Publications du Département de mathématiques de Lyon

Anne-Marie Nicolas

Constructions d'anneaux n-acc

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 21-23
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_21_0>

Constructions d'anneaux n-acc.

Anne - Marie NICOLAS
Université de Limoges

Les anneaux n-acc ($n \geq 1$ étant un entier donné) sont les anneaux tels que toute suite croissante d'idéaux engendrés par n générateurs est stationnaire. Les anneaux noetheriens sont n-acc pour tout entier n, mais il existe des anneaux n-acc pour tout n, non noetheriens, par exemple $k [X_1, X_2, ..., X_n, ...]$ où k est un corps (cf. [4]). D'autre part, si $V = K + M$ est un anneau de valuation discrète, et si k est un sous-corps de K tel que $[K : h]$ soit infinie, alors l'anneau $k + M$ est n-acc pour tout n sans être noetherien.

L'étude qui a abouti aux résultats présentés ici, était motivée par les problèmes suivants : les anneaux $k + XK[X]$ (où k est un sous-corps de K), $\mathbb{Z} + 2X \mathbb{Z}[X]$, étaient -ils n-acc pour tout n ? Est-ce que la propriété n-acc de $K[X]$ et de $\mathbb{Z}[X]$ descendait, alors que la propriété noetheriennne ne descendait pas ?

Théorème 1 cf. [1]. Soient A et B deux anneaux unitaires tels que $A \subset B$ et tels que B soit un anneau n-acc. On suppose qu'il existe un idéal bilatère M qui est à la fois un idéal de A et de B et tel que l'anneeau $A_{/M}$ soit parfait à droite. Alors A est un anneau n-acc.

Corollaire 1 Soit $V = L + M$ un anneau commutatif n-acc, où M est un idéal de V et L un sous-anneau de V. Soit k un sous-corps de L. Alors l'anneau $k + M$ est un anneau n-acc.

On en déduit les exemples suivants d'anneaux n-acc pour tout n :

Exemple 1 $k + X K[X]$ où k est un sous-corps de K.

Exemple 2 $k + X K[X, Y]$

Exemple 3 $k + X_i K[X_1,..., X_i, ... X_n, ...]$

Exemple 4 $k + X^r T[X]$ où T est noetherien, k est un sous-corps de T, r est un entier positif.

Corrolaire 2 Soient $R \subset B$ deux anneaux commutatifs et M un idéal de R tel que $R \cap MB$ soit maximal dans R. Si l'anneau B est n-acc , alors l'anneau $A = R + MB$ est n-acc.

Exemple 5 $\mathbb{Z} + p X \mathbb{Z}[X]$ où p est premier.

$(R = \mathbb{Z}, M = p \mathbb{Z} , B = \mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z} + (p \mathbb{Z}) \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z} + p X \mathbb{Z}[X].$).

Exemple 6 Si R est noetherien commutatif unitaire intègre et si M est un idéal maximal de R, les anneaux $R + M R [X_1, X_2, \dots X_s]$ et $R + M R [X_1, \dots X_s, \dots]$ sont n-acc pour tout n.

Théorème 2 cf.[7]. Soient $A = D + M$ et $B = L + M$ deux anneaux commutatifs unitaires intègres tels que D et L sont des anneaux vérifiant $D \subset L$ et tels que M est un idéal de A et de B (non nécessairement maximal).

On suppose que L est de type fini sur D et que l'anneau D est tel que tout D-module de type fini est ℓ -acc pour tout entier $\ell > 0$.

Alors si l'anneau B est n-acc , l'anneau A est n-acc.

Exemple 7 $A = K[X^2_2, X_3, \dots X_n, \dots] + X_1 K[X_1, X_2, \dots X_n, \dots]$ est n-acc pour tout n.

Il suffit de prendre $L = K[X_2, X_3, \dots X_n, \dots]$, $B = K[X_1, X_2, \dots, X_n \dots] = L + X_1 L[X_1]$.

$D = K[X^2_2, X_3, \dots X_n \dots]$. L'anneau D est cohérent et ℓ -acc pour tout ℓ et par conséquent tout D-module de type fini est ℓ -acc pour tout ℓ (cf. [5]).

Problème de la descente n-acc.

P.M. EAKIN a montré que si $A \subset B$, où B est un anneau noetherien et un A-module de type fini, alors l'anneau A est noetherien.

Le problème est le suivant : si $A \subset B$, où B est n-acc et de type fini sur A, est-ce que l'anneau A est n-acc ?

Terminons en remarquant que le théorème 1 peut s'appliquer à un anneau étudié dans [2] par V. BARUCCI, D.E. DOBBS et M. FONTANA qui montrent que cet anneau est un anneau de Mori, donc 1-acc, "conducive". Cet anneau est en effet n-acc pour tout n :

Exemple 8 Soit $V = K[[X]]$, où K est un corps, L_o un sous-corps de K, et pour $j = 1, \dots k$, L_j un sous L_o-espace vectoriel de K, vérifiant $L_i L_j \subset L_{i+j}$. (avec $L_{i+j} = K$ si $i+j > k-1$).

On suppose que K est de dimension infinie sur L_o et que L_j est de dimension finie sur L_o $(0 \leq j \leq k-1)$.

Alors l'anneau $A = L_o + X L_1 + X^2 L_2 + \dots + X^{k-1} L_{k-1} + X^k V$ est un anneau de Mori, conducive, non noetherien, qui est n-acc pour tout entier n.

Bibliographie

[1] **M.E. ANTUNES SIMOES et A.M. NICOLAS**
Exemples d'anneaux n-acc.
Communications in Algebra 12 (13), 1653-1665, (1984).

[2] **V. BARUCCI, D.E. DOBBS et M. FONTANA.**
Conductive integral domains as pullbacks.
Manuscripta Mathematica, 54, 261-277, (1986).

[3] **D.E. DOBBS et R. FEDDER.**
Conducive integral domains.
Journal of Algebra, 86, 494-510, (1984).

[4] **W. HEINZER et D. LANTZ.**
Commutative rings with a.c.c. on n-generated ideals.
Journal of Algebra, 80, 261-278, (1983).

[5] **A.M. NICOLAS.**
Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire.
Journal of Algebra, 60, 249-259, (1979).

[6] **A.M. NICOLAS**
Thèse : Modules factorables, modules n-acc.
Université de Limoges 1981.

[7] **A.M. NICOLAS.**
Constructions d'anneaux n-acc.
Publications du département de Mathématiques de Limoges.
Fascicule n° 9, 1987.