M. BOUCETTA

Chapitre VII Systèmes hamiltoniens complètement intégrables non commutatifs Étude locale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 185-195
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___1B_185_0>

SYSTEMES HAMILTONIENS COMPLETEMENT INTEGRABLES NON COMMUTATIFS ETUDE LOCALE

M. BOUCETTA

Résumé : Etant donné un système hamiltonien complètement intégrable non commutatif $(M,\omega,H,f^1,\ldots,f^m)$ [M-F] , on considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ engendrée par les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux $(f^1,\ldots,f^m)$. On considère, alors, l'application moment associée $J : M \to \mathfrak{g}^*$.

On étudie une situation dans laquelle, transversalement à une orbite de la représentation coadjointe régulière et réductive, l'isotropie infinitésimale agit à la façon du groupe $\mathbb{R}^n$ dans les modèles d'action-angle avec singularités. On arrive alors, compte tenu du caractère presque canonique des coordonnées actions-angle, à dégager des invariants qui classifient complètement le modèle.

I. INTRODUCTION.

Dans ce travail, la différentiabilité est entendue, sauf mention expresse du contraire, au sens C^∞.

Soient $(M,\Omega H)$ un système hamiltonien de dimension 2n et $(f^1,\ldots,f^m)$ une famille d'intégrales premières telle que :

pour i,j = 1,...,m $\{f^i,f^j\} = \sum_{k=1}^{m} C_{ij}^k f^k$ où les C_{ij}^k sont des constantes réelles et { } désigne le crochet de Poisson usuel sur (M,Ω).

I.1. Quelques rappels :

Pour le crochet de Poisson, la famille $(f^1,\ldots,f^m)$ engendre une algèbre de Lie A. On notera $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens correspondants et on désignera par G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On définit l'application $J : M \to \mathfrak{g}^*$ (dual de $\mathfrak{g}$) par $< J(x),X_f > = f(x)$, pour tout $x \in M$ et tout $X_f \in \mathfrak{g}$.

On a, immédiatement, pour tout $X_f , X_g \in \mathfrak{g}$ et tout $x \in M$:

(1) $\Omega(X_f, X_g)(x) = - < J(x), [X_f, X_g] >$.

Lemme I.1. [S] . J *est une application différentiable , tout champ de vecteurs hamiltonien* X_f *élément de* $\mathfrak{g}$ *est* J-*projetable et son projeté est le champ de vecteurs fondamental sur* $\mathfrak{g}^*$, *associé à* X_f, *pour l'action co-adjointe de* G *sur* $\mathfrak{g}^*$.

Preuve. Pour tout $X_f \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental sur $\mathfrak{g}^*$ associé à X_f , pour l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$ noté $X_{f\mathfrak{g}^*}$ est défini par :

$$X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu) = \frac{d}{dt} Ad^*_{exp(-tX_f)}\, \mu_{/t=o} \;,\; \mu \in \mathfrak{g}^*$$

Pour tout $X_g \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{aligned} < X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu), X_g > &= < \frac{d}{dt} Ad^*_{exp(-tX_f)} \mu, X_g >_{/t=o} \\ &= < \mu, [X_f, X_g] > . \end{aligned}$$

En vertu de la relation (1), on a :

$$\begin{aligned} < X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu), X_g > &= \Omega\,(X_f, X_g)(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in J^{-1}(\mu) \\ &= dg_x(X_f(n)) \\ &= \frac{d}{dt}\, g(\varphi_t)_{/t=o} \qquad \text{où } \varphi_t \text{ est le flot de } X_f \text{ passant par } x \\ &= \frac{d}{dt} < J(\varphi_t), X_g >_{/t=o} \\ &= < T_xJ(X_f(x)), X_g > \end{aligned}$$

d'où $T_xJ(X_f(x)) = X_{f\mathfrak{g}^*}(\mu)$ pour tout $x \in J^{-1}(\mu)$ C.Q.F.D. ♦

On notera désormais JX_f le champ de vecteurs fondamental sur $\mathfrak{g}^*$ associé à X_f pour l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$. On a la relation :

(2) pour tous $X_f, X_g \in \mathfrak{g}$ $< JX_f(\mu), X_g > = < \mu, [X_f, X_g] >$.

Le lemme précédent nous permet de définir pour tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$:

$$g_\mu = \{X_f \in \mathfrak{g} \;/\; JX_f(\mu) = 0\}$$

On a alors le lemme élémentaire suivant :

Lemme I.1.2. g_μ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *et si on désigne par* $G.\mu$ *l'orbite passant par* μ *pour la représentation co-adjointe, on aura :*

i) $T_{\mu'}(G.\mu) = g_\mu^\perp$ *(annulateur de* g_μ *dans* $\mathfrak{g}^*$ *)* .

ii) Pour tout élément $\mu' = Ad_g^* \mu$ *de l'orbite* $G.\mu$ $(g \in G)$ $g_{\mu'} = Ad_{g^{-1}}\, g_\mu$.

Preuve. Le fait que g_μ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ découle de la relation (2) et de l'identité de Jacobi.

Pour le (i) il suffit de remarquer que $T_\mu .G.\mu = \{JX_f(\mu)/X_f \in \mathfrak{g}\}$ et la relation (2) permet de conclure. ii) évident. ♦

g_μ est appelée l'isotropie infinitésimale au point μ.

I.2. Enoncé du problème : Soient $x_0 \in M$, $\mu = J(x_0)$, $G.\mu_0$ l'orbite passant par μ_0 pour la représentation co-adjointe, G_{μ_0} le groupe d'isotropie en μ_0 et g_{μ_0} l'isotropie infinitésimale au point μ_0 .

$G.\mu_0$ est une sous-variété symplectique de dimension nécessairement paire 2p [S] . La dimension de g_μ est alors m - 2p.

On suppose que :

a) $G.\mu_0$ est une orbite régulière (de dimension maximale). Le théorème de Duflo-Vergne [D,V] affirme alors que g_{μ_0} est abélienne.

b) μ_0 est un point réductif en ce sens que :

$$\mathfrak{g} = g_{\mu_0} \oplus m_{\mu_0} \quad \text{et} \quad Ad_g^*\, m_{\mu_0} = m_{\mu_0} \text{ pour tout } g \in G_{\mu_0}.$$

D'après le ii) du lemme I.1.2, tout point μ de l'orbite $G.\mu_0$ est réductif. Il suffit de prendre $m_\mu = Ad_{g^{-1}}\, m_{\mu_0}$ si $\mu = Ad_g^* \mu_0$ $(g \in G)$.

En plus m_μ ne dépend pas du choix de g. On dira alors que $G.\mu_0$ est réductive.

On pose $V_\mu = \mu + m_\mu^\perp$ pour tout $\mu \in G.\mu_0$. En vertu du lemme I.1.2, V_μ est un sous-espace affine de $\mathfrak{g}^*$ transverse à $G.\mu_0$ au point μ .

Lemme I.2.1. *Il existe un voisinage ouvert* $\overline{U}_{\mu_0}$ *de* $G.\mu_0$ *tel que pour tout* μ *élément de* $G.\mu_0$ *l'isotropie infinitésimale est invariante le long de* $\overline{U}_{\mu_0} \cap V_\mu$.

Preuve. L'orbite $G.\mu_0$ étant régulière, il existe un voisinage ouvert $\overline{U}_{\mu_0}$ de $G.\mu_0$ dans lequel toutes les orbites de la représentation co-adjointe sont régulières.

Soient $\mu \in G.\mu_0$ et $\mu + \beta \in V_\mu$. Pour tout $X_f \in g_\mu$ on a :

$$\begin{aligned} < JX_f(\mu+\beta), X_g > &= < \mu+\beta, [X_f, X_g] > \\ &= < JX_f(\mu), X_g > + < \beta, [X_f, X_g] > \\ &= < \beta, [X_f, X_g] > \end{aligned}$$

Or, $[X_f, X_g] \in m_\mu$ du fait que g_μ est abélienne et μ est réductif d'où $< \beta, [X_f, X_g] > = 0$. On a montré alors que $g_\mu \subset g_{\mu+\beta}$. Sur $V_\mu \cap \overline{U}_{\mu_0}$ on aura l'égalité. ♦

Pour simplifier, on notera V_μ au lieu de $V_\mu \cap \overline{U}_{\mu_0}$.

Proposition I.2.1. $S_{\mu_0} = J^{-1}(V_{\mu_0})$ *est une sous-variété symplectique de* M. *Les éléments de* g_{μ_0} *sont des champs de vecteurs tangents à* S_{μ_0} *et pour tout* $x \in S_{\mu_0}$, *l'espace tangent en* x *à* S_{μ_0} *est l'orthogonal symplectique de* $m_{\mu_0}(x) = \{X_f(x), X_f \in m_{\mu_0}\}$.

Pour montrer cette proposition on aura besoin du lemme classique suivant :

Lemme I.2.2. *Pour tout* $x \in M$, $T_xJ(T_xM) = g_x^\perp$ *où* $g_x = \{X_f \in \mathfrak{g}, X_f(x) = 0\}$.

Preuve. Voir Guillemin-Sternberg [G-S] .

Preuve de la proposition. D'après le lemme précédent, il est facile de voir que J est transverse à V_{μ_0} , donc d'après le lemme de transversalité [G-P], S_{μ_0} est une sous-variété de M et pour tout $x \in S_{\mu_0}$

$$T_{x_0} S_{\mu_0} = (T_xJ)^{-1}(m_{\mu_0}^\perp).$$

La relation (1) donne facilement que $(T_xJ)^{-1}(m_{\mu_0}^\perp) = \text{orth } m_{\mu_0}(x)$. La même relation plus l'hypothèse de réductivité entraîne que $m_{\mu_0} \cap \text{orth } m_{\mu_0}(x) = \{0\}$ sur S_{μ_0} . S_{μ_0} est donc symplectique les éléments de g_{μ_0} étant verticaux, ils sont tangents aux fibres de J donc tangents à S_{μ_0} . ♦

On note A_{μ_0} l'algèbre de Lie abélienne de fonctions associées aux champs de vecteurs de g_{μ_0} , Ω_{μ_0} la restriction de Ω à S_{μ_0} et H_{μ_0} la restriction de H.

$(S_{\mu_0}, \Omega_{\mu_0}, H_{\mu_0}, A_{\mu_0})$ est alors un système hamiltonien muni d'intégrales premières en involution. On suppose désormais que $(M,\Omega,H,f^1,\dots,f^m)$ est un système hamiltonien complètement intégrable non commutatif au sens de [M-F] et Marle [M]. Soit
$\dim \operatorname{Ker} \Lambda = \dim M - \dim \mathfrak{g} = p$, où Λ est le tenseur de Poisson usuel sur $\mathfrak{g}^*$. On a alors :

$$\begin{array}{ll} m - 2p = 2n - m & \text{soit } m = n+p \\ \dim S_{\mu_0} = 2(n-p) & \text{et } \dim A_{\mu_0} = n-p. \end{array}$$

On suppose alors que le système hamiltonien $(S_{\mu_0}, \Omega_{\mu_0}, H_{\mu_0}, A_{\mu_0})$ est équivalent au modèle des variables action-angle avec singularités d' Eliasson [E] au voisinage de x_0. Quitte à restreindre S_{μ_0}, il existe sur S_{μ_0} un système de coordonnées action-angle avec singularités $(e_1,\dots,e_k, \varphi_1,\dots,\varphi_k, q_1,\dots,q_r, \theta_1,\dots,\theta_r)$ tel que :

1°) $S_{\mu_0} = D(0,r_1) \times \dots \times D(0,r_k) \times \mathbb{T}^r \times \hat{\Omega}$ où $D(0,r_i)$ est le disque de centre 0 et de rayon r_i dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}^r$ le tore de dimension r et $\hat{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^r$.

2°) $\Omega_{\mu_0} = \sum_{i=1}^{k} e_i de_i \wedge d\varphi_i + \sum_{j=1}^{k} dq_j \wedge d\theta_j$.

3°) Pour tout $f \in A_{\mu_0}$, $f(e,\varphi,q,\theta) = \phi(e^2,q)$.

4°) $q_1,\dots,q_r, e_1^2, \dots, e_k^2$ sont des intégrales premières du système.

On définit, pour tout $f \in A_{\mu_0}$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \hat{f} : D^k \times D^r & \longrightarrow & \pi^k \times \pi^r \\ (e_i, q_i) & \longmapsto & \left(\frac{1}{e_i}\frac{\partial f}{\partial e_i}(q,e), \frac{\partial f}{\partial q_i}(q,e)\right) \end{array}$$

En prenant sur $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^r$ le système de coordonnées (φ_i,θ_i) correspondant aux coordonnées action (e_i,q_i) où D est un domaine de $\mathbb{R}$.

Il est relativement facile de voir que $\hat{f}$ est bien définie et ne dépend pas des variables action-angle avec singularités choisies.

On observera aussi, que les $\hat{f}$ caractérisent entièrement le système $(S_{\mu_0}, \Omega_{\mu_0}, A_{\mu_0})$ sous les hypothèses ci-dessus.

Définition I.2.1. *On appelle invariants caractéristiques du système* (M,Ω,A) *au point* x_0, *sous les hypothèses ci-dessus, l'ensemble* $\hat{A}_{\mu_0} = \{\hat{f}, f \in A_{\mu_0}\}$.

Problème : Ces invariants classifient-ils complètement le modèle (localement) sous les hypothèses ci-dessus ?

Les 2 théorèmes suivants donnent une réponse affirmative à cette question.

Théorème 1. *Soient* (M,Ω,H,A) *et* (M',Ω',H',A') *deux systèmes hamiltoniens complètement intégrables non commutatifs où* A *et* A' *sont deux algèbres de Lie non commutatives d'intégrales premières respectivement sur* (M,Ω,H) *et* (M',Ω',H'). *On notera* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}'$ *les algèbres de Lie de champs de vecteurs hamiltoniens associées respectivement à* A *et* A', G *et* G' *les groupes de Lie connexes et simplement connexes respectivement associés. Soient* J *et* J' *les moments respectifs de* (M,Ω,A) *et* (M',Ω',A'). *Soient* x *un point de* M *et* x' *un point de* M'. *On notera* $\mu = J(x)$ *et* $\mu' = J'(x')$. *On suppose que :*

i) Les orbites $G.\mu$ *et* $G'.\mu'$ *pour la représentation co-adjointe passant respectivement par* μ *et* μ' *sont réductives et régulières.*

ii) Soient $(S_\mu,\Omega_\mu,H_\mu,A_\mu)$ *et* $(S'_{\mu'},\Omega'_{\mu'},H'_{\mu'},A'_{\mu'})$ *les systèmes hamiltoniens munis d'intégrales premières associés respectivement à* μ *et* μ', *définis dans la proposition* 1.2.1. *On suppose qu'ils sont équivalents aux modèles action-angle avec singularités respectivement aux points* x *et* x'. *On note* $\hat{A}_\mu$ *et* $\hat{A}'_{\mu'}$ *leurs invariants caractéristiques respectifs.*

Alors (M,Ω,A) *et* (M',Ω',A') *sont équivalents en* (x,x') *si et seulement si il existe un isomorphisme* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *tel que*

1) $\varphi^*\mu' = \mu$ *où* φ^* *désigne la transposée de* φ.

2) $\hat{A}_\mu = \hat{A}'_{\mu'}$.

Théorème 2. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* G *le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant,* $\mu \in \mathfrak{g}^*$ *et* g_μ *l'isotropie infinitésimale au point* μ. *On suppose que l'orbite du point* μ *pour la représentation co-adjointe et régulière et réductive. On considère, si* $p = \dim g_\mu$, *le système modèle* $(S_\mu = D(0,r_1) \times \ldots \times D(0,r_k) \times \hat{\Omega} \times \mathbb{T}^r, \omega_0, q_i, e_i^2)$ *avec* $k+r = p$ *et* p *fonctions, de variables* q_i *et* e_i^2, *soient* $f^1,\ldots,f^p$, *nulles en* 0, *et dont les différentielles sont de rang r en* 0.

Alors il existe une variété symplectique M *de dimension* $2n = m+p$ *si* $m = \dim G$ *et une algèbre de Lie* A *de fonctions pour le crochet de Poisson, isomorphe à* $\mathfrak{g}$, *de manière que, en* *un point* $x_0 \in M$, *les invariants caractéristiques de* A *soient définis par* $f^1,\dots,f^p$ *et que, si* J *désigne le moment du système ainsi défini, on ait* $J(x_0) = \mu$.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Si (M, Ω,A) et (M', Ω',A') sont équivalents en (x,x'), il existe un difféomorphisme symplectique Ψ d'un voisinage ouvert U $\mathfrak{g}$-invariant de x sur un voisinage ouvert U', $\mathfrak{g}'$-invariant de x' qui applique x en x' et tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (U,x) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "(\Psi_*^{-1})^*"] & (U',x') \arrow[d, "J'"] \\ \mathfrak{g}^* \arrow[r] & \mathfrak{g}'^* \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Si on note $\varphi = \Psi_{*/\mathfrak{g}}$, on a évidemment $\varphi^*\mu' = \mu$, ce qui entraîne que l'image par φ de l'isotropie infinitésimale g_μ au point μ est l'isotropie infinitésimale au point μ'. On a aussi $m'_{\mu'} = \varphi(m_\mu)$, soit $\Psi(S_\mu) = S'_{\mu'}$. En identifiant S_μ et $S'_{\mu'}$ au modèle action-angle avec singularités et en utilisant le fait que rg Jx = rg J'x', on a 2).

. Supposons maintenant qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tel que 1) et 2) soient vérifiés.

On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ à l'aide de φ ce qui entraîne, en vertu de 1), que $g_\mu = g'_{\mu'}$. La relation 2) nous permet de trouver un difféomorphisme symplectique
$\varphi_\mu : (S_\mu, \Omega_\mu) \to (S'_{\mu'}, \Omega'_{\mu'})$ qui échange A_μ et $A'_{\mu'}$.

Soient $X_{f^1},\dots, X_{f^{2p}}$ une base de m_μ et $(\varphi^1_t),\dots,(\varphi^{2p}_t)$ les flots associés. On définit alors deux applications différentiables :

$$\chi_1 : \overline{\Omega} \times S_\mu \to M$$
$$(t_1,\dots,t_{2p},y) \mapsto \varphi^1_{t_p} \circ \dots \circ \varphi^{2p}_{t_{2p}}(y)$$

$$\chi_2 : \overline{\Omega} \times S'_{\mu'} \to M'$$
$$(t_1,\dots,t_{2p},y) \mapsto \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{2p}_{t_{2p}}(y')$$

Les orbites respectives de x et x' pour l'action de g_μ étant compactes, $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ induisent deux difféomorphismes locaux respectivement de $\overline{\Omega} \times S_\mu$ sur un voisinage ouvert U, $\mathfrak{g}$-invariant, de x et de $\overline{\Omega} \times S'_{\mu'}$ sur un voisinage ouvert U', $\mathfrak{g}'$-invariant, de x'.

On définit, alors, un difféomorphisme local $\Psi : U \to U'$ par

$$\Psi(\varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{2p}_{t_{2p}}(y)) = \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{p}_{t_{2p}}(\varphi_\mu(y)).$$

Il est clair que $\Psi(x) = x'$ et $\Psi_{/S_\mu} = \varphi_\mu$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "J"'] & & U' \arrow[dl, "J'"] \\ & \mathfrak{g}^* & \end{tikzcd}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que Ψ est symplectique.

Ψ est symplectique en restriction à S_μ .

Pour tout $x \in S_\mu$ $T_xM = T_xS_\mu \oplus m_\mu(x)$. Ceci entraîne que Ψ est symplectique le long de S_μ et donc (par équivariance) partout. ♦

III. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

La donnée de $f^1,\dots,f^p$ définit sur le modèle $D(0,r_1) \times \dots \times D(0,r_k) \times \hat{\Omega} \times \mathbb{T}^r$ muni de coordonnées action-angle avec singularités $(e_1,\varphi_i,\theta_i,q_i)$ et de la forme fondamentale $\omega_o = \sum_{i=1}^{k} e_i de_i \wedge d\varphi_i + \sum_{j=1}^{r} dq_j \wedge d\theta_j$, une algèbre abélienne de champs de vecteurs hamiltoniens à savoir $X_{f^1},\dots, X_{f^p}$. Comme les fibres sont compactes, ces champs sont complets et déterminent donc une action verticale hamiltonienne de $\mathbb{R}^p \simeq g_\mu$.

On considère la fibration principale $\Pi : G \to G.\mu$ de groupe structural G_μ . Soit G^o_μ la composante connexe de l'élément neutre. C'est en général un cylindre $\mathbb{T}^h \times \mathbb{R}^{p-h}$. Soit φ_μ une trivialisation locale de G au-dessus d'un disque D_μ centré en μ. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu : G^o_\mu \times D_\mu &\to \Pi^{-1}(D_\mu)^o \\ (g,\mu') &\mapsto s_\mu(\mu')g \end{aligned}$$

où s_μ est une section locale du fibré $\Pi : G \to G.\mu$ et $\Pi^{-1}(D_\mu)^o$ une composante connexe de $\Pi^{-1}(D_\mu)$.

On considère la projection canonique $q : \mathbb{R}^p \to G_\mu^o$, on définit alors une projection $P : \mathbb{R}^p \times D_\mu \to \Pi^{-1}(D_\mu)^o$ par $P(\tilde{g},\mu') = s_\mu(\mu')q(\tilde{g})$. $(\mathbb{R}^p \times D_\mu, P)$ est le revêtement universel de $\Pi^{-1}(D_\mu)^o$.

Les champs fondamentaux de l'action à gauche de G sur lui-même, c'est-à-dire les champs invariants à droite, se relèvent en une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de champs simplement transitive sur $\mathbb{R}^p \times D_\mu$. En particulier, g_μ se relève en une algèbre de Lie $\tilde{g}_\mu$ abélienne verticale pour la fibration $\tilde{\Pi} : \mathbb{R}^p \times D_\mu \to D_\mu$.

Considérons la projection $\tilde{P} : \mathbb{R}^p \times D_\mu \times S_\mu \Rightarrow D_\mu \times S_\mu$ définie par

$$\hat{P}(\tilde{g},\mu',e,\varphi,q,\theta) = (\mu',\tilde{g}(e,\varphi,q,\theta)).$$

Lemme III.1. *L'action infinitésimale de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *sur le facteur* $\mathbb{R}^p \times D_\mu$ *de* $\mathbb{R}^p \times D_\mu \times S_\mu$ *se projette par* $\tilde{P}$ *en une action infinitésimale de* $\mathfrak{g}$ *sur* $M = D_\mu \times S_\mu$.

Preuve du lemme. Soient $(\tilde{g}_0, \mu_0, (e_0, \varphi_0, q_0, \theta_0))$ et $(\tilde{g}'_0, \mu'_0, (e'_0, \varphi'_0, q'_0, \theta'_0))$ se projetant par $\tilde{P}$ au même point. Ceci veut dire que

$$\tilde{g}'_0 = \tilde{g}_0 . y_0 \quad \text{et} \quad (e'_0, \varphi'_0, q'_0, \theta'_0) = g_0^{-1} .(e_0, \varphi_0, q_0, \theta_0)$$

Soient $(\tilde{g}(t),\mu(t), (e_0,\varphi_0,q_0,\theta_0))$ la trajectoire du premier point par $\exp(t\tilde{X})$ où $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $(\tilde{g}'(t),\mu'(t), e'_0,\varphi'_0,q'_0,\theta'_0)$ celle du second. Comme le champ fondamental $\tilde{X}$ est un automorphisme de fibré principal, il vient $\mu'(t) = \mu(t)$ et $\tilde{g}'(t) = \tilde{g}(t)y_0$. Donc les projections par $\tilde{P}$ de ces 2 courbes coïncident. On a donc une action de $\mathfrak{g}$ sur $M = D_\mu \times S_\mu$.

Suite de la démonstration du théorème 2 :

On définit une projection $J : M \to \mathfrak{g}^*$ de la façon suivante : $f^1,\dots,f^p$ définissent une projection de S_μ sur $g_\mu^* \simeq m_\mu^\perp$ soit J_μ. On en déduit une projection $J : S_\mu \to \mu + m_\mu^\perp$ en posant $J(x) = \mu + J_\mu(x)$. On étend cette projection à M de la façon suivante : soit $\mu' = g.\mu$ $(g \in G)$. On pose : $J(\mu',e,\varphi,q,\theta) = g.J_\mu(e,\varphi,q,\theta) + \mu'$ ce qui assure que J est équivariante du point de vue infinitésimal.

On définit maintenant une forme fondamentale ω de la façon suivante : on la définit le long de S_μ , puis on l'étend par équivariance [relativement à l'action infinitésimale de G] . Pour cela, on observe que l'ensemble des champs de vecteurs fondamentaux associés aux éléments de m_μ définit en tout point de $S_\mu \hookrightarrow M$ un supplémentaire de TS_μ . On va décider que ces 2 sous-espaces sont orthogonaux du point de vue symplectique, donc on a :

$$\begin{cases} \omega/_{S_\mu} = \omega_0 \ , \\ \omega(Y_M(m), Y'_M(m)) = < J(m), [Y,Y'] > \ Y,Y' \in m_\mu \end{cases}$$

On observe que la forme $\omega/_{S_\mu}$, ainsi définie le long de S_μ , est invariante pour les champs X_M , $X \in g_\mu$, puisque ceux-ci sont hamiltoniens, et que l'action de G_μ laisse invariantes les projections J et J_* .

Par suite, le long de chaque fibre $D_\mu \times \{e,\varphi,q,\theta\}$, ω s'étend de manière que la forme obtenue soit équivariante.

Par construction, ω est de rang 2n le long de S_μ , donc partout [par équivariance] .

ω est fermée :

On observe que $d\omega\big|_{S_\mu} = 0$. Pour conclure il suffit de montrer que $d\omega$ est nulle le long de S_μ , donc [par équivariance] partout.

En vertu de ce qui précède, on a, pour tout $m \in S_\mu$:

$$T_m M = T_m S_\mu \oplus m_\mu(m)$$

Un calcul relativement simple permet d'affirmer que

- $d\omega_m(Y^1_M(m), Y^2_M(m), Y^3_M(m)) = 0$ si $Y^1, Y^2, Y^3 \in m_\mu$

- $d\omega_m(Y^1_M(m), X_m , Y_m) = 0$ $X_m, Y_m \in T_m S_\mu$ et $Y^1 \in m_\mu$

- $d\omega_m (X_M , Y^1_M(m), Y^2_M(m) = 0$ $X_m \in T_m S_\mu$ et $Y^1, Y^2 \in m_\mu$.

Finalement (M,ω) est symplectique. Si, maintenant, X est un champ fondamental, dans $\mathfrak{g}$, comme $\mathcal{L}_X\omega = 0$, X est localement hamiltonien. Le long de S_μ , l'orthogonal de TS_μ est engendré par les champs fondamentaux de m_μ . L'orthogonal de Ker J_* est l'espace des champs fondamentaux, donc les formes fermées duales des champs fondamentaux sont basiques le long de S_μ , donc partout par équivariance. Il en résulte, D_μ étant un disque, que les champs fondamentaux sont hamiltoniens et leurs hamiltoniens J-projetables.

On peut supposer que le "vrai" moment J' : M $\to \mathfrak{g}^*$ de l'action de $\mathfrak{g}$ coïncide avec J en x_0, donc sur l'orbite de ce point. La transversale sur laquelle g_μ est le noyau de Ker J'_* coïncide avec V_μ et sa préimage coïncide avec S_μ . D'ailleurs J' et J coïncident sur S_μ et finalement [par équivariance] partout. ♦

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] R. ABRAHAM - J.E. MARSDEN : *Foundations of Mechanics*, (2nd edition). Benjamin-Cummings, Reading 1978.

[D-V] M. DUFLO - M. VERGNE : *Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, 268, 1969, 583-585.

[E] H. ELIASSON : *Hamiltonian system with Poisson commuting integrals*, Thèse, Stockholm (1984).

[G-P] V. GUILLEMIN - A. POLLACK : *Differential topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

[G-S] V. GUILLEMIN - S. STERNBERG : *Convexity Proprieties of the Moment Mapping*, Invent. Math. 67 (1982), 491-513.

[M] C.M. MARLE : *Normal Forms generalizing action-angle coordinates for Hamiltonian action of Lie group*, Letters in Math. Phys. 7 (1983), p. 55-62.

[M-F] MISCHENKO - FOMENKO : *Generalized Liouville method of integration of hamiltonian systems*, Funct. Anal. and Appl. 12 (1978), p. 113-121.

[Mo] P. MOLINO : *Structure transverse aux orbites de la représentation co-adjointe : Le cas des orbites réductives*. Sém. Géom. Diff. (1983-1984), Montpellier.

[N] NEHORSEV : *Action-angle variable and their generalizations*, Trans. Moscow, Math. Soc. 26 (1972), p. 180-198.

[S] J.M. SOURIAU : *Structure des systèmes dynamiques*, Paris, Dunod, 1970.

[W] A. WEINSTEIN : *The local structure of Poisson manifolds*, J. of Diff. Geom. (1984).

M. BOUCETTA

Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Place Eugène Bataillon

34060 MONTPELLIER

France