PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

P. DAZORD

P. MOLINO

Chapitre II Γ-Structures poissonniennes et feuilletages de Libermann

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 69-89

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___1B_69_0>

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CHAPITRE II

Γ-STRUCTURES POISSONNIENNES ET FEUILLETAGES DE LIBERMANN

P. DAZORD & P. MOLINO

INTRODUCTION -

Les feuilletages de Libermann sont la généralisation, dans le cadre des feuilletages de Stefan, des feuilletages étudiés dans le cas régulier par P. Libermann [8] sous le nom de feuilletages symplectiquement complets et connus des mécaniciens sous le nom de "système complet d'intégrales premières". Ceci justifie le nom donné à cette catégorie de feuilletages

L'étude de ces feuilletages a été clarifiée par l'introduction de la notion de Γ-structure poissonnienne qui est l'extension maximale de la notion de moment au sens de J.M. Souriau [10]. (cf. Chapitre V "Géométrie du Moment"). La notion de feuilletage de Libermann apparaît alors comme duale de celle de Γ-structure poissonnienne. C'est le point de vue adopté ici.

Dans un dernier paragraphe on utilise la théorie des feuilletages de Libermann pour donner une preuve du théorème de structure locale de A. Weinstein [11] pour les variété de Poisson.

Notations - On rappelle que pour tout sous-espace vectoriel V de T_xP , $V^\Lambda = \Lambda^{\#} \nu^* V$ où $\nu^* V = \{\omega \in T^*_x P \mid \omega|_V = O\}$ et Λ est le tenseur de Poisson.

1. Γ-STRUCTURE POISSONNIENNE. FEUILLETAGES DE LIBERMANN -

DEFINITION 1.1 [2] - Une Γ-structure poissonnienne de modèle (Q,Λ_Q) sur la variété de Poisson (P,Λ) est la donnée d'un recouvrement ouvert U_i de P, pour chaque i d'une famille π_i d'applications C^∞ de U_i dans Q et pour tout couple (i,j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ d'un difféomorphisme de Poisson γ_{ij} entre deux ouverts de Q tels que

i) π_i est un morphisme de Poisson de U_i dans Q.

ii) Pour tout $x \in U_i \cap U_j$ $\gamma_{ij} \circ \pi_j (x) = \pi_i (x)$.

Les (U_i) s'appellent les ouverts distingués de la Γ-structure.

Une Γ-structure poissonnienne de modèle (Q,Λ_Q) est donc une Γ-structure au sens de Haefliger à laquelle on impose en plus, ce qui tient compte de la structure de Poisson de la variété support, que les morphismes distingués π_i soient de Poisson.

Pour tout point $x \in P$ $\mathrm{Ker} T_x \pi_i$ ne dépend pas des i tels que $x \in U_i$ d'après ii). On pose $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_\Gamma(x) = \ker T_x \pi_i$ et on note $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_\Gamma$ la distribution $\mathcal{D}_\Gamma \cap \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est le feuilletage caractéristique de (P,Λ). $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_\Gamma$ s'appelle la distribution associée à la Γ-structure poissonnienne. Cette distribution n'a en général aucune propriété de continuité.

THEOREME 1.1. - Soit $(U_i , \pi_i , \gamma_{ij})$ une Γ-structure poissonnienne et $\mathcal{V}$ la distribution définie par

$$\mathcal{V} = \Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{D}_\Gamma$$

où $\nu^* \mathcal{D}_\Gamma$ est la distribution conormale.

$\mathcal{V}$ est un feuilletage de Stefan, engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens des fonctions appartenant à $(\pi_i^* C^\infty(Q,\mathbb{R}))_{i\in I}$.

DEFINITION 1.1 - Un feuilletage (de Stefan) $\mathcal{V}$ de (P,Λ) est un feuilletage de Libermann si et seulement si $\mathcal{V}^\Lambda$ est la distribution associée à une Γ-structure poissonnienne. On dit que la Γ-structure est un moment généralisé de $\mathcal{V}$.

Démonstration du théorème 1.1 -

Comme $\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{V} = \Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{D}_\Gamma$ équivaut à $\mathcal{V}|_S = (\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}|_S)^\sigma$ pour toute feuille (S,σ) de ρ ce qui est, à son tour, équivalent à $\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}} = \mathcal{V}^\Lambda$.

En particulier si $\mathcal{V}_\Lambda \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{V}_1^\Lambda = \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$, $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$.

On se place sur un ouvert distingué U_i de la Γ-structure.

Soit $\mathcal{G}_i = [\Lambda, \pi_i^* C^\infty (Q,\mathbb{R})]$. $\mathcal{G}_i$ est une algèbre de Lie de champs hamiltoniens.

LEMME - $\mathcal{G}_i$ est complète.

Preuve du lemme - Tout revient à prouver que si $X = [\Lambda, \overset{*}{\pi_i} u]$ a pour flot φ_t et si $Y = [\Lambda, \overset{*}{\pi_i} v]$, il existe w_t fonction C^∞ sur un ouvert de Q telle que $\varphi_{t*} Y = [\Lambda, \overset{*}{\pi_i} w_t]$.

Or $$\frac{d}{dt} \varphi_{t*} Y = \varphi_{t*}[X,Y] = \varphi_{t*} [\Lambda, \overset{*}{\pi_i} \{u,v\}]$$

puisque π_i est un morphisme de Poisson. Compte tenu des propriétés du crochet de Schouten

$$\frac{d}{dt} \varphi_{t*} Y = [\varphi_{t*} \Lambda , \{u,v\} \circ \pi_i \circ \varphi_{-t}]$$

X étant un automorphisme infinitésimal de Poisson $\varphi_{t*} \Lambda = \Lambda$.
D'autre part si $\tilde{\varphi}_t$ est le flot du champ $[\Lambda_Q ,u]$, π_i étant de Poisson $\pi_i \circ \varphi_{-t} = \tilde{\varphi}_{-t} \circ \pi_i$. Il en résulte que

$$\varphi_{t*} Y = Y + [\Lambda , \overset{*}{\pi_i} w_t]$$

où $w_t (x) = \int_0^t \{u,v\} \circ \tilde{\varphi}_{-t} (x)\, dt$, ce qui achève la démonstration.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_i$ étant complète engendre un feuilletage de Stefan $\mathcal{V}_i$ sur U_i qui ne dépend pas de i compte tenu de la condition (ii). Ce feuilletage qui ne dépend que de la Γ-structure est dorénavant noté $\mathcal{V}$. Il reste à voir que $\mathcal{V} = \Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{D}_\Gamma$.

Comme $\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}} = \mathcal{D}_\Gamma \quad \mathcal{S}$ et que $\Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{S} = O$, $\Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{D}_\Gamma = \Lambda^{\#} \nu^* \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$

Mais $\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$ étant contenu dans $\mathcal{S}$, il résulte des remarques du début de la démonstration que $\mathcal{V} = \Lambda^{*} v^{*} \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$ équivant à $\mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}} = \mathcal{V}^{\Lambda}$. Tout revient donc à prouver.

LEMME 2 - $\mathcal{V}_i^{\Lambda} = \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$.

Preuve du lemme 2 -

1) Soit $X \in \mathcal{V}_i^{\Lambda}(x)$. Par définition de $\mathcal{V}_i^{\Lambda}$ il existe $w \in v^{*}\mathcal{V}_i^{\Lambda}(x)$ telle que $X = \Lambda^{*}\omega$. Comme $\omega \in v^{*}\mathcal{V}_i^{\Lambda}(x)$ pour tout $u \in C^{\infty}(Q,\mathbb{R})$ $<[\Lambda,\pi_i^{*} u],\omega> = O$

Ceci équivaut à $\forall u \in C^{\infty}(Q,\mathbb{R})$ $<T\pi_i(\Lambda^{*}\omega),du> = O$ soit $T\pi_i(\Lambda^{*}\omega) = O$.
Autrement dit $X = \Lambda^{*}\omega \in \operatorname{Ker} T\pi_i \mathcal{S}$. On a ainsi prouvé que $\mathcal{V}_i^{\Lambda} \subset \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}$.

2) Inversement si $X \in \mathcal{D}_\Gamma^{\mathcal{S}}(x)$, il existe $\omega \in T_X^{*}P$ telle que $\Lambda^{*}\omega = X$.

D'autre part pour tout $u \in C^{\infty}(Q,\mathbb{R}) <T\pi(X),du> = O$ ce qui s'écrit encore $<\omega,[\Lambda,\pi_i^{*} u]> = O$.

Autrement dit $\omega \in v^{*}\mathcal{V}$ et donc $\mathcal{D}_\Lambda^{\mathcal{S}} \subset \mathcal{V}_i^{\Lambda}$ ce qui achève la démonstration.

2 - EXEMPLES -

2.A - Théorème de P. Libermann - Ce théorème est à l'origine de la démonstration adoptée.

THEOREME 2.1 (P. Libermann [8]) - Soit (M,σ) une variété symplectique, $\mathcal{V}$ un feuilletage régulier sur M. $\mathcal{V}$ est de Libermann si et seulement si $\mathcal{V}^{\sigma}$ est un feuilletage et dans ce cas $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^{\sigma}$ sont deux feuilletages de Libermann orthogonaux.

Démonstration -

1) Soit $\mathcal{V}$ un feuilletage de Libermann. Il existe une Γ-structure Poissonnienne telle que $\mathcal{V}^{\sigma} = \mathcal{D}_{\Gamma}$. Mais $\mathcal{V}$ étant régulier et (M,σ) symplectique $\mathcal{V}^{\sigma}$ est de rang constant. $\mathcal{D}_{\Gamma} = \mathcal{V}^{\sigma}$ est alors un feuilletage régulier.

2) Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage tel que $\mathcal{V}^{\sigma}$ soit un feuilletage, soit U_i un recouvrement ouvert distingué de M pour $\mathcal{V}^{\sigma}$ tel que

1) - si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $U_i \cap U_j$ soit un ouvert distingué de $\mathcal{V}^{\sigma}$.

2) - L'application de l'espace transverse aux plaques de $U_i \cap U_j$ dans l'espace des plaques Q_i de U_i (resp. Q_j de U_j) soit un homéomorphisme injectif.

Soit $Q = \coprod Q_i$ et $\pi_i : U_i \to Q_i$ la projection canonique. Comme $\mathcal{V}|_{U_i} = \mathcal{V}_i$ est engendré par les $[\Lambda, \overset{*}{\pi_i} u]$ $u \in C^{\infty}(Q_i, \mathbb{R})$ puisque $\mathcal{V}_i^{\sigma} = \operatorname{Ker} T\pi_i$, $[\Lambda, \{\overset{*}{\pi_i} u, \overset{*}{\pi_i} v\}] \in \mathcal{V}_i$ pour tout couple (u,v) de fonction C^{∞} sur Q_i . Il en résulte que $\{\overset{*}{\pi_i} u, \overset{*}{\pi_i} v\}$ est constante sur les fibres de π_i. π_i étant une submersion surjective, il existe une unique fonction w sur Q telle que $\overset{*}{\pi_i} w = \{\overset{*}{\pi_i} u, \overset{*}{\pi_i} v\}$. La relation $(u,v) \to w$ munit Q_i d'une structure de Poisson. On munit ainsi $Q = \coprod Q_i$ d'une structure de Poisson telle que $\pi_i : U_i \to Q_i$ soit, pour tout i, un morphisme de Poisson.

Enfin si Q_{ij} désigne l'espace des plaques de $U_i \cap U_j$, $Q_{ij} \to Q_i$ (resp. Q_j) est un difféomorphisme de Q_{ij} dans Q_i (resp. Q_j) ce qui permet de définir un difféomorphisme d'un ouvert de Q_i dans un ouvert de Q_j , γ_{ij} , qui est, par construction même, un morphisme de Poisson :

$$\overset{*}{\pi_i} \{ \overset{*}{\gamma_{ji}} u , \overset{*}{\gamma_{ji}} v\}_i = \{\overset{*}{\pi_j} u, \overset{*}{\pi_j} v\} = \overset{*}{\pi_j} \{u,v\}_j = \overset{*}{\pi_i} \overset{*}{\gamma_{ji}} \{u,v\}_j .$$

Il en résulte que $\{\overset{*}{\gamma_{ji}}u,\overset{*}{\gamma_{ji}}v\}_i = \overset{*}{\gamma_{ji}}\{u,v\}_j$ ce qui achève la démonstration :

$(U_i , \pi_i , \gamma_{ij})$ est une Γ-structure poissonnienne et par construction même $\mathcal{D}_\Gamma = \mathcal{V}^\sigma$.

COROLLAIRE - Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage régulier coïsotrope sur une variété symplectique (M,σ), $\mathcal{V}$ est de Libermann.

En effet $\mathcal{V}^\sigma$ est un feuilletage (isotrope) régulier.

2.B - Extension du résultat précédent -

PROPOSITION 2.1 - Soit $\mathcal{V}$ un feuilletage sur (P,Λ) tel que $\mathcal{V}^\Lambda$ soit un feuilletage régulier. Alors $\mathcal{V}$ est de Libermann et son moment $g : (P,\Lambda) \to (Q,\Lambda_Q)$ est tel que $\mathcal{V}^\Lambda$ = Ker Tg.

Démonstration - La démonstration est analogue à la précédente. Il suffit de considérer un bon recouvrement de (P,Λ) par des ouverts $\mathcal{V}^\sigma$ distingués. Dans ce cas on notera que le moment de $\mathcal{V}$ $g : (P,\Lambda) \to (Q,\Lambda_Q)$ est tel que $\mathcal{V}^\Lambda$ = Ker Tg.

2.C - Cas d'un morphisme de Poisson -

Si $f : (P_1, \Lambda_1) \to (P_2, \Lambda_2)$ est un morphisme de Poisson, $\mathcal{V} = [\Lambda, f^* C^\infty(P_2, \mathbb{R})]$ est un feuilletage de Libermann d'après le théorème 1.1 et $\mathcal{V}^\Lambda = \operatorname{Ker} Tf \cap \mathcal{S}_1$. Soit V une feuille de $\mathcal{V}$ et $f_V = f|_V$.

PROPOSITION 2.2 - f(V) est contenu dans une feuille S_2 de (P_2, Λ_2) et $f_V = V \to S_2$ est une submersion dont les fibres sont les feuilles de $TV_\cap TV^\Lambda$ qui sont les caractéristiques de V au sens de I.13.

N.B. Dans ce cas $\mathcal{F}_V \equiv \mathcal{V}_\cap \mathcal{V}^\Lambda$ bien qu'en général $v^*_\Lambda V \to V$ ne soit pas de rang constant.

Démonstration - $T_x V = \{[\Lambda, f^*u](x) \mid u \in C^\infty(P_1, \mathbb{R})\}$

$Tf.T_x V = \{Tf \circ \Lambda_1^\# f^*du \mid u \in C^\infty(P_1, \mathbb{R}) = \{\Lambda_2^\# du \mid u \in C^\infty(P_2, \mathbb{R})\} = \rho_2(f(x))$.

Ceci assure que f(V) est contenu dans une feuille S_2 de (P_2, Λ_2) et que $f_V : V \to S_2$ est une submersion.

D'autre part $\mathcal{F}_V \subset TV \cap TV^\Lambda \subset \operatorname{Ker} Tf_V$ par construction. Inversement soit $X \in \operatorname{Ker} Tf_V(x)$. Comme $X \in TV$, il existe $\omega \in T^*_x P_1$ telle que $X = \Lambda^\# \omega$. $Tf(x).X = O$ équivaut à $\langle Tf \Lambda^\# \omega, du \rangle = O$ pour tout $u \in C^\infty(P_2, \mathbb{R})$. Ceci entraîne que $\omega \in v*V$. Comme par hypothèse $X = \Lambda^\# \omega \in TV$, $\omega \in v^*_\Lambda V$ ce qui entraîne que $X \in \mathcal{F}_V$ et donc $\mathcal{F}_V \equiv \operatorname{Ker} Tf_V$.

Pour tout champ de vecteurs X sur une variété M on note $t^+(X,x)$

(resp. $t^-(X,x)$) la borne supérieure (resp. inférieure) de l'intervalle de définition du flot en x. Enfin on note $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

PROPOSITION ET DEFINITION 2.1 - Soit $f : (P_1, \Lambda_1) \to (P_2, \Lambda_2)$ un morphisme de Poisson. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(I) $\forall u \in C^\infty(P_2, \mathbb{R}),\ t^\pm(x,[\Lambda_1, f^*u]) = t^\pm(f(x),[\Lambda_2, u])$

(II) $\forall u_0 \in C_0^\infty(P_2, \mathbb{R}),\ t^\pm(x,[\Lambda, f^*u_0]) = \pm\infty$.

Un morphisme de Poisson qui vérifie l'une ou l'autre des assertions équivalentes (I) et (II) est un morphisme de Poisson complet.

DEMONSTRATION - Il suffit de démontrer que (II) implique (I). Soit donc $u \in C^\infty(P_2, \mathbb{R})$ et $x \in P_2$. On fait la démonstration pour $t^+(x,[\Lambda, f^*u]) = t_1$ et $t^+(f(x),[\Lambda_2, u] = t_2$. $t_1 \leq t_2$. Soit $U_1 \subset U_2$ deux ouverts voisinages de $\varphi^2_{t_1}(f(x))$ où φ^2_t est le flot de $[\Lambda_2, u]$, tels que $\overline{U}_1$ soit compact et contenu dans U_2 . Soit $\chi \in C_0^\infty(P_2, \mathbb{R})$ telle que χ ait son support contenu dans U_2 et $\chi|_{U_1} \equiv 1$. Soit $t_0 < t_1$ tel que l'image de $[t_0, t_1]$ par $t \to \varphi^2_t(f(x))$ soit contenu dans U_1 et $\tilde{\varphi}_t$ le flot de $[\Lambda_1, \chi u]$. On note $y_0 = \varphi_0(f(x))$. φ_0 .

$t \to \tilde{\varphi}^2_t(y_0)$ est défini sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $\varphi^2_{t+t_0}(f(x))$ tant que $\tilde{\varphi}_t(y_0) \in \overline{U}_1$. Soit $\varphi^1_t(x)$ le flot de $[\Lambda_1, f^*u]$ et $\tilde{\varphi}^1_t$ le flot de $[\Lambda_2, f^*(\chi u)]$. Donc tant que $\tilde{\varphi}_t(y_0) \in \overline{U}_1$, $\varphi^1_{t+t_0}(x)$ existe. Il en résulte que $t^+(x,[\Lambda_1, u]) \geqslant t_2$ et donc $t_1 \equiv t_2$ ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1 - Si $f : (P_1, \Lambda_1) \to (P_2, \Lambda_2)$ est un morphisme de Poisson complet, pour toute feuille V du feuilletage de moment f, $f : V \to S_2$ est une submersion surjective.

Démonstration - Soit x_0 et $y_0 = f(x_0)$. Soit $y \in S_2$. y est accessible à partir de y_0 par un produit de flots hamiltoniens de fonction u_j. f étant complet, les courbes intégrales de $[\Lambda_1, f^* u_j]$ ont pour image par f les courbes intégrales de $[\Lambda_2, u_j]$. Il en résulte qu'il existe x tel que $f(x) = y$. f est donc surjective.

COROLLAIRE 2 - Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage de Libermann, $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{\Lambda}$ a la propriété de variété intégrale maximale et pour toute feuille V de $\mathcal{V}$ $\mathcal{F}_V \equiv TV \cap TV^{\Lambda}$. Les variétés intégrales maximales s'appellent les caractéristiques de $\mathcal{V}$.

Démonstration - La propriété étant de nature locale il suffit de se placer au voisinage d'un point de (P,Λ) et d'appliquer la proposition 2.2.

Remarque - $(\mathcal{V}^{\Lambda})^{\Lambda} = \mathcal{W}$ est un autre feuilletage de Libermann de même moment. Il en résulte en particulier que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\Lambda} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{\Lambda}$. Ces deux feuilletages ont même caractéristiques et $\mathcal{W}|_S$ est de Libermann sur (S, σ_S) si S est une feuille symplectique de (P,Λ). Ceci ramène l'étude des caractéristiques à l'étude des caractéristiques des feuilletages de Libermann des variétés symplectiques. (cf. infra).

Cas particulier - Soit $\pi : (P,\Lambda) \to (M,O)$ un morphisme de Poisson sur la variété triviale $(M, \Lambda_M \equiv O)$. $\mathcal{V} = [\Lambda, \pi^* C^{\infty}(M,\mathbb{R})]$ est alors contenu dans Ker $T\pi$. Comme $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\Lambda}$ et $\mathcal{V}$ est un feuilletage de Libermann isotrope. C'est le cas, par exemple, d'une variété de Lie

Poisson $\pi : E^* \to M$. Dans ce cas π étant une submersion, $(E_x = x)$ est une variété coïsotrope. (cf. chapitre I).

2.D- Moment d'une action hamiltonienne -

Si G est un groupe d'actions hamiltoniennes à (M,σ) de moment $J : M \to \underline{G^*}$ au sens de Souriau [10], J est un morphisme de Poisson de M dans $(G^* , -d\xi + \Theta)$ (cf. [10]) . Les orbites de G sont exactement les feuilles du feuilletage de Libermann de moment J. Ceci doit être considéré comme le cas linéaire si $\Theta \equiv O$, affine sinon. J est un morphisme complet et sur chaque orbite f est une fibration sur la feuille correspondante de $(\underline{G^*}, -d\xi + \Theta)$ qui est une orbite de la coadjointe si $\Theta \equiv O$. La situation générale correspond à la "dérive non linéaire" qui est au centre du propos poursuisvi.

Cette remarque justifie le nom de moment généralisé donné à la Γ-structure poissonnienne associé à un feuilletage de Libermann ; dans l'exemple ci-dessus la Γ-structure poissonnienne est la Γ-structure simple $(M,J,\underline{G^*})$ et le feuilletage est le feuilletage par les orbites de G.

3 - FEUILLETAGES DE LIBERMANN REGULIERS SUR UNE VARIETE SYMPLECTIQUE -

PROPOSITION 3.1 [5] - Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage de Libermann régulier sur la variété symplectique (M,σ), $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ est un feuilletage coïsotrope de Stefan.

Démonstration - Le théorème est de nature locale. Soit U un ouvert $\mathcal{V}$-distingué, $\check{U}$ l'espace de ses plaques. $\check{U}$ est canoniquement muni d'une structure de Poisson telle que la projection $\pi : U \to \check{U}$ soit un morphisme de Poisson. $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma |_U$ est une distribution C^∞ et possède la propriété de variété intégrale maximale : si Σ_0 est une feuille symplectique de $\check{U}$, pour tout $x \in \overset{-1}{\pi}\,\Sigma\ T_x\ \overset{-1}{\pi}\,\Sigma_0 = (\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma)(x)$. Il en résulte que $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ est un feuilletage de Stefan [4] , [9] . C.Q.F.D.

Soit Σ une feuille de $\mathcal{V} + \mathcal{V}^{\sigma}$. Σ est coïsotrope. On a un isomorphisme,

$$\begin{tikzcd} \nu^*\Sigma \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & \mathfrak{F}_{\Sigma} \arrow[dl] \\ & \Sigma & \end{tikzcd}$$

qui définit la structure d'algébroïde de Lie de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$ et il résulte du chapitre I que $\nu^*\Sigma \to \Sigma$ est un fibré localement trivial en algèbre de Lie dont on va préciser la structure.

Sur un ouvert $\mathcal{V}^{\sigma}$-distingué U , Σ_U plaque de $x_0 \in U$ de Σ, est égale à $\overset{-1}{\pi}$ S où S est la feuille symplectique de $\pi(x_0)$. $\nu^*S \to S$ est un fibré localement trivial en algèbres de Lie et $\nu^*\Sigma_U \to \Sigma_U$ est égal à $\overset{-1}{\pi}\nu^*S \to \Sigma_U$ ce qui montre que $\nu^*\Sigma_U \to \Sigma_U$ est fibré en algèbres de Lie. Si Σ_V est une autre plaque de Σ dans un voisinage $\mathcal{V}^{\sigma}$-distingué V, et $\Sigma_U \cap \Sigma_V \neq \emptyset$, la Γ-structure poissonnienne fournit un difféomorphisme de Poisson de $\check{V}$ dans $\check{U}$ qui échange $\pi\Sigma_V$ et $\pi\Sigma_U$. Il en résulte que $\nu^*\Sigma \to \Sigma$ est un fibré localement trivial en algèbres de Lie. On note [(,)] cette structure sur les fibres de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$. Par construction même, si ω_i (i=1,2) sont deux sections locales de $T^*\check{U} \to \check{U}$ telles que avec les notations précédentes $\omega_i|_S \in \nu^*S$,

$$\begin{aligned} [|\pi^*\omega_1 , \pi^*\omega_2 |](x) &= \pi^*\{\omega_1(x), \omega_2(x)\} \\ &= \pi^*\{\omega_1 , \omega_2\}(x) \\ &= \{\pi^*\omega_1 , \pi^*\omega_2\}(x) \end{aligned}$$

Autrement dit si $(\tilde{\omega}_i)$ sont deux sections locales de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$ images réciproques de sections de $\nu^*S \to S$ et par abus de notation, $\tilde{\omega}_i$ deux extensions locales à M de $\tilde{\omega}_i$,

$$[| \tilde{\omega}_1(x), \tilde{\omega}_2(x) |] = \{\tilde{\omega}_1 , \tilde{\omega}_2\}(x).$$

L'isomorphisme $\nu^*\Sigma \to \mathcal{F}_\Sigma$ définissant la structure d'algébroïde de Lie de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$, il en résulte que si l'on transporte par cet isomorphisme la structure d'algèbre de Lie des fibres de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$ sur les fibres de $\mathcal{F}_\Sigma \to \Sigma$, et si l'on note encore $[|\ ,\ |]$ cette structure, si

$X_i = \Lambda^\# \pi^* \omega_i$, $[|X_1(x), X_2(x)|] \equiv [X_1, X_2](x)$. Les feuilles de $\mathcal{F}_\Sigma$ sont donc munies d'une structure à crochet $[|\ \ |]$ au sens de C. Albert [1].

On va voir que cette structure est en fait plate discrète. Soit F une caractéristique de $\mathcal{V}$ la feuille V de $\mathcal{V}$. C'est aussi une caractéristique de la feuille Σ de $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ contenant V. Soit ∇ la connexion de Bott de V feuille de $\mathcal{V}$. Si ω est une section locale de $\nu^*V \to V$ et $\tilde{\omega}$ une section locale de $\nu^*\mathcal{V} \to M$ étendant ω , $\nabla_X\omega = i_X\, d\tilde{\omega}\,|_V$ où $X \in TF$.

LEMME 1 - ∇ induit une connexion sur $\nu^*\Sigma|_F \to F$.

Preuve du lemme - Soit ω une section locale de $\nu^*\Sigma|_F$; $\nu^*\Sigma|_F \to \nu^*V|_F$. Tout revient donc à prouver que si $X \in TF$, $\nabla_X\omega \in \nu^*\Sigma|_F$. Or $\nu^*\sigma|_F = \nu^*_\Lambda V|_F$ autrement dit $\nabla_X\omega \in \nu^*\Sigma|_F$ si et seulement si $\Lambda^\# \nabla_X\omega \in TV$. Soit donc $\omega' \in \nu^*\mathcal{V} \to M$; il faut vérifier que

$$<\omega', \Lambda^\# \nabla_X\omega> = O \text{ soit}$$

$$d\omega(X, \Lambda^\#\omega') \equiv O.$$

On prolonge X en un champ appartenant à $\mathcal{V}$.

$$d\omega(X,\Lambda^\#\omega') = \mathcal{L}_X\, \omega(\Lambda^\#\omega') - \mathcal{L}_{\Lambda^\#\omega'}\, \omega(X) - \omega[X,\Lambda^\#\omega'] .$$

$$\omega(\Lambda^\#\omega') = -\omega'(\Lambda^\#\omega) = O \text{ car } \Lambda^\#\omega \in \mathcal{V} \text{ et } \omega' \in \nu^*\mathcal{V} .$$

De même $\omega(X) = O$. Enfin $[X,\Lambda^\#\omega'] \in [\mathcal{V},\mathcal{V}^\sigma] \subset \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$.

Comme $\omega \in \nu^*\Sigma$, $\omega[\mathcal{V},\mathcal{V}^\sigma] = O$, ce qui prouve que

$$\nabla_X \omega \in \nu^*\Sigma|_F . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Il résulte des remarques précédant le lemme 2 que si $\pi : U \to \check{U}$ est un ouvert $\mathcal{V}^\sigma$-distingué,

$$\nabla_X \pi^*\omega = \iota_X \pi^* d\omega = O \text{ puisque } T\pi(X) = O.$$

Donc $\pi^*\omega|_F$ est une section parallèlle de $\nu^*\Sigma|_F$.
Enfin, pour deux telles sections de $\nu^*\Sigma|_F$ ($\pi^*\omega_1$,$\pi^*\omega_1$),

$$\nabla_X [\, |\pi^*\omega_1 (x),\pi^*\omega_2 (x)|\,] = \nabla_X \{\pi^*\omega_1 , \pi^*\omega_2\} = \nabla_X \pi^*\{\omega_1 ,\omega_1\} = O.$$

Donc ∇ est une connexion - plate puisque déduite de la connexion de Bott - adaptée à la structure à crochet. F muni de la connexion linéaire D déduite de ∇ par l'isomorphisme $\nu^*\Sigma|_F \to TF$ est donc une variété $\underline{K}$-plate discrète au sens de C.Albert [1], $\underline{K}$ désignant la fibre type de $\nu^*\Sigma \to \Sigma$. . On notera que l'holonomie de D est un sous-groupe de l'holonomie infinitésimale de V.

THEOREME 3.1 [5] - Les caractéristiques d'un feuilletage de Libermann régulier $\mathcal{V}$ sur une variété symplectique (M,σ) sont des variétés $\underline{K}$ plates discrètes au sens de C. Albert ; l'algèbre de Lie $\underline{K}$ ne dépend que de la feuille Σ de $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ contenant la caractéristique considérée.

DEFINITION 3.1 - Une caractéristique F de $\mathcal{V}$ est complète si la connexion linéaire D de F déduite de la connexion de Bott de $\mathcal{V}$ est complète.

Exemple - Si $f : (M,\sigma) \to (P,\Lambda)$ est une submersion de Poisson complète (au sens de la définition 2.1), toutes les caractéristiques du feuilletage de moment f (qui est régulier puisque f est une submersion) sont complètes.

Soit F une caractéristique complète de $\mathcal{V}$, et K le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\underline{K}$. Soit $\tilde{F}$ le revêtement universel de F et $\tilde{D}$ le relèvement à $\tilde{F}$ de la connexion linéaire D de F. D étant sans holonomie, il existe une base de champs invariants par holonomie infinitésimale $X_1, \ldots, X_k$ $k = \dim F$.

Comme $D_Y [X_i, X_j] = [D_Y X_i, X_j] + [X_i, D_Y X_j]$

$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ où c_{ij}^k sont les constantes de structures de $\underline{K}$. Il en résulte que $\tilde{F}$ est isomorphe à K et dans l'identification des champs à dérivée covariante nulle de $\tilde{F}$ deviennent des champs invariants à gauche de K. $\pi_1 F$ est un groupe discret de difféomorphismes de K conservant chaque champ invariant à gauche. C'est donc un sous-groupe discret K_0 de K et $F = K/K_0$.

Soit ρ le morphisme d'holonomie de F : $\rho : K_0 \to \psi_1$ (F). En échangeant les rôles de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^\sigma$ on munit $TF \to F$ d'une deuxième structure à crochet $\underline{K}$ plate discrète. En fait, cette structure est la structure opposée de la structure précédente : si X_0, $Y_0 \in T_{x_0}F$ et si (X,Y) (resp.(X',Y')) sont deux sections de $TF \to F$ à dérivée covariante nulle relativement à la connexion D (resp. D^σ) déduite de la connexion de Bott de $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}^\sigma$)

$$[X-X', Y-Y'](x_0) = [X,Y] + [X',Y'] - [X',Y] - [X,Y'] = O$$

puisque $(X-X')(x_0) = (Y-Y')(x_0 = O$. On peut toujours trouver un voisinage U de x_0 qui soit $\mathcal{V}^\sigma$ et $\mathcal{V}$ distingué. Soit $\pi : U \to \check{U}$ (resp. π' $U \to \check{U}'$) l'application de U sur les plaques de $\mathcal{V}^\sigma$ (resp. $\mathcal{V}$). On peut toujours choisir X et X' tels que $X = [\Lambda, \pi^* u]$ et $X' = [\Lambda, \pi^* u']$ et de même $Y = [\Lambda, \pi^* v]$ et $Y' = [\Lambda, \pi^* v']$. Dans ces conditions $[X,Y'] = [\Lambda, \{\pi^* u, \pi^* v'\}]$

Or $\{\pi^*dv , \pi^*dv'\} = d(\iota_{\Lambda^* \pi^*dv}(\pi'^*dv')) = O$

car $\Lambda^* \pi^*dv \in \mathcal{V}$ et $\pi^*dv' \in v^*\mathcal{V}$. Autrement dit $[X,Y'] = O = [X',Y]$. Ainsi $[X,Y] = - [X',Y']$ ce qui achève la démonstration .

Soit $\psi_1^\sigma(F)$ l'holonomie de $TF \to F$ déduite de l'holonomie infinitésimale de $\mathcal{V}^\sigma$ et $\rho^\sigma : K_{x_0} = \pi_1 F \to \psi_1^\sigma(F_0)$. Compte tenu de ce qui précède, les champs invariants par la D^σ holonomie se relève en champs invariants à droite. Autrement dit si $\gamma \in K_{x_0}$ $X \in T_\varrho K$

$$\rho^\sigma(\gamma).X = p(X.\gamma) \quad \text{où} \quad p : K \to K/K_{x_0} = F$$

$$\rho^\sigma(\gamma).X = p(\gamma.ad_\gamma^{-1} X) = \rho(\gamma).ad_\gamma^{-1} X.$$

car $\rho(\gamma)X = p(\gamma.X)$.

Ainsi $\rho^\sigma(\gamma) = \rho(\gamma) \circ ad_\gamma^{-1}$. $\gamma \in K_{x_0}$ si V (resp. V^σ) contenant F et si V et V^σ sont sans holonomie minfinitésimale $\rho^\sigma(\gamma) \equiv \rho(\gamma)$ est l'identité de F. Il en résulte que $\forall X \in K$ $\forall \gamma \in K_{x_0}$ $ad_\gamma X \equiv X$ ce qui signifie que K_{x_0} est contenu dans le centre de K.

On a ainsi prouvé

THEOREME 3.2 [6] - Si Σ est une feuille de $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ et F une caractéristique complète de Σ, F est le quotient d'un groupe de Lie K ne dépendant que de Σ par un sous-groupe discret. Si de plus les feuilles de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^\sigma$ qui contiennent F sont sans holonomie infinitésimale, F est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\underline{K}$.

Ces résultats s'appliquent en particulier si $\mathcal{V}$ est un feuilletage régulier coïsotrope. Mais alors si (Q,Λ^Q) est la variété modèle de la Γ-

structure moment de $\mathcal{V}$, les feuilles symplectiques de (Q,Λ^Q) ont pour dimension $\dim\mathcal{V} - \dim\mathcal{V}^\sigma = 2\dim\mathcal{V} - \dim M$. (Q,Λ^Q) est donc régulière et l'algèbre $\underline{K}$ est abélienne.

COROLLAIRE 1 - Si $\mathcal{V}$ est coïsotrope, les caractéristiques complètes sont des quotients d'espaces euclidiens $\mathbb{R}^k$ par des sous-groupes discrets. Si $\psi_1(V) = O = \psi_1(V^\sigma)$ F est un cylindre.

Supposons que $\psi_1(F)$ soit relativement compact. Dans ce cas on peut mettre sur F une structure riemanienne g telle que $Dg = O$. D'autre part $\underline{K}$ étant abélienne D est sans torsion. D est donc la connexion de Levi-Civita et F est une variété riemanienne plate. En particulier $\psi_1(F)$ est fini et F est le produit par un espace euclidien d'un quotient de tore par un groupe fini de difféomorphisme $\psi_1(F)$. [cf. 3].

COROLLAIRE 2. [3] - Si $\mathcal{V}$ est coïsotrope et si l'holonomie infinitésimale de V est relativement compacte, les caractéristiques complètes de V sont des produits par un espace euclidien d'un quotient fini de tore.

4. SUBMERSIONS DE POISSON. THEOREME DE STRUCTURE LOCALE -

Soit $f : (P,\Lambda) \to (M,\sigma)$ une submersion de Poisson sur une variété symplectique (M,σ), $\mathcal{V}$ le feuilletage de moment f. La dimension des feuilles de $\mathcal{V}$ est d'après la proposition 2.2 au moins égale à celle de M (unique feuille symplectique de (M,σ)!) et d'autre part au plus égale à celle de M. $\mathcal{V}$ est donc un feuilletage de Libermann régulier. $\mathcal{V}^\wedge$ est donc (Proposition 2.1 exemple 2B) également un feuilletage de Libermann de moment $g : (P,\Lambda) \to (Q,\Lambda_Q)$ et $\operatorname{Ker} Tg = \mathcal{V}$.

Soit $F : (P,\Lambda) \to (M,\sigma) \times (Q,\Lambda_Q)$ où $F = (f,g)$. F est un morphisme de Poisson dans la variété de Poisson produit si et seulement si $\{f^*u,g^*v\} \equiv O$. Comme $\{f^*u,g^*v\} = \langle Tg\Lambda^\# f^*du,dv\rangle$ ceci résulte de $\mathcal{V}=\operatorname{Ker}Tg$. Enfin si $X\in T_xP$, $DF(x)(X) = O$ entraîne que $X\in \operatorname{Ker}Tg = \mathcal{V}$.

Comme f est un difféomorphisme local des feuilles de $\mathcal{V}$ sur M $Df(x) = O$ entraîne que $X = O$. F est donc un difféomorphisme local.

PROPOSITION 4.1 - Si $f : (P,\Lambda) \to (M,\sigma)$ est une submersion de Poisson, $\mathcal{V}$, le feuilletage de Libermann de moment f, est régulier. $\mathcal{V}^{\Lambda}$ est un feuilletage de Libermann de moment

$g : (P,\Lambda) \to (Q,\Lambda^{Q})$ et $F = (f,g)$ est un difféomorphisme local de Poisson de (P,Λ) dans la variété produit $(M,\sigma) \times (Q,\Lambda_Q)$.

En particulier pour tout point $x_0 \in P$ on peut trouver un voisinage ouvert U de x_0, des voisinages ouverts U_1 de $f(x_0)$ et U_2 de $g(x_0)$ tels que (U,Λ) soit difféomorphe à la variété produit $(U_1,\sigma) \times (U_2,\Lambda_Q)$. En particulier le rang de Λ_Q en $g(x_0)$ est égal au rang de Λ en x_0 diminué de la dimension de M.

Soit $x_0 \in P$ tel que le rang de Λ en x_0 soit positif strictement. Il existe donc une application C^∞ $\mathcal{V} : P \to \mathbb{R}$ tel que $[\Lambda,v](x_0) \neq O$ $v(x_0) = O$. Le théorème de redressement du flot appliqué en x_0 à $[\Lambda,v]$ permet de construire sur un voisinage W de x_0 une application C^∞ $u : W \to \mathbb{R}$ telle que $\iota[\Lambda,v]du = 1$ et $u(x_0) = O$. Ceci peut s'exprimer en disant que $(u;v) : W \to \mathbb{R}^2$ est une submersion de Poisson de W sur $\mathbb{R}^2$ muni de la structure symplectique canonique $dt_2 \wedge dt_1$, si $\mathbb{R}^2 = (t_1,t_2)$. En restreignant au besoin W on peut supposer que (W,Λ) est difféomorphe au produit des variétés de Poisson $W_1 \times W_2$ où W_1 est un voisinage de O dans $\mathbb{R}^2$ et (W_2,Λ_2) une variété de Poisson dont le rang a diminué de deux unités. Si le rang de $\Lambda(x_0)$ est 2p p>o, en appliquant p fois le raisonnement précédent on a prouvé

THEOREME 4.1 [11] - Si (P,Λ) est une variété de Poisson et x_0) un point de P où le rang de Λ est $2p > O$, il existe un difféomorphisme de Poisson ψ d'un voisinage ouvert de x_0 dans P sur la variété de

Poisson produit d'un voisinage ouvert de O, S, dans $\mathbb{R}^{2p}$ muni de sa structure canonique par une variété de Poisson (N,Λ_N) de rang nul au point x_1 où $\psi(x_0) = (o,x_1)$.

Remarque - Notion de paire duale [11] - Soit (P,Λ), (P_1,Λ_1) et (P_2,Λ_2) trois variétés de Poisson, $(f_i : P \to P_i)_{i=1,2}$ deux morphismes de Poisson, (f_1, f_2) est une paire de duale si

(I) $\forall u_i \in C^\infty(P_i, \mathbb{R})$ $\{f_1^* u_1, f_2^* u_2\} = O$

(II) Si $w \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ est telle que pour tout u_i, $\{w, f_i^* u_i\} = O$

il existe u_j $(j \neq i)$ telle que $w = f_j^* u_j$.

La condition (I) assure que $F : (f_1, f_2) : P \to P_1 \times P_2$ est un morphisme de Poisson.

On dit que la paire (f_1, f_2) est pleine si f_1 et f_2 sont des submersions. Dans ce cas soit $\mathcal{V}_i$ le feuilletage de moment f_i.
La condition (I) équivaut à la condition $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2^{\Lambda}$ (qui équivaut à

$\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_2^{\Lambda}$ car $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont contenus dans $\mathcal{S}$). La condition (II) équivaut à $\mathcal{V}_1^{\Lambda} \equiv \mathcal{V}_2$ si du moins les f_i-fibres sont connexes.

Le théorème (4.1) exprime ainsi le fait que pour toute variété de Poisson il existe, au voisinage de tout point x_0 de P, une paire duale pleine dont l'un des facteurs est une variété symplectique et l'autre une variété de Poisson nulle au point image x_0. En fait si $\psi : U \to S \times N$ est la carte fournie par le théorème précédent, N (resp. $\tilde{N} = \psi^{-1}(N)$) est une sous-variété cosymplectique, de SxN (resp. P) puisque

$T_{x_0} S \oplus T_{x_0} \tilde{N} = T_{x_0} P$. Il en résulte que le germe de structure de Poisson sur N est le germe de structure transverse à la feuille de x_0. On peut donc préciser

COROLLAIRE 1 - Le germe de structure de Poisson de (P,Λ) en x_0 est isomorphe au produit des germes de structures en x_0 de la feuille symplectique S de x_0 et du germe de structure transverse de S.

Ce qui peut encore s'exprimer en disant

COROLLAIRE 2 - Soit $x_0 \in (P,\Lambda)$ S la feuille de x_0 et N une sous-variété de P en x_0 telle que $T_{x_0} N \oplus T_{x_0} S = T_{x_0} P$.

En remplaçant au besoin N par un voisinage ouvert de x_0 dans N on peut supposer N cosymplectique. Il existe alors un difféomorphisme de Poisson d'un voisinage ouvert de x_0 dans P, U, dans SxN muni de la structure produit de la structure symplectique de S par la structure induite sur N.

Dans le cas des variétés de Poisson homogène on peut préciser les résultats précédents.

THEOREME 4.2 [7] - Soit (P,Λ,Z) une variété de Poisson homogène et x_0 un point de P de rang $2q > 0$. Le germe de structure de Poisson homogène en x_0 est isomorphe (en tant que germe de structure homogène) au produit du germe de structure symplectique exacte canonique de $\mathbb{R}^{2q}$ par le germe de structure homogène transverse.

On se reportera à [7] pour la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE -

[1] **C. ALBERT**, *Some properties of k-plat manifolds,* J. Differential Geometry 11 (1976) 103-128.

[2] **M. CONDEVAUX, P. DAZORD, P. MOLINO,** *Géométrie du Moment,* (   ).

[3] **P. DAZORD,** *Sur la géométrie des sous-fibrés et feuilletages lagrangiens* (4) (13) 1981 (465-480) et erratum (4) (18) , (1985) 685.

[4] **P. DAZORD,** *Feuilletages à singularités.* Indag. Math. 47 (1985) 21-39.

[5] **P. DAZORD,** *Stabilité et linéarisation dans les variétés de Poisson.* Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie (J.C. Dufour ed.) Travaux en Cours, Hermann Paris.

[6] **P. DAZORD & T. DELZANT,** *Le problème général des variables actions-angles.* J. Differential Geometry 26 (1987) 223-251.

[7] **P. DAZORD, A. LICHNEROWICZ, C. MARLE,** *Structure locale des variétés de Jacobi* (Prépublication).

[8] **P. LIBERMANN,** *Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique.* 3ème rencontre du Schnepfenried. Astérisque n° 107/108, Soc. Math. France, Paris (1982).

[9] **P. STEFAN,** *Accessibility and foliations with singularities.* Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 1142-1145.

[10] **J.M. SOURIAU,** *Structures des systèmes dynamiques,* Dunod Paris, 1969.

[11] **A. WEINSTEIN,** *The local structure of Poisson manifolds.* J. Differential Geometry 18 (198), 523-557.