PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

AHMAD EL KHATIB

Sur la V-dimension des anneaux noethériens

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 39-44
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_39_0>

SUR LA V-DIMENSION DES ANNEAUX NOETHERIENS

EL KHATIB Ahmad

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.
Université Claude Bernard - LYON 1
43, boulevard du Onze Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX - France

Tous les anneaux considérés sont commutatifs noethériens et unitaires. On désigne par $A[X_1,\ldots,X_n]$ (resp. $A[[X_1,\ldots,X_n]]$) l'anneau des polynômes (resp.. séries formelles) à n indéterminées et à coefficients dans A.

1 - V-dimension des anneaux locaux noethériens - Anneaux réguliers.

Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal m, soit I un idéal de A, on désigne par $\nu(I)$ le cardinal d'un système de générateur minimal de I considéré comme A-module de type fini. On sait [7, (1-2) Chap. 1], [4, Th. 158] que $\nu(I) = \dim_{A/m} I/mI$ où I/mI est considéré comme A/m-espace vectoriel. Si $I = m$, $\nu(m)$ est appelé loi V-dimension de A, notée V-dim(A), [4, 3-3], [3, § 13]. On a toujours $\dim A \leq$ V-dim(A), [4, Th. 152], où dim A désigne la dimension de Krull de A, en cas d'égalité, A est dit régulier.

1.1. Proposition - *Soit* $\varnothing : A \longrightarrow B$ *un homomorphisme* local *plat d'anneaux locaux noethériens, d'idéaux maximaux* m *et* M *respectivement. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) V-dim B = V-dim A + V-dim B/mB .

ii) $M^2 \cap mB = M.mB$.

Pour la démonstration de cette proposition on utilisera le lemme suivant.

1.2. Lemme - *Dans les mêmes hypothèses de la proposition* 1.1, *on a :*

$$\nu(mB) = \text{V-dim}(A).$$

Démonstration.

$$\text{V-dim}(A) = \dim_{A_{/m}} m \otimes_A A_{/m} = \dim_{B_{/M}}(m \otimes_A A_{/m}) \otimes_{A_{/m}} B_{/M} .$$

Or $(m \otimes_A A_{/m}) \otimes_{A_{/m}} B_{/M} = m \otimes_A B_{/M} = (m \otimes_A B) \otimes_B B_{/M}$, et puisque $\varnothing$ est plat, alors $m \otimes_A B = mB$ et V - $\dim(A) = \dim_{B_{/M}} mB \otimes_B B_{/M} = \nu(mB)$.

Démonstration de la proposition - La condition $M^2 \cap mB = M.mB$ est équivalente à $\nu(M) = \nu(mB) + \nu(M_{/mB})$ [6, (1-1), Chap. 2]. D'où la proposition en remplaçant $\nu(mB)$ par V - dim(A).

■

D'après SALLY [6, (1-2), Chap. 2], [2, Th. 1], ces deux conditions sont vérifiées dans le cas où $B_{/mB}$ est régulier. C'est le cas par exemple des anneaux de polynômes (resp. séries formelles) localisés par rapport à des idéaux premiers (resp. maximaux) comme le montrent les propositions suivantes.

1.3. Proposition - *Soit* A *un anneau noethérien. Pour tout idéal premier* P *de* $A[X_1,\ldots,X_n]$ *avec* $P \cap A = p$, *on a :*

$$V\text{ - dim } A[X_1,\ldots,X_n]_P = V\text{ - dim } A_p + \dim \ A[X_1,\ldots,X_n]_{P_{/pA[X_1,\ldots,X_n]_P}} .$$

Démonstration - L'homomorphisme local $A_p \longrightarrow A[X_1,\ldots,X_n]_P$ est plat [5,3.J] et $A[X_1,\ldots,X_n]_{P_{/pA[X_1,\ldots,X_n]_P}}$ est isomorphe à une localisation de $\chi(P)[X_1,\ldots,X_n]$ où $\chi(P) = \text{Frac}(A_{/p})$. [5-13.A], donc $A[X_1,\ldots,X_n]_{P_{/pA[X_1,\ldots,X_n]_P}}$ est régulier et par suite l'égalité de la proposition est vérifiée (Prop. (1.1)).

1.4. Corollaire - *Soit* A *un anneau noethérien et soit* P *un idéal premier de* A[X] *au-dessus de l'idéal premier* p *de* A, *alors :*

a) V - $\dim A[X]_P = V$ - $\dim A_p$ si $P = p[X]$.

b) V - $\dim A[X]_P = V$ - $\dim A_p + 1$ si $p[X] \subsetneqq P$.

1.5. Corollaire - *Soit* A *un anneau noethérien. Alors* A *est régulier si et seulement si* $A[X_1,\ldots,X_n]$ *est régulier.*

Démonstration - Il suffit de faire la démonstration avec une seule indéterminée. Soit P un idéal premier de A[X] avec $P \cap A = p$. Puisque $A[X]_P = \dim A_p$ si $P = p[X]$ et $\dim A[X]_P = \dim A_p + 1$ si P contient strictement P[X] alors A_p est régulier si et seulement si $A[X]_P$ est régulier (Corol. 1.4), et d'après la surjection canonique $\mathrm{Spec}(A[X]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, [5, Th. 13], le corollaire en découle.

1.6. Proposition. - *Soit* A *un anneau noethérien. Alors pour tout idéal maximal* $M = (m, X_1, \ldots, X_n)$ de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ *où* m *est un idéal maximal de* A, *on a :*

$$\text{V-dim}(A[[X_1, \ldots, X_n]]_M) = \text{V-dim}\, A_m + n\,.$$

Démonstration - L'homomorphisme local $A_m \longrightarrow A[[X_1, \ldots, X_n]]_M$ est plat [5, 3-J], et comme $A[[X_1, \ldots, X_n]]_M/m\, A[[X_1, \ldots, X_n]] \simeq A/m[[X_1, \ldots, X_n]]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ est régulier de dimension n alors l'égalité ci-dessus est bien réalisée (Prop. 1.1).

1.7. Corollaire - *Soit* A *un anneau noethérien, alors,* A *est régulier si et seulement si* $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ *est régulier.*

Il est clair maintenant que la régularité des anneaux de polynômes ainsi que des anneaux de séries formelles peut être une conséquence de la platitude.

2 - Généralisation : Anneaux quasi-réguliers.

2.1. Définition - *Soit* A *un anneau noethérien non nécessairement local. On appelle* V-*dimension de* A, *notée* V-dim(A) *la borne supérieure de toutes les* V-*dimensions des localisations de* A *par rapport à des idéaux premiers. En d'autre terme :*

$$\text{V-dim}\, A = \underset{(p \in \mathrm{Spec}(A))}{\mathrm{Sup}}\, \text{V-dim}\, A_p\,.$$

En fait d'après [7, Th. 22], on peut remplacer dans cette définition le Spec(A) par l'ensemble des idéaux maximaux. Ainsi :

$$\text{V-dim}\, A = \underset{(m \in \mathrm{Max}(A))}{\mathrm{Sup}}\, \text{V-dim}\, A_m\,.$$

Pour tout idéal maximal m de A on a :

[1] $\qquad \dim A_m \leq \text{V-dim}\, A_m \leq \mathrm{g}\ell\, \dim A_m$

d'où la proposition suivante.

2.2. Proposition - *Pour tout anneau noethérien* A, *on a :*

$$\dim A \leq \text{V-dim } A \leq g\ell \dim A .$$

On introduit alors la définition suivante.

2.3. Définition - *Un anneau noethérien* A *est dit quasi-régulier si* dim A = V-dim A.

Il est facile de voir que tout anneau régulier est quasi-régulier et que la réciproque est vraie dans le cas où l'anneau est coéquidimentionnel (c'est-à-dire, l'anneau dont tous les maximaux ont la même hauteur).

Il résulte aussi de la proposition précédente que tout anneau noethérien de dimension infinie est quasi-régulier. Un tel anneau n'est pas toujours régulier.

2.4. Proposition *Soit* A *un anneau noethérien de* V*-dimension finie. Alors :*

a) $\text{V-dim } A[X_1,\ldots,X_n] = \text{V-dim } A + n$.

b) $\text{V-dim } A[[X_1,\ldots,X_n]] = \text{V-dim } A + n$.

Démonstrations.

a) Pour montrer cette assertion, il suffit de se limiter à n = 1. Soit P un idéal premier de A[X] tel que $p = P \cap A$, alors :

$$\begin{aligned} \text{V-dim } A[X]_P &\leq \text{V-dim } A_p + 1 && (1.4) \\ &\leq \text{V-dim } A + 1 \end{aligned}$$

donc $\quad \text{V-dim } A[X] \leq \text{V-dim } A + 1$

Inversement soit p un idéal premier de A et soit m un idéal maximal de A qui contient p, alors :

$$\begin{aligned} \text{V-dim } A_p + 1 &\leq \text{V-dim } A[X]_{(m,X)} && (1.4) \text{ et } [7, \text{Th. } 2.2] \\ &\leq \text{V-dim } A[X] \end{aligned}$$

donc $\quad \text{V-dim } A + 1 \leq \text{V-dim } A[X]$.

D'où l'égalité.

b) Soit M un idéal maximal de $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ avec $m = M \cap A$, alors

$$\text{V-dim } A[[X_1,\ldots,X_n]]_M = \text{V-dim } A_m + n \qquad (1.6)$$

Donc $\quad \text{V-dim } A[[X_1,\ldots,X_n]] = \text{V-dim } A + n.$

■

2.5. Proposition - *Dans les hypothèses de la proposition* (2.4), *les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est quasi-régulier ;*

ii) $A[X_1,\ldots,X_n]$ *est quasi-régulier ;*

iii) $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ *est quasi-régulier.*

Démonstration - Ceci découle de la proposition précédente et du fait que :

$$\dim A[[X_1,\ldots,X_n]] = \dim A[X_1,\ldots,X_n] = \dim A + n.$$

Exemples.

1 - Tout anneau noethérien de dimension infinie est quasi-régulier (2.2).

2 - Soient B un anneau régulier, A un anneau noethérien non régulier avec

$$\text{V-dim }(A) \leq \text{V-dim }(B)$$

alors, $A \oplus B$ est quasi-régulier qui n'est pas régulier.

3 - Soit $A = k[X,Y,Z]_{/(XY)} = k[x,y,z]$ où k est un corps, x, y et z sont les images canoniques de X, Y et Z dans A. Considérons les deux idéaux premiers de A :

$$P = (x,y) \text{ et } Q = (x-1,y,z).$$

Alors :

$$S^{-1}A \quad \text{où } S = A \setminus (P \cup Q)$$

est quasi-régulier de dimension 2. En effet : $S^{-1}A$ est semi-local noethérien d'idéaux maximaux $S^{-1}P$ et $S^{-1}Q$.

$$S^{-1}A_{S^{-1}Q} = A_Q = k[X,Y,Z]_{(X-1,Y,Z)/(XY)}$$

il est donc régulier de dimension 2. [4, Th. 161],

$$S^{-1}A_{S^{-1}P} = A_P = k[X,Y,Z]_{(X,Y)/(XY)} ,$$

alors,

$$\dim S^{-1}A_{S^{-1}P} = 1 < \text{V-dim}(S^{-1}A_{S^{-1}P}) = 2 \qquad [4, \text{Exercice } 2, \S\ 3]$$

donc $S^{-1}A_{S^{-1}P}$ n'est pas régulier.

Il en résulte que $\dim S^{-1}A = \text{V-dim}\,(S^{-1}A) = 2$.

4 - Tout anneau de polynômes (resp. séries formelles) à coefficient dans un anneau quasi-régulier est quasi-régulier.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] **M. AUSLANDER - D.A. BUCHSBAUM**, Homological Dimension in local rings. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 390-405.

[2] **E.O. DAVIS**, Regular Sequences and minimal Bases. Pac. J. Of Math. Vol. 36, n° 2, (1971).

[3] **A.V. GERAMITA and C. SMALL**, Introduction to homological methods in commutative rings, Queen's University, Kingston, Ontario, (1976).

[4] **I. KAPLANSKY**, Commutative rings, The university of Chicago Press, (1974).

[5] **M. MATSUMURA**, Commutative algebra, Second edition (1980).

[6] **J. SALLY**, Numbers of generators of ideals in local rings, Copyright (1978) by M. Dekker.

[7] **W.V. VASCONCELOS**, Ideals generated by R-sequences, J. of Algebra 6, 309-316, (1967).