au revêtement d'orientation du précédent.

La fonction h induit une métrique sur le fibré normal $\mathcal{N}_S^r$ à S [dont la restriction à $\mathcal{O}_{x_0}$ n'est autre que $\mathcal{N}^r$] ; on note $\check{S}$ le fibré en sphères de rayon 1 pour cette métrique. En tant qu'ensemble, la variété éclatée $\check{V}$ sera

$$\check{V} = (V-S)^- \cup \check{S} \cup (V-S)^+$$

où $(V-S)^-$ et $(V-S)^+$ sont deux copies de $(V-S)$. On construit un atlas sur $\check{V}$ comme suit : au voisinage de tout point de S, on a une carte $(\mathcal{U},\eta)$ munie de "bonnes coordonnées" $(v,\mu,u)$ dans lesquelles $h = \|u\|^2$. On associe à cette carte la "carte cylindrique" $(\check{\mathcal{U}},\check{\eta})$ de $\check{V}$, où

$$\check{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}-S)^- \cup (\mathcal{U} \check{\cap} S) \cup (\mathcal{U}-S)^+$$

$\check{\eta} : \check{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r'} \times \mathbb{R} \times S^{2s-1}$, $S^{2s-1}$ étant la sphère unité de $\mathbb{R}^{2s}$, avec :

$$\check{\eta}(x^{\pm}) = (v,\mu,\pm\|u\|, \frac{u}{\pm\|u\|}) \quad \text{si} \quad \eta(x) = (v,\mu,u)\ , \quad u \neq 0,$$

$$\check{\eta}(Y_x) = (v,\mu,0,u) \quad \text{si} \quad \eta(x) = (v,\mu,0) \quad \text{et} \quad Y_x = \sum_a u^a \frac{\partial}{\partial u^a}\Big|_x \bmod T_x S,$$

$$u = (u^1,\dots,u^{2s}) \in S^{2s-1}.$$

On peut également regarder $\check{\eta}$ comme à valeurs dans $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r'} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2s}$, ce qui définit sur $\check{\mathcal{U}}$ des "coordonnées cylindriques" $(v,\mu,\rho,\bar{u})$, dans lesquelles l'application d'éclatement $\check{E} : \check{V} \to V$ s'écrit $(v,\mu,\rho,\bar{u}) \to (v,\mu,\rho\,\bar{u})$.

Tout champ de vecteurs dans V tangent à S se relève de manière unique en un champ de vecteurs sur $\check{V}$. Par exemple, si X est le champ d'expression locale

$$X = \sum_k X^k(v,\mu,u)\frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{k'} X'^{k'}(v,\mu,u)\frac{\partial}{\partial \mu^{k'}} + \sum_a X''^a(v,\mu,u)\frac{\partial}{\partial u^a}$$

ayant h comme intégrale première, alors il se relève en $\check{X}$ d'expression locale [aux points où $\rho \neq 0$] :

$$(1) \quad \check{X} = \sum_k X^k(v,\mu,\rho\bar{u}) \frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{k'} X'^{k'}(v,\mu,\rho\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \mu^{k'}} + \frac{1}{\rho} \sum_a X''^a(v,\mu,\rho\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a}.$$

De même, tout difféomorphisme $\Phi$ de $V$ respectant $S$ se relève de manière unique en un difféomorphisme $\check{\Phi}$ de $\check{V}$ ; si, en particulier, $\Phi$ respecte $h$ et a l'expression locale $(v,\mu,u) \to (V(v,\mu,u), M(v,\mu,u), U(v,\mu,u))$, alors $\check{\Phi}$ a l'expression locale [aux points où $\rho \neq 0$] :

$$(2) \qquad \check{\Phi}(v,\mu,\rho,\bar{u}) = (V(v,\mu,\rho\bar{u}), M(v,\mu,\rho\bar{u}), \rho, \frac{1}{\rho} U(v,\mu,\rho\bar{u})).$$

L'action $\varphi : E \times V \to V$, pour laquelle $S$ est une sous-variété invariante, se relève ainsi en une action $\check{\varphi} : E \times \check{V} \to \check{V}$ de $E = \mathbb{R}^n$ sur $\check{V}$.

Une fonction différentiable $\check{\chi} : \check{V} \to \mathbb{R}$ sera dite <u>descendable</u> s'il existe une fonction différentiable $\chi : V \to \mathbb{R}$ telle que $\check{\chi} = \chi \circ \check{E}$.

<u>Lemme 3.</u> La fonction différentiable $\check{\chi} : \check{V} \to \mathbb{R}$ est descendable si, et seulement si :

(i) elle est constante sur les préimages des points par $\check{E}$.

(ii) en coordonnées cylindriques $(v,\mu,\rho,\bar{u})$, elle admet aux points de $\check{S}$ une série de Taylor en $\rho$ de la forme

(*) $\quad \chi_0(v,\mu,\bar{u}) + \rho\chi_1(v,\mu,\bar{u}) + \ldots + \rho^k\chi_k(v,\mu,\bar{u}) + \ldots$

où les $\chi_k(v,\mu,\bar{u})$ sont, pour $v$ et $\mu$ fixés, polynômiales et homogènes de degré $k$ en les variables $\bar{u}$.

<u>Remarque</u> : les fonctions $\chi_k(v,\upsilon,\bar{u})$ n'ont pas une expression unique en $\bar{u}$ [compte tenu de $\|\bar{u}\| = 1$]. Toutefois, leur expression polynômiale et homogène de degré $k$ en $\bar{u}$ est bien unique !

<u>Démonstration</u> : - Si $\check{\chi}$ est descendable, on a $\check{\chi}(v,\mu,\rho,\bar{u}) = \chi(v,\mu,\rho\bar{u})$, ce qui entraine visiblement (i) (ii).

- Réciproquement, si $\check{\chi}$ vérifie (i), elle est "ensemblistement" descendable : il existe $\chi : V \to \mathbb{R}$ unique telle que $\check{\chi} = \chi \circ \check{E}$. De plus, $\chi$ est automatiquement différentiable sur $V$-$S$. Reste donc à vérifier sa différentiabilité aux points de $S$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\chi^k(v,\mu,u) = \chi_o(v,\mu,u) + \chi_1(v,\mu,u) + \ldots + \chi_k(v,\mu,u).$$

L'hypothèse (ii) implique :

$$\check{\chi}(v,\mu,\rho,\bar{u}) - \chi^k \circ \check{E}(v,\mu,\rho,\bar{u}) = \rho^k \epsilon(v,\mu,\rho,\bar{u}), \text{ avec } \lim_{\rho\to o} \epsilon(v,\mu,\rho,\bar{u}) = 0.$$

On en déduit :

$$\chi(v,\mu,u) - \chi^k(v,\mu,u) = \|u\|^k\, \bar{\epsilon}(v,\mu,u), \text{ avec } \lim_{u\to o} \bar{\epsilon}(v,\mu,u) = 0$$

ce qui démontre l'existence en tout point de $S$ des dérivées partielles successives de $\chi$ par rapport aux variables $u^a$. On peut recommencer l'argument en remplaçant $\check{\chi}$ par l'une quelconque de ses dérivées partielles par rapport aux variables $v^k, \mu^{k'}$; d'où le résultat. -//-

## II.4. Désingularisation de l'action $\varphi$.

On notera $\check{\mathfrak{X}}$ l'espace vectoriel des champs fondamentaux de l'action relevée $\check{\varphi} : E \times \check{V} \to \check{V}$. On utilisera la base $(\check{V}_1,\ldots,\check{V}_r,\check{W}_1,\ldots,\check{W}_s)$ de $\check{\mathfrak{X}}$ obtenue en relevant les éléments de la base de $\mathfrak{X}$ utilisée au lemme 1.

Reprenons les notations de ce lemme. Pour $k' = 1,\ldots,r'$, on posera $\check{g}_{k'} = g_{k'} \circ \check{E}$. Pour $j = 1,\ldots,s$, au besoin en restreignant $V$, on peut définir une nouvelle intégrale première globale de $\mathfrak{X}$ en posant :

$$f'_j = f_j - \gamma_j^o(g_1,\ldots,g_{r'})$$

On posera alors :

$$\check{f}_j = \frac{1}{h} f'_j \circ \check{E}, \text{ pour } j = 1,\ldots,s,$$

et on observe que les fonctions ainsi définies se prolongent différentiablement sur $\check{S}$, de manière à définir des intégrales premières globales de $\check{\mathfrak{X}}$.

On notera $\check{\mathcal{A}}$ l'espace d'intégrales premières de $\check{\mathfrak{X}}$ de base $(\check{g}_1,\ldots,\check{g}_{r'},\rho,\check{f}_1,\ldots,\check{f}_{s-1})$. En fait, on remarque que $\sum_{j=1}^{s} \check{f}_j = 1$, ce qui veut dire que $\check{f}_s$ appartient à l'espace engendré par $\check{\mathcal{A}}$ et les constantes.

**Lemme 4.** Soit $\check{x}_o \in \check{E}^{-1}(x_o)$ ; alors :

(i) l'orbite de $\check{x}_o$ par $\check{\mathfrak{X}}$ est compacte

(ii) $(\check{\mathfrak{X}},\check{\mathfrak{A}})$ est transversalement elliptique en $\check{x}_o$

(iii) l'isotropie transverse de $\check{\varphi}$ en $\check{x}_o$ coïncide avec l'isotropie transverse $\Gamma_{x_o}$ de $\varphi$ en $x_o$.

Démonstration. Notons $\check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}} = \check{E}^{-1}(\mathcal{O}_{x_o})$. C'est la sous-variété de $\check{V}$ d'équations $\check{g}_1 = \ldots = \check{g}_{r'} = \rho = 0$. Dans la démonstration, il suffit de regarder ce qui se passe sur cette sous-variété, en remplaçant $\check{\mathfrak{X}}$ par l'espace des champs de vecteurs induits, et $\check{\mathfrak{A}}$ par l'espace des fonctions induites [engendré par les fonctions induites par $\check{f}_1, \ldots, \check{f}_{s-1}$].

Rappelons qu'on a noté $O(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$ le fibré des repères de $\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}}$ orthonormés pour la métrique définie par $h$, $\varphi^B$ l'action relevée de $E$ dans ce fibré. Observons aussi que $\check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}}$ n'est autre que le fibré associé à $O(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$ de fibre-type la sphère unité de $\mathbb{R}^{2s}$, et que $\check{\varphi}$ est l'action déduite de $\varphi^B$ par passage au fibré associé. Comme on a déjà vu que les orbites de $\varphi^B$ sont compactes, il en est de même de celles de $\check{\varphi}$, d'où le point (i).

Dans de bonnes coordonnées $(v, \bar{u})$ sur $\check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}}$, les champs de vecteurs de $\check{\mathfrak{X}}$ s'écrivent [compte tenu du lemme 1 et de la formule (1)] :

$$\check{V}_k = \frac{\partial}{\partial v^k}, \quad k = 1, \ldots, r$$

$$\check{W}_i = \bar{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \bar{x}^i \frac{\partial}{\partial \bar{y}^i}, \quad i = 1, \ldots, s, \text{ avec } \bar{u} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^s, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^s),$$

car $W^k_i(0,0) = 0$, et $\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \sum_a W''^a_i(0, \rho\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a}$ s'exprime à l'aide du linéarisé de $\sum_a W''^a_1(\mu,u) \dfrac{\partial}{\partial u^a}$ en (0,0).

De même, les fonctions $\check{f}_j$ s'écrivent :

$\check{f}_j(v,\bar{u}) = (\bar{x}^j)^2 + (\bar{y}^j)^2$, $j = 1,\ldots,s$, car $\gamma_j^2(0) = 0$ et $\lim_{\rho\to 0} \epsilon_j(0,\rho\bar{u}) = 0$.

Sous cette forme, il est clair que $(\check{\mathfrak{X}},\check{\mathcal{A}})$ est transversalement elliptique en tout point de $\check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}}$, d'où (ii).

Finalement, comme le réseau $\Gamma_{x_o}$ est l'isotropie de $\varphi^B$ en tout point de $O(\mathcal{N}^T_{\mathcal{O}_{x_o}})$, on obtient par passage au quotient à partir de $\check{\varphi}$ une action effective

$$\tilde{\varphi} : E/\Gamma_{x_o} \times \check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}} \to \check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}}$$

du tore $\mathbb{T}^n = E/\Gamma_{x_o}$ sur la variété $\check{S}_{\mathcal{O}_{x_o}}$. L'isotropie transverse d'une telle action est nulle en tout point, ce qui entraîne (iii). -//-

Remarque : en tout point $\check{x}_o \in \check{E}^{-1}(x_o)$, l'orbite de $\check{\mathfrak{X}}$ est de dimension > r, donc la dimension de l'espace transverse en ce point $N^T_{\check{x}_o}$ est < s.

## II.5. Démonstration de la proposition 1.

Soit $\tau_o \in \Gamma_{x_o}$.

Le lemme 4, la dernière remarque, et l'hypothèse de récurrence, entraînent que, pour tout $\check{x}_o \in \check{E}^{-1}(x_o)$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_{\check{x}_o}$ de $\check{x}_o$ dans $\check{V}$ et une unique application différentiable :

$$\check{\tau}_{\check{\tau}_o} : \check{\mathcal{U}}_{\check{x}_o} \to E$$

vérifiant :

$$(3)\quad \begin{cases} \check{\tau}_{\check{x}_o}(\check{x}_o) = \tau_o \\ \text{pour tout } \check{x} \in \check{\mathcal{U}}_{\check{x}_o},\ \check{\tau}_{\check{x}_o}(\check{x}) \text{ appartient à l'isotropie de } \check{\varphi} \text{ en } \check{x}. \end{cases}$$

Remarquons que l'isotropie transverse en $x_o$ coïncide avec l'isotropie de $\check{\varphi}$ en presque tout point de $\check{E}^{-1}(x_o)$ ; donc, en restrictiion à $\check{\mathcal{U}}_{\check{x}_o} \cap \check{E}^{-1}(x_o)$, l'application $\check{\tau}_{\check{x}_o}$ est constante et égale à $\tau_o$. L'unicité locale de $\check{\tau}_{\check{x}_o}$ au voisinage de chaque point entraîne alors que <u>les applications $\check{\tau}_{\check{x}_o}$ se recollent en une application différentiable</u>

$$(4)\qquad \check{\tau} : \check{\mathcal{U}} \to E ,$$

<u>où $\check{\mathcal{U}}$ est un voisinage de $\check{\mathcal{U}}^{-1}(x_o)$ défini par des inéquations $|\rho| < \varepsilon$, $\|\mu\| < \eta'$ , $\|v\| < \eta$, avec :</u>

$$(5)\quad \begin{cases} \check{\tau}(\check{E}^{-1}(x_o)) = \{\tau_o\} \\ \text{pour tout } \check{x} \in \check{\mathcal{U}},\ \check{\tau}(\check{x}) \text{ est dans l'isotropie de } \check{\varphi} \text{ en } \check{x}, \end{cases}$$

<u>l'application $\check{\tau}$ étant uniquement déterminée par les conditions (5).</u>

<u>Lemme 5.</u> L'application $\check{\tau}$ est descendable, c.-à-d. qu'il existe $\tau : \mathcal{U} \to E$ différentiable, avec $\mathcal{U} = \check{E}(\check{\mathcal{U}})$ et $\check{\tau} = \tau \circ \check{E}$.

<u>Démonstration</u> : On utilise [pour les fonctions à valeurs vectorielles] la caractérisation des fonctions "descendables" donnée par le lemme 3.

On commence par remarquer que la fonction $\check{\tau}' : \check{\mathcal{U}} \to E$ définie, dans les bonnes coordonnées $(v,\mu,\rho,\bar{u})$, par

$$\check{\tau}'(v,\mu,\rho,\bar{u}) = \check{\tau}(v,\mu,-\rho,-\bar{u})$$

satisfait, elle aussi, aux conditions (5). Par unicité, on a donc $\check{\tau}'=\check{\tau}$. Ceci, et le fait que $\check{\tau}$ est constante sur $\check{E}^{-1}(x_o)$, entraine que $\check{\tau}$ est "ensemblistement descendable", c.-à-d. la condition (i) du lemme 3.

Remarquons aussi que la fonction $\check{\tau}(v,\mu,\rho,\bar{u})$ est, en fait, indépendante de la variable $v$, car $\check{\tau}(0,\mu,\rho,\bar{u})$ vérifie aussi les conditions (5).

On posera dans la suite $E = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, de sorte que tout élément $\tau \in E$ pourra s'écrire

(6) $\quad \tau = \tau_o + (t,t')$ , avec $t \in \mathbb{R}^r$ et $t' \in \mathbb{R}^s$.

En particulier, la fonction $\check{\tau}$ s'écrira

(7) $\quad \check{\tau} = \tau_o + (\check{t},\check{t}')$, où $\check{t} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^r$ et $\check{t}' : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^s$.

Si $\tau = \tau_o + (t,t')$ est assez voisin de $\tau_o$, c.-à-d. si $(t,t')$ est assez petit, $\varphi_\tau(x_o)$ sera encore dans $\mathcal{U}$, et on pourra écrire $\varphi_\tau$ dans les bonnes coordonnées, au voisinage de $x_o$. D'après le lemme 1, on aura :

(8) $\varphi_{\tau_o+(t,t')}(v,\mu,u) = (v+t+\alpha(t',\mu,u),\mu,\beta^{(\mu)}(t',u))$

où l'écriture $\beta^{(\mu)}(t',u)$ est destinée à faire apparaitre $\mu$ comme un paramètre. on aura, toujours d'après le lemme 1 :

(9) $\quad \beta^{(\mu)}(t',0) = 0$

et, en posant $W''^{(\mu)}_1(\mu) = (W''^1_1(\mu,u),\ldots,W''^{2s}_1(\mu,u))$

(10) $$\frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial t'^1 \partial u}(0,0) = \frac{\partial W''^{(\mu)}_1}{\partial u}(0).$$

En utilisant l'expression (2) du relevé d'un difféomorphisme, on obtient :

$$(11) \qquad \check{\varphi}_{\tau_0+(\check{t},\check{t}')}(v,\mu,\rho,\bar{u}) = (v + \check{t} + \alpha(\check{t}',\mu,\rho\bar{u}),\mu,\rho,\frac{1}{\rho}\,\beta^{(\mu)}(\check{t}',\rho\bar{u}))$$

pour $\rho \neq 0$, et la condition (5) s'écrit :

$$(12)_a \qquad \check{t} = -\,\alpha(\check{t}',\mu,\rho\bar{u})$$

$$(12)_b \qquad \beta^{(\mu)}(\check{t}',\rho\bar{u}) = \rho\bar{u}.$$

Si $\check{t}'$ est descendable, alors d'après $(12)_a$ il en sera de même de $\check{t}$, donc de $\check{\tau}$. Reste à prouver que $\check{t}'$ est descendable. Pour cela, on écrit la série de Taylor en $\rho$ de $\check{t}'$ aux points de $\check{S}$. La propriété (9) implique que cette série n'a pas de terme constant [en presque tous les points de $\check{E}^{-1}(x_0)$ l'isotropie est discrète, donc se prolonge de façon unique sur $\check{S}$, localement, par $\check{t}'= 0$]. On aura donc :

$$(13) \qquad \check{t}'= \rho\, t'_1(\mu,\bar{u}) + \ldots + \rho^k t'_k(\mu,\bar{u}) + \ldots$$

En développant en série de Taylor en $\rho$ les deux membres de $(12)_b$, il vient, compte tenu de (9) :

$$(14) \qquad \frac{\partial\beta^{(\mu)}}{\partial u}(0,0)(\rho\bar{u}) + \frac{1}{2}\Big[2\,\frac{\partial^2\beta^{(\mu)}}{\partial t'\partial u}(0,0)(\rho t'_1+\ldots,\rho\bar{u}) +$$

$$\frac{\partial^2\beta^{(\mu)}}{\partial u^2}((\rho\bar{u})^{(2)})\Big] + \ldots + \frac{1}{k!}\Big[k\,\frac{\partial^k\beta^{(\mu)}}{\partial t^{k-1}\partial u}(0,0)((\rho t'_1+\ldots)^{(k-1)},\rho\bar{u}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^k\beta^{(\mu)}}{\partial u^k}(0,0)((\rho\bar{u})^{(k)})\Big] + \ldots = \rho\bar{u}.$$

Identifiant les termes en $\rho$, on obtient $\dfrac{\partial\beta^{(\mu)}}{\partial u}(0,0) = \mathrm{Id}.$

Identifiant les termes en $\rho^2$, on obtient :

$$(15) \qquad 2\,\frac{\partial^2\beta^{(\mu)}}{\partial t'\partial u}(0,0)\;(t'_1,\bar{u}) = -\,\frac{\partial^2\beta^{(\mu)}}{\partial u^2}(0,0)\;((\bar{u})^{(2)})$$

et en posant :

$$(16)\qquad \begin{cases} \overline{W}_1^{(\mu)} = 2 \displaystyle\sum_{a,b} \frac{\partial W''^a_1}{\partial u^b} (\mu,0)\,\bar{u}^b \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a} \\ \overline{Z}_2^{(\mu)} = - \displaystyle\sum_{a,b_1,b_2} \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)a}}{\partial u^{b_1} \partial u^{b_2}} (0,0)\; \bar{u}^{b_1}\, \bar{u}^{b_2} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a} \end{cases}$$

on peut remplacer (15) par l'équation équivalente

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{s} t'_1(\mu,\bar{u})^i\; \overline{W}_2^{(\mu)} = \overline{Z}_2^{(\mu)} \qquad \text{pour} \qquad \|\bar{u}\| = 1.$$

Les deux membres de cette équation sont des champs de vecteurs - dépendant du paramètre $\mu$ - sur $\mathbb{R}^{2s}$ tangents à la sphère $S_o$ d'équation $\|\bar{u}\| = 1$.

Pour $\mu = 0$, on a $\overline{W}_1^{(0)} = \bar{y}^1 \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^1} - \bar{x}^1 \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}^1}$. Si $\overline{Z}_2^{(0)} = \xi_2(\bar{u})^1 \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^1} + \zeta_2(\bar{u})^1 \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}^1}$, il vient $\bar{y}^1\; t'_1(0,\bar{u})^1 = \xi_2(\bar{u})^1$. Comme $t'_1(0,\bar{u})^1$ est différentiable sur $S_o$, le polynome quadratique $\xi_2(\bar{u})^1$ est divisible par $\bar{y}^1$, et $t'_1(0,\bar{u})^1$ est un polynôme homogène et de degré 1 en $\bar{u}$.

Observons maintenant que l'argument reste valable pour $\mu$ voisin de 0 : on a utilisé seulement l'expression de $\overline{W}_1^{(0)}$ dans les bonnes coordonnées, c'est-à-dire l'ellipticité transverse sur l'orbite $\mathcal{O}_{x_o}$. Mais on a encore ellipticité transverse sur les orbites voisines dans $S$ [les orbites de l'action relevée de $E$ dans les repères du fibré normal à $S$ restent, pour $\mu$ voisin de 0, des tores de dimension n]. Donc $t'_1(\mu,\bar{u})^1$ est un polynôme homogène de degré 1 en $\bar{u}$.

Pour achever, on procède par récurrence sur $k$ : si l'on suppose démontré que, pour $i = 1,\ldots,k$, les $t'_i$ sont des polynômes homogènes de degré $i$ en $\bar{u}$, alors l'étude des termes de degré $(k+1)$ dans (14) donne :

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{s} t'_{k+1}(\mu,\bar{u})^i \, \bar{W}_i^{(\mu)} = \bar{Z}_{k+2}^{(\mu)} \qquad \text{pour} \qquad \|\bar{u}\| = 1,$$

où $\bar{Z}_{k+2}^{(\mu)}$ est un champ de vecteurs polynômial homogène de degré $(k+2)$. Le même argument que ci-dessus prouve alors que $t'_{k+1}(\mu,\bar{u})^i$ est polynômial et homogène de degré $(k+1)$ en $\bar{u}$, ce qui achève la démonstration du lemme -//-

Pour terminer la preuve de la proposition 1 [et, par suite, celle du théorème], il suffit d'observer que la fonction $\tau : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ obtenue est unique, car une telle fonction se relève en $\check{\tau} : \check{\mathcal{U}} \to E$ vérifiant les conditions (5).

## Bibliographie


[A-M] R. Abraham - J.E. Marsden, Fundations of mechanics (2nd edition), Benjamin-Cummings, Reading, (1978)

[A-M-M] J. Arms - J.E. Marsden - V. Moncrief, Symetry and bifurcations of momentum mapping, Commun. Math. Phys., 78, (1981), 455-478.

[D-D] P. Dazord - T. Delzant, Le problème général des variables action-angles, Jour. of Diff. Geometry, 26(2), (1987), 223-252.

[D] H. Duistermaat, On global action-angle coordinates, Commun on pure and appl. Math.,32, (1980), 687-706.

[E] H. Eliasson, Hamiltonian systems with Poisson commmuting integrals, Thèse, Stokholm, (11984).

[F.M] H.Fomenko - A. Mischenko, Generalized Liouville method of integration of hamiltonian systems, Functional Anal-Appl., 12, (1978), 113-121.

[F] J.P. Françoise, Calculs explicites d'action-angles, Seminaire de Mathématiques Supérieures, Montreal, (1985).

[R] Rüssmann, Uber das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differential gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Math. Ann., 154, (1964), 285-300.

[V] J. Vey, Sur certains systèmes dynamiques séparables, Am. J. Math., 100, (1978), 591-614.

[W] G. Wassermann, Stability of unfoldings, Lecture Notes Math., 393, (1974), Springer-Verlag.