

AHMAD EL KHATIB

**Sur la V-dimension des anneaux noethériens**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 3B  
, p. 39-44

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1988\\_\\_3B\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_39_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LA V-DIMENSION DES ANNEAUX NOETHERIENS

EL KHATIB Ahmad

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.  
Université Claude Bernard - LYON 1  
43, boulevard du Onze Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX - France

Tous les anneaux considérés sont commutatifs noethériens et unitaires. On désigne par  $A[X_1, \dots, X_n]$  (resp.  $A[[X_1, \dots, X_n]]$ ) l'anneau des polynômes (resp.. séries formelles) à  $n$  indéterminées et à coefficients dans  $A$ .

## 1 - V-dimension des anneaux locaux noethériens - Anneaux réguliers.

Soit  $A$  un anneau local noethérien d'idéal maximal  $m$ , soit  $I$  un idéal de  $A$ , on désigne par  $\nu(I)$  le cardinal d'un système de générateur minimal de  $I$  considéré comme  $A$ -module de type fini. On sait [7, (1-2) Chap. 1], [4, Th. 158] que  $\nu(I) = \dim_{A/m} I/mI$  où  $I/mI$  est considéré comme  $A/m$ -espace vectoriel. Si  $I = m$ ,  $\nu(m)$  est appelé loi V-dimension de  $A$ , notée  $V\text{-dim}(A)$ , [4, 3-3], [3, § 13]. On a toujours  $\dim A \leq V\text{-dim}(A)$ , [4, Th. 152], où  $\dim A$  désigne la dimension de Krull de  $A$ , en cas d'égalité,  $A$  est dit régulier.

**1.1. Proposition** - Soit  $\varphi : A \longrightarrow B$  un homomorphisme <sup>local</sup> plat d'anneaux locaux noethériens, d'idéaux maximaux  $m$  et  $M$  respectivement. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $V\text{-dim } B = V\text{-dim } A + V\text{-dim } B/mB$ .
- ii)  $M^2 \cap mB = M \cdot mB$ .

Pour la démonstration de cette proposition on utilisera le lemme suivant.

**1.2. Lemme** - Dans les mêmes hypothèses de la proposition 1.1, on a :

$$\nu(mB) = V\text{-dim}(A).$$

**Démonstration.**

$$V\text{-dim}(A) = \dim_{A/m} m \otimes_A A/m = \dim_{B/M} (m \otimes_A A/m) \otimes_{A/m} B/M.$$

Or  $(m \otimes_A A/m) \otimes_{A/m} B/M = m \otimes_A B/M = (m \otimes_A B) \otimes_B B/M$ , et puisque  $\varnothing$  est plat, alors  $m \otimes_A B = mB$  et  $V\text{-dim}(A) = \dim_{B/M} mB \otimes_B B/M = v(mB)$ .

**Démonstration de la proposition** - La condition  $M^2 \cap mB = M \cdot mB$  est équivalente à  $v(M) = v(mB) + v(M/mB)$  [6, (1-1), Chap. 2]. D'où la proposition en remplaçant  $v(mB)$  par  $V\text{-dim}(A)$ . ■

D'après SALLY [6, (1-2), Chap. 2], [2, Th. 1], ces deux conditions sont vérifiées dans le cas où  $B/mB$  est régulier. C'est le cas par exemple des anneaux de polynômes (resp. séries formelles) localisés par rapport à des idéaux premiers (resp. maximaux) comme le montrent les propositions suivantes.

**1.3. Proposition** - Soit  $A$  un anneau noethérien. Pour tout idéal premier  $P$  de  $A[X_1, \dots, X_n]$  avec  $P \cap A = p$ , on a :

$$V\text{-dim } A[X_1, \dots, X_n]_P = V\text{-dim } A_p + \dim A[X_1, \dots, X_n]_{P/pA[X_1, \dots, X_n]_P}.$$

**Démonstration** - L'homomorphisme local  $A_p \longrightarrow A[X_1, \dots, X_n]_P$  est plat [5,3.J] et  $A[X_1, \dots, X_n]_{P/pA[X_1, \dots, X_n]_P}$  est isomorphe à une localisation de  $\chi(P)[X_1, \dots, X_n]$  où  $\chi(P) = \text{Frac}(A/p)$ . [5-13.A], donc  $A[X_1, \dots, X_n]_{P/pA[X_1, \dots, X_n]_P}$  est régulier et par suite l'égalité de la proposition est vérifiée (Prop. (1.1)).

**1.4. Corollaire** - Soit  $A$  un anneau noethérien et soit  $P$  un idéal premier de  $A[X]$  au-dessus de l'idéal premier  $p$  de  $A$ , alors :

- a)  $V\text{-dim } A[X]_P = V\text{-dim } A_p$  si  $P = p[X]$ .
- b)  $V\text{-dim } A[X]_P = V\text{-dim } A_p + 1$  si  $p[X] \subsetneq P$ .

**1.5. Corollaire** - Soit  $A$  un anneau noethérien. Alors  $A$  est régulier si et seulement si  $A[X_1, \dots, X_n]$  est régulier.

**Démonstration** - Il suffit de faire la démonstration avec une seule indéterminée. Soit  $P$  un idéal premier de  $A[X]$  avec  $P \cap A = p$ . Puisque  $A[X]_P = \dim A_p$  si  $P = p[X]$  et  $\dim A[X]_P = \dim A_p + 1$  si  $P$  contient strictement  $p[X]$  alors  $A_p$  est régulier si et seulement si  $A[X]_P$  est régulier (Corol. 1.4), et d'après la surjection canonique  $\text{Spec}(A[X]) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ , [5, Th. 13], le corollaire en découle.

**1.6. Proposition.** - *Soit  $A$  un anneau noethérien. Alors pour tout idéal maximal  $M = (m, X_1, \dots, X_n)$  de  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  où  $m$  est un idéal maximal de  $A$ , on a :*

$$V\text{-dim}(A[[X_1, \dots, X_n]]_M) = V\text{-dim } A_m + n .$$

**Démonstration** - L'homomorphisme local  $A_m \longrightarrow A[[X_1, \dots, X_n]]_M$  est plat [5, 3-J], et comme  $A[[X_1, \dots, X_n]]_M / m A[[X_1, \dots, X_n]] \simeq A/m[[X_1, \dots, X_n]]_{(X_1, \dots, X_n)}$  est régulier de dimension  $n$  alors l'égalité ci-dessus est bien réalisée (Prop. 1.1).

**1.7. Corollaire** - *Soit  $A$  un anneau noethérien, alors,  $A$  est régulier si et seulement si  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  est régulier.*

Il est clair maintenant que la régularité des anneaux de polynômes ainsi que des anneaux de séries formelles peut être une conséquence de la platitude.

## 2 - Généralisation : Anneaux quasi-réguliers.

**2.1. Définition** - *Soit  $A$  un anneau noethérien non nécessairement local. On appelle  $V$ -dimension de  $A$ , notée  $V\text{-dim}(A)$  la borne supérieure de toutes les  $V$ -dimensions des localisations de  $A$  par rapport à des idéaux premiers. En d'autre terme :*

$$V\text{-dim } A = \text{Sup } V\text{-dim } A_p . \\ (p \in \text{Spec}(A))$$

En fait d'après [7, Th. 22], on peut remplacer dans cette définition le  $\text{Spec}(A)$  par l'ensemble des idéaux maximaux. Ainsi :

$$V\text{-dim } A = \text{Sup } V\text{-dim } A_m . \\ (m \in \text{Max}(A))$$

Pour tout idéal maximal  $m$  de  $A$  on a :

$$[1] \quad \dim A_m \leq V\text{-dim } A_m \leq g^{\ell} \dim A_m$$

d'où la proposition suivante.

**2.2. Proposition** - *Pour tout anneau noethérien A, on a :*

$$\dim A \leq \text{V-dim } A \leq \text{gl dim } A .$$

On introduit alors la définition suivante.

**2.3. Définition** - *Un anneau noethérien A est dit quasi-régulier si  $\dim A = \text{V-dim } A$ .*

Il est facile de voir que tout anneau régulier est quasi-régulier et que la réciproque est vraie dans le cas où l'anneau est coéquidimensionnel (c'est-à-dire, l'anneau dont tous les maximaux ont la même hauteur).

Il résulte aussi de la proposition précédente que tout anneau noethérien de dimension infinie est quasi-régulier. Un tel anneau n'est pas toujours régulier.

**2.4. Proposition** *Soit A un anneau noethérien de V-dimension finie. Alors :*

a)  $\text{V-dim } A[X_1, \dots, X_n] = \text{V-dim } A + n.$

b)  $\text{V-dim } A[[X_1, \dots, X_n]] = \text{V-dim } A + n.$

**Démonstrations.**

a) Pour montrer cette assertion, il suffit de se limiter à  $n = 1$ . Soit P un idéal premier de  $A[X]$  tel que  $p = P \cap A$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{V-dim } A[X]_P &\leq \text{V-dim } A_p + 1 && (1.4) \\ &\leq \text{V-dim } A + 1 \end{aligned}$$

donc  $\text{V-dim } A[X] \leq \text{V-dim } A + 1$

Inversement soit p un idéal premier de A et soit m un idéal maximal de A qui contient p, alors :

$$\begin{aligned} \text{V-dim } A_p + 1 &\leq \text{V-dim } A[X]_{(m,X)} && (1.4) \text{ et } [7, \text{Th. 2.2}] \\ &\leq \text{V-dim } A[X] \end{aligned}$$

donc  $\text{V-dim } A + 1 \leq \text{V-dim } A[X] .$

D'où l'égalité.

b) Soit  $M$  un idéal maximal de  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  avec  $m = M \cap A$ , alors

$$V\text{-dim } A[[X_1, \dots, X_n]]_M = V\text{-dim } A_m + n \quad (1.6)$$

Donc  $V\text{-dim } A[[X_1, \dots, X_n]] = V\text{-dim } A + n$ .

■

**2.5. Proposition** - Dans les hypothèses de la proposition (2.4), les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $A$  est quasi-régulier ;
- ii)  $A[X_1, \dots, X_n]$  est quasi-régulier ;
- iii)  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  est quasi-régulier.

**Démonstration** - Ceci découle de la proposition précédente et du fait que :

$$\dim A[[X_1, \dots, X_n]] = \dim A[X_1, \dots, X_n] = \dim A + n.$$

**Exemples.**

1 - Tout anneau noethérien de dimension infinie est quasi-régulier (2.2).

2 - Soient  $B$  un anneau régulier,  $A$  un anneau noethérien non régulier avec

$$V\text{-dim } (A) \leq V\text{-dim } (B)$$

alors,  $A \oplus B$  est quasi-régulier qui n'est pas régulier.

3 - Soit  $A = k[X, Y, Z]/(XY) = k[x, y, z]$  où  $k$  est un corps,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les images canoniques de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  dans  $A$ . Considérons les deux idéaux premiers de  $A$  :

$$P = (x, y) \text{ et } Q = (x - 1, y, z).$$

Alors :

$$S^{-1}A \quad \text{où } S = A \setminus (P \cup Q)$$

est quasi-régulier de dimension 2. En effet :  $S^{-1}A$  est semi-local noethérien d'idéaux maximaux  $S^{-1}P$  et  $S^{-1}Q$ .

$$S^{-1}A_{S^{-1}Q} = A_Q = k[X, Y, Z]/(X - 1, Y, Z)_{(XY)}$$

il est donc régulier de dimension 2. [4, Th. 161],

$$S^{-1}A_{S^{-1}P} = A_P = k[X, Y, Z]_{(X, Y)} / (XY),$$

alors,

$$\dim S^{-1}A_{S^{-1}P} = 1 < \text{V-dim}(S^{-1}A_{S^{-1}P}) = 2 \quad [4, \text{Exercice 2, } \S 3]$$

donc  $S^{-1}A_{S^{-1}P}$  n'est pas régulier.

Il en résulte que  $\dim S^{-1}A = \text{V-dim}(S^{-1}A) = 2$ .

- 4 - Tout anneau de polynômes (resp. séries formelles) à coefficient dans un anneau quasi-régulier est quasi-régulier.

### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] **M. AUSLANDER - D.A. BUCHSBAUM**, Homological Dimension in local rings. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 390-405.
- [2] **E.O. DAVIS**, Regular Sequences and minimal Bases. Pac. J. Of Math. Vol. 36, n° 2, (1971).
- [3] **A.V. GERAMITA and C. SMALL**, Introduction to homological methods in commutative rings, Queen's University, Kingston, Ontario, (1976).
- [4] **I. KAPLANSKY**, Commutative rings, The university of Chicago Press, (1974).
- [5] **M. MATSUMURA**, Commutative algebra, Second edition (1980).
- [6] **J. SALLY**, Numbers of generators of ideals in local rings, Copyright (1978) by M. Dekker.
- [7] **W.V. VASCONCELOS**, Ideals generated by R-sequences, J. of Algebra 6, 309-316, (1967).