PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. COSTE
D. SONDAZ

Chapitre III Classification de submersions de Poisson isotropes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 91-102
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___1B_91_0>

CHAPITRE III

CLASSIFICATION DE SUBMERSIONS DE POISSON ISOTROPES

A. COSTE - D. SONDAZ

1. INTRODUCTION.

Dans cet article nous considérons une submersion de Poisson d'une variété symplectique (M,σ) sur une variété de Poisson (P,Λ) telle que les $f^{-1}(x)$ soient isotropes et vérifient diverses hypothèses de connexité et de complétude. Désignant par $\mathcal{S}$ le feuilletage canonique de P et par $\nu^*\mathcal{S}$ son fibré conormal, nous construisons un sous-faisceau $\mathcal{R}$ du faisceau des sections de $\nu^*\mathcal{S}$ tel qu'en tout point $x \in P$, $\mathcal{R}_x$ soit un sous-groupe discret de $\nu^*_x \mathcal{S}$ et tel que $\nu^*\mathcal{S}/\mathcal{R} \to P$ fournisse un modèle local de $f : M \to P$. Le cas où f est une fibration lagrangienne a été étudié par DUISTERMAAT ([6]). P. DAZORD et T. DELZANT ([3] , [4] , [5]) ont généralisé ce résultat au cas où f est une fibration isotrope symplectiquement complète à fibres compactes. La principale différence avec notre travail réside dans le fait que le rang de $\mathcal{R}_x$ varie avec x et que $\mathcal{R}$ n'est plus un revêtement de P. Cela permet néanmoins d'étendre un autre résultat démontré par ces auteurs : on peut définir une classe de Chern $\nu \in H^2(P,\mathcal{R})$ de la submersion f reliée à une classe de cohomologie relative $[\mathcal{S}] \in H^3(P,\mathcal{S})$ ([10]) par un morphisme $\tilde{d}: H^2(P,\mathcal{R}) \to H^3(P,[\mathcal{S}])$ suivant la formule $d\nu = [\mathcal{S}]$ qui traduit une "variation linéaire" de la forme symplectique des feuilles de $\mathcal{S}$. Réciproquement la donnée d'une variété de Poisson (P,Λ) munie d'un réseau permet de classifier les réalisations symplectiques ([11]) de (P,Λ) associées à $\mathcal{R}$.

Les auteurs tiennent à remercier P. DAZORD pour de nombreux conseils et encouragements.

2. HYPOTHESES.

On suppose données une $\mathcal{C}^\infty$-variété symplectique (M,σ) de dimension $2n$, une $\mathcal{C}^\infty$-variété de Poisson (P,Λ), une submersion de Poisson de classe $\mathcal{C}^\infty$ f de M sur P telle que, pour tout $x \in P$, les $f^{-1}(x)$ soient connexes et que le feuilletage $\mathcal{V}$ de M par les $f^{-1}(x)$ soit isotrope symplectiquement complet ([3], [4],[5]).

Soient $\mathcal{S}$ le feuilletage caractéristique de P, $\nu^*\mathcal{S}$ le fibré conormal à $\mathcal{S}$, n-k la dimension de $\mathcal{V}$. Alors $\dim P = n+k$, $\dim \nu^*_x \mathcal{S} = n-k$, $\dim \nu^*\mathcal{S} = 2n$, $\dim \mathcal{S} = 2k$.
P est donc une variété de Poisson régulière.

On désignera par $\pi : T^*P \to P$ la projection canonique, par $\mathcal{C}^\infty(\nu^*_p\mathcal{S})$ (resp. $Z(\nu^*_p\mathcal{S})$) le faisceau des p-formes différentielles sur P conormales ([3] , [4] , [5]) à $\mathcal{S}$ (resp. des $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*_p \mathcal{S})$ fermées). Pour $p=1$, on écrira simplement $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{S})$ et $Z(\nu^*\mathcal{S})$.

3. ACTION DE $\nu^*_x\mathcal{S}$ SUR $f^{-1}(x)$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{S})$ on définit le champ de vecteurs $X^\alpha \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ par

$$i_{X^\alpha}\sigma = -f^*\alpha$$

X^α est alors tangent à $\mathcal{V}$. On suppose que les feuilles $f^{-1}(x)$ sont complètes pour la connexion canonique plate ([2]). Les flots φ^α des X^α sont par conséquent complets.

On définit une action du groupe abélien $\nu^*_x \mathcal{S}$ sur la feuille $f^{-1}(x)$ par

$$\alpha.y = \varphi_1^\alpha(y)\ , \quad \forall y \in \nu^*{}_{,x}\mathcal{S}\ , \quad \forall y \in f^{-1}(x).$$

Soit $\mathcal{R}_x = \{\ \alpha \in \nu^*_x \mathcal{S}\ \ ;\ \alpha.y = y,\ \forall y \in f^{-1}(x)\}\ .$

On remarque que $\alpha \in \mathfrak{R}_x \Leftrightarrow \exists\, z \in f^{-1}(x),\ \alpha.z = z$ et que $\mathfrak{R}_x$ est un sous - groupe discret de $\nu_x^* \mathcal{A}$ (pour des raisons de dimension).

On pose $\mathfrak{R} = \bigcup_{x \in P} \mathfrak{R}_x$.

Pour tout point $x_0 \in P$ il existe une section s de f définie dans un voisinage ouvert U de x_0 et

$$x \in U,\ \alpha \in \mathfrak{R}_x \Leftrightarrow \varphi_1^{\alpha}(s(x)) = s(x).$$

L'application $\alpha \mapsto F_s(\alpha) = \varphi_1^{\alpha}(s(\pi(\alpha)))$ est un difféomorphisme local. C'est l'existence de sections locales de f qui permet d'établir le lemme et le théorème suivants qui sont les outils permettant d'étendre les résultats de [3] , [4] ,[5] au cas d'une submersion.

4. LEMME. *Pour tout* $x_0 \in P$ *et tout* $\alpha_0 \in \mathfrak{R}_{x_0}$ *, il existe un voisinage ouvert* U *de* x_0 *dans* P *, un voisinage ouvert* W *de* α_0 *dans* $\nu^* \mathcal{A}$ *et une unique section* η *de* $\nu^* \mathcal{A}$ *définie dans* U *tels que* $\eta(x_0) = \alpha_0$ *et* $\eta(U) = \mathfrak{R}_U \cap W$.

Preuve. On se donne une section s de f définie au voisinage de x_0. On est ramené à montrer l'existence d'une section η définie au voisinage de x_0 vérifiant $F_s(\eta(x)) = s(x)$.

Compte tenu de ce que F_s est un difféomorphisme local, le théorème des fonctions implicites permet de conclure.

5. COROLLAIRES.

i) $\mathfrak{R}$ *s'identifie au faisceau des germes de ses sections.*

ii) La topologie de faisceau de $\mathfrak{R}$ *est identique à la topologie induite par* $\nu^* \mathcal{A}$.

Preuve.

i) est évident.

ii) Le lemme montre que la topologie induite est plus fine que la topologie de faisceau. Réciproquement si A est un voisinage ouvert de α_0 pour la topologie induite, $A = \mathfrak{R}_{\pi(v)} \cap V$ où V est un ouvert de $v^*\mathcal{A}$ contenant α_0. On applique le lemme en $x_0 = \pi(\alpha_0)$ et en α_0 : en restreignant au besoin U et W on peut supposer que $\pi(W) = U$ et que $W \subset V$. Alors $\eta(U) = \mathfrak{R}_u \cap W \subset \mathfrak{R}_{\pi(v)} \cap V = A$.

6. THEOREME.

a) $\mathfrak{R}$ *est un sous-faisceau de* $\mathcal{C}^\infty(v^*\mathcal{A})$ *et une sous-variété fermée de* $v^*\mathcal{A}$ *de dimension* n+k.

b) On peut munir $v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}$ *d'une unique structure de variété séparée faisant de la projection canonique* $\rho : v^*\mathcal{A} \to v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}$ *une submersion.*

Preuve.

a) résulte facilement de ce qui précède.

Pour montrer b) posons :

$$\mathcal{C} = \{(\alpha,\beta) \in v^*\mathcal{A} \times v^*\mathcal{A} \; ; \; \alpha - \beta \in \mathfrak{R}\}$$

$\mathcal{C}$ est une sous-variété fermée de $v^*\mathcal{A} \times v^*\mathcal{A}$.

Si $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{C}$, le lemme montre l'existence d'une section η de $v^*\mathcal{A}$ définie sur un voisinage U de $x_0 = \pi(\alpha_0 - \beta_0)$ telle que $\eta(U) \subset \mathfrak{R}$. L'application $s(\alpha) = (\alpha, \alpha + \eta(\pi(\alpha)))$ est une section de la première projection de $\mathcal{C}$ dans $v^*\mathcal{A}$ qui est ainsi une submersion.

Le théorème de Godement sur les variétés quotients donne alors ce que nous voulons.

Remarque. La principale différence avec les résultats analogues établis dans [3] , [4], [5] est que le rang de $\mathfrak{R}_x$ dépend de x.

7. COROLLAIRE. *Localement ,* $v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R} \to P$ *est un modèle de* $f : M \to P$. *En effet, si* $\tilde{\alpha}$ *désigne la classe de* $\alpha \in v^*\mathcal{A}$ *modulo* $\mathfrak{R}$, si $\tilde{\pi} : v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R} \to P$ *est la projection définie par* $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha}) = \pi(\alpha)$, *si* s *est une section de* f *définie sur un voisinage* *ouvert* U *de* $x_0 \in P$, *le difféomorphisme local* $\hat{F}_s : (\nu^*\mathcal{A}/\mathfrak{R})_U \to f^{-1}(U)$ *défini par* $\hat{F}_s(\tilde{\alpha}) = F_s(\alpha)$ *rend commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(\nu^*\mathcal{A}/\mathfrak{R})_U \arrow[rr, "\hat{F}_s"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

8. PROPOSITION.

a) Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})$, $(\varphi_1^\alpha)^*\sigma - \sigma = -f^*\, d\alpha$.

b) $\mathfrak{R} \subset Z(\nu^*\mathcal{A})$.

Preuve. Si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})$, on peut écrire

$$(\varphi_1^\alpha)^*\sigma - \sigma = \int_0^1 \frac{d}{dt}((\varphi_t^\alpha)^*\sigma)dt = \int_0^1 (\varphi_t^\alpha)^*(\mathcal{L}_{X_\alpha}\sigma)dt =$$
$$= -d\int_0^1 (f \circ \varphi_t^\alpha)^*\,\alpha \;= -f^*\, d\alpha \,.$$

Si $\alpha \in \mathfrak{R}$, $(\varphi_1^\alpha)^*\sigma = \sigma$; f étant une submersion on en tire que $d\alpha = 0$.

9. COROLLAIRES.

i) La différentielle extérieure $d : \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}) \to Z(\nu_2^*\mathcal{A})$ *passe au quotient en une application*

$$\hat{d} \;:\; \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}) \to Z(\nu_2^*\,\mathcal{A})$$

définie par $\hat{d}\,\tilde{\alpha} = d\alpha$.

ii) Soient λ *l'image réciproque par l'inclusion* $\nu^*\mathcal{A} \hookrightarrow T^*P$ *de la 1-forme de Liouville de* T^*P *et* β *la 2-forme définie sur* $\nu^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}$ *par passage au quotient de* $d\lambda$ *. Alors, avec les notations de 7,*

$$\hat{F}_s{}^*\sigma = \tilde{\pi}^* s^* \sigma - \beta .$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})$, $\alpha^*\lambda = \alpha$. On en tire, en utilisant 8, que

$$s^*((\varphi_1^\alpha)^*\sigma) = \tilde{\alpha}^*(\tilde{\pi}^* s^* \sigma - \beta).$$

Par ailleurs $s^*((\varphi_1^\alpha)^*\sigma) = (\hat{F}_s \circ \tilde{\alpha})^*\sigma$ et la formule à montrer en résulte.

10. PROPOSITION. *Le rang de $\mathcal{R}$ est constant le long des feuilles de $\mathcal{A}$.*

Preuve. Soit $x_0 \in$ P. Comme P est une variété de Poisson régulière, x_0 possède un voisinage ouvert U difféomorphe à un produit $S \times N$, S étant la feuille de $\mathcal{A}$ passant par x_0.

Utilisons des cartes locales : S (resp. N) s'écrit comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2k}$ (resp. de $\mathbb{R}^{n-k}$). Soient $(v^1,...,v^{2k}, u^1,...,u^{n-k})$ des coordonnées sur $S \times N$ et posons $x_0 = (v_0,u_0)$.

Soient $\eta_0 \in \mathcal{R}_{(v_0,u_0)}$ et η la section de $\mathcal{R}$ définie au voisinage de (v_0,u_0) telle que $\eta(x_0) = \eta_0$. Cette section est définie sur un ouvert de la forme $S_0 \times N_0$, S_0 (resp. N_0) étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{2k}$ (resp. de $\mathbb{R}^{n-k}$) contenu dans S (resp. dans N). L'écriture locale de η est de la forme

$$\eta(v,u) = \sum_{i=1}^{n-k} a_i(u)du^i \qquad (1)$$

Prolongeons η en $\bar{\eta} : S \times N_0 \to \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})|_{S \times N_0}$ en définissant $\eta(v,u)$, pour $(v,u) \in S \times N_0$ par la formule (1).

En utilisant 6 et par un argument de connexité on montre que $\bar{\eta}$ est à valeurs dans $\mathcal{R}$.

Si $v_1 \in S$, l'application $\eta_0 \mapsto \bar{\eta}\,(v_1,u_0)$ est un homomorphisme de groupes de $\mathcal{R}_{(v_0,u_0)}$ dans $\mathcal{R}(v_1,u_0)$. Le lemme du paragraphe 4 permet de montrer que c'est un isomorphisme.

11. THEOREME. *Soit* $m(x)$ *le rang de* $\mathcal{R}_x$.

a) Si $x_0 \in P$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x_0 *tel que* $m(x) \geqslant m(x_0)$, $\forall x \in U$.

b) Soit P_0 *l'ouvert de* P *sur lequel* $m(x)$ *est maximum. Alors* $\mathcal{R}_{P_0}$ *est un revêtement de* P_0.

Preuve.

a) Si $(\eta_0^i)_{1 \leqslant i \leqslant m(x_0)}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{R}_{x_0}$ on peut trouver (d'après 4) $m(x_0)$ sections de $\mathcal{R}$, η_i, $1 \leqslant i \leqslant m(x_0)$, définies sur un voisinage U de x_0, telles que $\eta^i(x_0) = \eta_0^i$. En restreignant, au besoin, U on peut supposer les $\eta^i(x)$ indépendants en tout point $x \in U$, ce qui entraîne que $m(x) \geqslant m(x_0)$.

b) Soient $m = \max\limits_{x \in P} m(x)$ et $P_0 = \{ x \in P\,;\, \mathrm{rg}\, \mathcal{R}_x = m \}$. P_0 est ouvert d'après a). Si $x_0 \in P_0$ et en supposant U connexe, pour tout $(x_1, \eta_1) \in U \times \mathcal{R}_{x_1}$ il existe $n \in \mathbf{Z}^*$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que

$$n\eta_1 + \sum_{i=1}^{m} n_i \eta^i(x) = 0$$

à cause de la maximalité de m. On peut alors retranscrire la démonstration du théorème II.1 de DAZORD et DELZANT ([4]).

12. CLASSE DE CHERN DE LA SUBMERSION f.

A toute $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})$ on peut associer $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ définie par $\tilde{\alpha}(x) = \widetilde{\alpha(x)}$ ce qui fournit un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$. On a alors une suite exacte de faisceaux de base P :

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}) \to \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R}) \to 0$$

$\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A})$ étant acyclique, on a un isomorphisme δ de $H^k(P, \mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R}))$ sur $H^{k+1}(P,\mathcal{R})$, $k \geqslant 1$.

Lemme. *On peut associer à la submersion* f *une* 1-*classe de cohomologie* $\mu \in H^1(P,\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R}))$.

Preuve. Pour toute section s de f au-dessus d'un ouvert U de P on pose $\psi_s = \hat{F}_s^{-1}$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de tels ouverts recouvrant P et désignons par s_i la section définie sur U_i. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, si $x \in U_i \cap U_j$, soit $\mu_{ij}(x) \in \nu_x^*\mathcal{S}/\mathfrak{R}$ tel que $\mu_{ij}(x)s_i(x) = s_j(x)$. On a alors, pour tout $\alpha \in \nu_x^*\mathcal{S}$,

$$\psi_{s_i}(\psi_{s_j}^{-1}(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha} + \mu_{ij}(x)$$

Si $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ on a la relation $\mu_{ij} + \mu_{jk} - \mu_{ik} = 0$, ce qui prouve que (μ_{ij}) est un cocycle et nous permet de définir la classe $\mu \in H^1(P,\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R}))$.

Définition. La classe $\nu = \delta\mu$ s'appelle la classe de Chern de f.

Désignons par $H^*(P,\mathcal{S})$ la cohomologie relative de $(P,\mathcal{S})$ ([4] , [10]) : c'est la cohomologie associée au faisceau des formes différentielles ω sur P telles que, pour toute feuille S de $\mathcal{S}$, on ait $i_S^*\,\omega = 0$ si i_S est l'injection $S \hookrightarrow P$.

On peut prolonger la 2-forme symplectique σ_S de la feuille S en une 2-forme ω_0 sur P. Alors $d\omega_0$ est telle que $i_S^*\, d\omega_0 = 0$ et la classe $[d\omega_0]$ de $d\omega_0$ dans $H^3(P,\mathcal{S})$ ne dépend pas du prolongement de σ_S ; on la notera $[\mathcal{S}]$.

Les rapports existant entre ν et $[\mathcal{S}]$ sont précisés par le

13. THEOREME. *Si* $\nu \in H^2(P,\mathfrak{R})$ *est la classe de Chern de la submersion* f, *on a* $\tilde{d}\nu = [\mathcal{S}]$ *où* $\tilde{d}$ *est défini par le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
H^2(P,\mathcal{R}) \arrow[rr, "\tilde{d}"] \arrow[d, "\delta^{-1}"', "\simeq"] & & H^3(P,\mathcal{A}) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^1(P,\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})) \arrow[rr, "\hat{d}_*"] & & H^1(P,Z(\nu_2^*\mathcal{A}))
\end{tikzcd}$$

où $\hat{d}_*$ *est l'application en cohomologie correspondant au* $\hat{d}$ *défini en 9 et où l'isomorphisme est celui du lemme suivant* ([4], [10]).

Lemme. *Si* $k \geqslant 1$, $H^{p+k}(P,\mathcal{A})$ *est isomorphe à* $H^k(P,Z(\nu_p^*\mathcal{A}))$.

Preuve du théorème. Avec les notations de 12, si (μ_{ij}) est un cocycle représentant μ dans $H^1(P,\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R}))$, si $x \in U_i \cap U_j$, on a

$$\mu_{ij}(x)s_i(x) = s_j(x).$$

Une formule établie en 8 nous donne alors que

$$s_i^*\,\sigma - s_i^*\,\sigma = -d\mu_{ij}$$

$(s_j^*\,\sigma - s_i^*\,\sigma)$ est un 1-cocycle de $Z(\nu_2^*\mathcal{A})$. Si on le lit dans $\mathcal{C}^\infty(\nu_2^*\mathcal{A})$, c'est un cobord $u_j - u_i$.

Alors $(s_i^*\,\sigma + u_i)$ définit un prolongement de la forme symplectique des feuilles de $\mathcal{A}$, donc $[\mathcal{A}]$ est la classe de $u_j - u_i = \hat{d}\mu_{ij}$.

14. DEFINITION. Soient (P,Λ) une variété de Poisson et $\mathcal{A}$ son feuilletage caractéristique. Nous appellerons réseau de $\nu^*\mathcal{A}$ tout sous-faisceau $\mathcal{R}$ de $Z(\nu^*\mathcal{A})$ tel que :

i) pour tout $x \in P$, $\mathcal{R}_x$ soit un sous-groupe discret de $\nu_x^*\mathcal{A}$;

ii) $\mathcal{R}$, muni de sa topologie de faisceau, soit une sous-variété fermée de $Z(\nu^*\mathcal{A})$.

On a la suite exacte :

$$H^1(P,\mathcal{R}) \xrightarrow{\tilde{d}} H^2(P,\mathcal{A}) \longrightarrow H^1(P,Z(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})) \longrightarrow H^2(P,\mathcal{R}) \xrightarrow{\tilde{d}} H^3(P,\mathcal{A})$$

(l'application $H^1(P,Z(\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R})) \to H^2(P,\mathfrak{R})$ est l'application cobord de la suite exacte $0 \to \mathfrak{R} \to Z(\nu^*\mathcal{S}) \to Z(\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R}) \to 0$).

On est alors en mesure d'énoncer une réciproque du théorème précédent.

Théorème. *Sous ces hypothèses, soit* $\nu \in H^2(P,\mathfrak{R})$ *telle que* $\tilde{d}\nu = [\mathcal{S}]$. *Alors* ν *est la classe de Chern d'une submersion* f *d'une variété symplectique* (M,Σ) *sur* (P,Λ).
De plus, les réalisations ([11]) de (P,Λ) *associées à* $\mathfrak{R}$ *sont classifiées (à difféomorphisme symplectique au-dessus de* P *près) par* $H^2(P,\mathcal{S})/\tilde{d}\, H^1(P,\mathfrak{R})$.

Preuve. Le feuilletage caractéristique $\mathcal{S}$ peut être défini par un recouvrement ouvert distingué (U_i) et le 1-cocycle $\sigma_i - \sigma_j$ où σ_i est un prolongement fermé de la 2-forme symplectique σ_S des feuilles à U_i . On peut représenter ν par un 1-cocycle (μ_{ij}) dans le recouvrement (U_i) et construire avec ce 1-cocycle une variété M et une submersion $f : M \to P$. Les hypothèses faites sur $\mathfrak{R}$ assurent que $\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R}$ est une variété. On a des difféomorphismes $\psi_i : f^{-1}(U_i) \to (\nu^*\mathcal{S}/\mathfrak{R})_{U_i}$ tels que $\tilde{\pi} \circ \psi_i = f$ et
$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(y) = y + \mu_{ij}(x)$, si $y \in \pi^{-1}(x)$.

On peut supposer, par l'arbitraire dans le choix des σ_i, que $d\mu_{ij} = \sigma_i - \sigma_j$.

On définit sur $f^{-1}(U_i)$ une 2-forme Σ_i en posant

$$\Sigma_i = f^*\sigma_i - \psi_i^*\,\beta$$

(où β est la 2-forme définie en 9).

Alors $\Sigma_j - \Sigma_i = f^*(\sigma_j - \sigma_i + d\mu_{ij}) = 0$ et on peut définir une 2-forme fermée Σ sur M par $\Sigma|_{f^{-1}(U_i)} = \Sigma_i$. Son écriture locale montre qu'elle est de rang maximum.

Soient ν et ν' deux éléments de $H^2(P,\mathfrak{R})$ tels que $\tilde{d}\nu = \tilde{d}\nu' = [\mathcal{S}]$ (1). On peut, sans restreindre la généralité, supposer qu'on a réalisé les deux classes en construisant une même variété M et une submersion $f : M \to P$ et que, dans le recouvrement distingué (U_i) de P sur lequel on a fait la construction, ν (resp. ν') est représenté par un cocycle μ_{ij} (resp. μ'_{ij}) . Si ψ_i (resp. ψ'_i) est le difféomorphisme de $f^{-1}(U_i)$ sur $(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i}$ construit comme précédemment à l'aide de ν (resp. ν'), l'application

$$\psi'_i \circ \psi_i^{-1} : (\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i} \to (\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})_{U_i}$$

commute à la projection sur U_i et est donc définie par un élément $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$.

On a $\mu'_{ij} = \alpha_i + \mu_{ij} - \alpha_j$ et (1) montre que

$$\sigma_i - \sigma'_i + \tilde{d}\alpha_i = \sigma_j - \sigma'_j + \tilde{d}\alpha_j \quad \text{sur} \quad U_i \cap U_j .$$

Par conséquent on peut recoller les $\sigma_i - \sigma'_i + \tilde{d}\alpha_i$.

On définit ainsi une 2-forme η , section globale de $Z(\nu_2^* \mathcal{A})$ telle que, si Σ et Σ' sont les formes symplectiques définies sur M à l'aide respectivement des ψ_i et des ψ'_i , on ait $\Sigma - \Sigma' = f^*\eta$.

Si $\eta = \tilde{d}\gamma$ où γ est une section globale de $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$, il résulte de 9, ii) qu'on a un difféomorphisme symplectique de (M,Σ) sur (M,Σ').

Réciproquement, si (M,S) et (M,S') sont symplectiquement difféomorphes au-dessus de P par h, posons $c_i = \psi'_i \circ h \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$.

$\psi'_i \circ h$ et ψ_i sont associés au même cocycle, donc les c_i se recollent en une section globale γ de $\mathcal{C}^\infty(\nu^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ et la relation $S = h^*\Sigma'$ s'écrit

$$h^*\psi_i'^* (-\beta+\tilde{\pi}^*\Sigma'_i) = \psi_i^* (-\beta + \tilde{\pi}^*(\Sigma'_i - \tilde{d}c_i)).$$

Par conséquent $\eta = \tilde{d}\gamma$.

On a donc montré que les réalisations de P associées à $\mathcal{R}$ sont classifiées par $H^2(P,\mathcal{A})/\tilde{d}H^1(P,\mathcal{R})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **P. DAZORD** : *Stabilité et linéarisation des variétés de Poisson,* Travaux en Cours, J.P. Dufour, Hermann, 1985.

[2] **P. DAZORD** : *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens,* Annales Sc. de l'E.N.S., 14, 1981, p. 464-480.

[3] **P. DAZORD et T. DELZANT** : *Classe de Chern de certaines fibrations isotropes,* C.R.A.S., 300, série I, 1985, p. 137-140.

[4] **P. DAZORD et T. DELZANT** : *Le problème général des variables actions-angles* , Journal of Diff. Géom. 26 (1987), 223-251.

[5] **T. DELZANT** : Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Chap. III.

[6] **J.J. DUISTERMAAT** : Comm. Pure Appl. Math., 33, 1980, p. 687-706.

[7] **J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMANN** : Invent. Math., 69, 1982, p. 259-268.

[8] **R. GODEMENT** : *Théorie des faisceaux* , Hermann, 1964.

[9] **A. GROTHENDIECK** : *A general theory of fiber bundles with structure sheaf,* 2ème édition, Univ. of Kansas, 1958.

[10] **I. VAISMAN** : *Cohomology and Differential forms*, Marcel Dekker Inc., 1973.

[11] **A. WEINSTEIN** : *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds* Advances in Math., 6, 1971, p. 329-346.