

D. NOUR-EL-ABIDINE

**Les idéaux transformés et l'anneau  $R^\#$**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 3B  
, p. 51-57

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1988\\_\\_3B\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_51_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## LES IDEAUX TRANSFORMES ET L'ANNEAU $R^\#$

D. NOUR-EL-ABIDINE

### INTRODUCTION.

Ce travail s'inspire d'un article intitulé : « Ideals transforms and overring of a quasilocal integral domain » de David F. ANDERSON et Alain BOUVIER.

Soit  $R$  un anneau intègre commutatif et unitaire. Désignons par  $K = \text{Frac}(R)$  le corps des fractions de  $R$ . On pose :  $R^\# = \bigcap_{x \in R^* - U(R)} R_x$ , avec  $R_x = R[\frac{1}{x}]$ , et  $U(R)$  l'ensemble

des éléments inversibles dans  $R$ . On rappelle que, si  $R$  est non local  $R^\# = R$ . De ce fait, on restreint notre travail aux anneaux locaux.

1). Soient  $T$  un anneau et  $M$  un idéal maximal de  $T$ . Soit  $D$  un sous-anneau de  $K$ , où  $K = T/M$ . Posons  $R = \varphi^{-1}(D)$  où  $\varphi$  est la surjection canonique de  $T$  dans  $K$ . L'anneau  $R$  est appelé un produit fibré. Notre but, dans ce paragraphe est de déterminer l'anneau  $R^\#$ , lorsque  $R$  est un produit fibré. Le résultat du [ [1] Th. 16] sera un cas particulier (voir Th. 11).

2). Dans ce paragraphe, on détermine une application naturelle qui relie

$$\text{Spec}(R^\#[X_1, \dots, X_n]) \text{ et } \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n])$$

pour  $n$  donné quelconque, généralisant ainsi [ [1], Th. 37], qui induit une bijection entre

$$X_{R^\#}^{(n)} = \{Q^\#, Q^\# \in \text{Spec}(R^\#[X_1, \dots, X_n]) / Q^\# \cap R \neq M\}$$

et

$$Y^{(n)} = \{Q \in \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n]) / Q \cap R \neq M\}.$$

On remarque que le comportement des éléments de  $\text{Spec}(R^\#[X_1, \dots, X_n])$  pour  $n$  donné, vis à vis de ceux de  $\text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n])$  est le même que, si on prend un suranneau  $A$  de  $R$  tel que,

$R \subset A \subset R^\#$ . On établit d'une manière analogue une relation entre  $\text{Spec}(A[X_1, \dots, X_n])$  et  $\text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n])$ .

3). Dans [4], il est établi que si  $R$  est noethérien avec  $R$  local et  $A$  un suranneau de  $R$  tel que  $R \subseteq A \subseteq R^\#$ , alors  $A$  est noethérien. Sachant qu'un anneau noethérien est un anneau de Jaffard. On peut poser la question suivante : si  $(R, M)$  est de Jaffard et si  $A$  est un suranneau de  $R$  tel que,  $R \subseteq A \subseteq R^\#$ , est-ce que  $A$  est de Jaffard ? Le problème est toujours ouvert, cependant on va énoncer une proposition (prop. 3.1) qui nous donne des renseignements sur  $A[X_1, \dots, X_i]$  pour un certain  $i \in \mathbb{N}$ .

4). Dans ce paragraphe, on va donner une grande classe d'anneaux  $R$  qui vérifie  $R^\# \neq R_S$ , pour toute partie multiplicative  $S$  de  $R$ . Parmi ces anneaux, il y a les anneaux noethériens locaux dont l'idéal maximal est de grade 1, ensuite à l'aide des "D + M" on va construire d'autres exemples non triviaux.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs, intégrés et unitaires. Les nombres entre [ ] font référence à la bibliographie placé à la fin de ce document, ceux entre parenthèses ( ) renvoient aux résultats de ce travail. Les notations et les résultats préliminaires sont ceux de [1].

### 1 - Calcul de $R^\#$ lorsque $R$ est un produit fibré.

Soient  $T$  un anneau,  $M$  un idéal maximal de  $T$ , et  $K = T/M$ . Soit  $\varphi : T \longrightarrow T/M = K$  la surjection canonique et soit  $D$  un sous-anneau du corps  $K$ . Posons  $R = \varphi^{-1}(D)$ . On aura le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\varphi} & K \end{array}$$

Notation :  $R = T \times_K D$  voir [3].  $R$  est appelé produit fibré de  $T$  et  $D$  au-dessus de  $K$ . On va déterminer  $R^\#$ , lorsque  $R$  est un produit fibré.

**THEOREME 1.1** - *Supposons qu'on est dans les mêmes conditions précédentes, c'est-à-dire*

$R = T \times_K D$ , alors :

- (a). Si  $T$  est non local alors  $R$  est non local par suite  $R^\# = R$ .
- (b). Si  $(T, M)$  est local d'idéal maximal  $M$ , alors :

( $\alpha$ ). Si  $D$  est un corps,  $R^\# = T^\#$ .

( $\beta$ ). Si  $D$  n'est pas un corps,  $R^\# = T \times_{K} D^\#$ .

**REMARQUE 1.1** - Si  $T$  est non local et  $D$  n'est pas un corps en général :  $R^\# \neq T \times_{K} D^\#$ .

**CONTRE-EXEMPLE 1.1** - Prenons :

$$\begin{cases} T = K(X) + YK(X)[Y] = K(X)[Y] \\ D = K[X](X) \end{cases}$$

Prenons comme idéal maximal de  $T$ ,  $M = YT$ . On a :  $D^\# = K(X)$  [ [1], Th. 1.2]. Soit :

$$\varphi : T \longrightarrow T/M = K(X).$$

On aura :

$$\varphi^{-1}(K(x)) = T = \varphi^{-1}(D^\#).$$

$R$  est non local, donc  $R^\# = R$ , d'où :  $R^\# \neq T \times_{K(X)} D^\#$ .

**REMARQUE 1.2** - Le résultat de [ [1], Th. 1.6] sera un cas particulier du Th. 1.1. En effet : si  $T = L + M$  où  $M$  est l'idéal maximal de  $T$  et  $L$  est un corps, et si  $R = D + M$  avec  $D \subseteq L$ , alors :

- 1). Si  $D$  est un corps  $R^\# = T^\#$ .
- 2). Si  $D$  n'est pas un corps  $R^\# = D^\# + M$ .

## 2 - Etude du spectre de $R^\#[X_1, \dots, X_n]$ pour $n \in \mathbf{N}$ .

On va donner un théorème plus général qui sera une généralisation du [ [1], Th. 37] reliant le spectre de  $R^\#[X_1, \dots, X_n]$  et le spectre de  $R[X_1, \dots, X_n]$ .

**THEOREME 2.2** - Soit  $R$  un anneau local d'idéal maximal  $M$  ( $\dim R \geq 2$ ). Alors l'application définie :

$$\begin{aligned} \varphi_{R^\#}^{(n)} : \text{Spec}(R^\#[X_1, \dots, X_n]) &\longrightarrow \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n]) \\ Q^\# &\longrightarrow Q^\# \cap R[X_1, \dots, X_n] \end{aligned}$$

induit une bijection entre :

$$X_{R^\#}^{(n)} = \{Q^\# \in \text{Spec}(R^\#[X_1, \dots, X_n]) / Q^\# \cap R \neq M\}$$

et

$$Y^{(n)} = \{Q \in \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n]) / Q \cap R \neq M\}.$$

De plus si :

$$Q^\# \in X_{R^\#}^{(n)}, \text{ on a : } (R^\#[X_1, \dots, X_n])_{Q^\#} \simeq (R[X_1, \dots, X_n])_{Q^\# \cap R[X_1, \dots, X_n]}$$

**COROLLAIRE 2.1** - Soit  $R$  un anneau, alors :

$$\dim R^\#[X_1, \dots, X_n] \geq \dim R[X_1, \dots, X_n] - (n + 1).$$

**REMARQUE 2.3** - Pour  $n = 0$ , on retrouve le résultat du [ [1], Th. 3.7] et du [Corollaire 3.8 [1]].

**COROLLAIRE 2.2** - Soit  $(R, M)$  un anneau local ( $\dim R \geq 2$ ) d'idéal maximal  $M$ , soit  $A$  un suranneau de  $R$  tel que :  $R \subseteq A \subseteq R^\#$ . On pose :

$$X_A^{(n)} = \{Q \in \text{Spec}(A[X_1, \dots, X_n]) / Q \cap R \neq M\}.$$

Alors l'application  $\varphi_A^{(n)}$  définie par :

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A[X_1, \dots, X_n]) &\longrightarrow \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_n]) \\ Q &\longrightarrow Q \cap R[X_1, \dots, X_n] \end{aligned}$$

induit une bijection entre  $X_A^{(n)}$  et  $Y^{(n)}$  où  $Y^{(n)} = \{Q \in \text{Spec}(R^{(n)}) / Q \cap R \neq M\}$ . De plus, si :

$$Q \in X_A^{(n)}, \text{ on a : } (A[X_1, \dots, X_n])_Q \simeq (R[X_1, \dots, X_n])_Q \cap R[X_1, \dots, X_n]$$

**REMARQUE 2.4.**

(a). On remarque que si  $Q \in X_A^{(n)}$ , alors :

$$Q = (Q \cap R[X_1, \dots, X_n])^\# \cap A[X_1, \dots, X_n]$$

avec

$$(Q \cap R[X_1, \dots, X_n])^\# = (Q \cap R[X_1, \dots, X_n])_x \cap R^\#[X_1, \dots, X_n],$$

pour  $x \in M - Q \cap R$ .

(b). On montre de la même façon que le corollaire 2.1, que :

$$\dim A[X_1, \dots, X_n] \geq \dim R[X_1, \dots, X_n] - (n + 1) \quad \forall R \subseteq A \subseteq R^\#.$$

### 3 - Etude de la notion de Jaffard de $R^\#$ .

Soit  $(R, M)$  un anneau local, d'idéal maximal  $M$ . Si  $R$  est de Jaffard [3] que peut-on dire de  $A$ , tel que :  $R \subseteq A \subseteq R^\#$  ? Plus précisément est-ce que  $A$  est de Jaffard ?

Le problème est toujours ouvert. On va énoncer une proposition qui nous donne le renseignement sur  $A[X_1, \dots, X_i]$  pour un certain  $i \in \mathbb{N}$ .

**PROPOSITION 3.1** - Soit  $R$  un anneau local d'idéal maximal  $M$  de dimension finie. Alors  $\forall A$  tel que  $R \subseteq A \subseteq R^\#$ ,  $A[X_1, \dots, X_{\dim R-1}]$  est de Jaffard.

#### REMARQUE 3.5.

(a). Si on supprime dans la proposition 3.1 l'hypothèse  $R$  est de Jaffard, le résultat ne reste plus vrai.

#### CONRE-EXEMPLE.

$$V = K(X_1, \dots, X_n) + \frac{M}{Y K(X_1, \dots, X_n)[[Y]]} = K(X_1, \dots, X_n)[[Y]].$$

L'anneau des séries formelles à coefficients dans  $K(X_1, \dots, X_n)$ . Posons :

$$R = K[X_1]_{(X_1)} + M.$$

On montre que :  $\dim R[Z] = 3$ ,  $\dim_V R^\# = n$  et  $\dim R = 2$ . On aura :

$$\dim_V R^\#[Z] = n + 1 \text{ et } \dim R^\#[Z] = 3.$$

Si on prend  $n \geq 3$ ,  $R^\#[Z_1, \dots, Z_{\dim R-1}] = R^\#[Z]$  n'est pas de Jaffard.

(b). Le fait que  $R^\#$  est de Jaffard n'a aucune influence sur la dimension valuative de  $R^{(i)} = R[X_1, \dots, X_i]$  pour  $i \in \mathbb{N}$ . On va exhiber un exemple qui vérifie les propriétés suivantes :

1°).  $R^\#$  est de Jaffard.

2°).  $\dim_V R = \infty$  c'est-à-dire  $R[X_1, \dots, X_i]$  est non de Jaffard, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

**EXEMPLE** - Soient  $K$  un corps et  $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$  une collection d'indéterminées sur  $K$  tel que le cardinal de  $I$  soit infini. Posons :

$$\begin{cases} L = K(X_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ corps des fractions de } K[X_\alpha]_{\alpha \in I} \\ V = L + M = L[[Y]] \text{ l'anneau des séries formelles à coefficients dans } L \\ R = K + M \text{ où } M = YL[[Y]] \end{cases}$$

On remarque que  $R^\# = L((Y))$  [[1], Th. 1.6] corps des fractions de  $L[[Y]]$ , et  $\dim_v R = \infty$ . Par suite  $R$  vérifie les propriétés 1) et 2) de la remarque 3.5 précédente.

**4 - Autres exemples vérifiant  $R^\# \neq R_S$ , où  $S$  partie multiplicative de  $R$  quelconque.**

**THEOREME 4.3** - Soit  $R$  un anneau noethérien local d'idéal maximal  $M$ , ( $\dim R \geq 2$ ), et tel que  $\text{grad}(M) = 1$ . Alors  $R^\# \neq R_S$  quel que soit  $S$  partie multiplicative de  $R$ .

**EXEMPLES.**

1).

$$R_1 = K \left[ \left[ X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, X_i X_j, X_1^3, \dots, X_n^3, X_i X_j X_k \right] \right]$$

$i \neq j$   
 $i \neq j$   
 $j \neq k$   
 $k \neq i$

on montre que  $\text{grad}(M_{R_1}) = 1$  ou  $M_{R_1}$  est l'idéal maximal de  $R$ . Par suite  $R_1$  vérifie les conditions du Th. 4.3, donc  $R_1^\# \neq R_S, \forall S$  partie multiplicative.

2). On prend  $A$  principal,  $p$  est un élément irréductible de  $A$ . On pose :

$$C = A[pX, X^2, X^3],$$

on montre que l'idéal maximal  $M_C$  de  $C$  est de grade 1 avec  $M_C = (p, pX, X^2, X^3)$

Si on pose  $R_2 = C_{M_C}$ , l'idéal maximal de  $R_2$  est de grade 1.  $R_2$  vérifie les conditions du Th. 4.3.

On va donner une condition suffisante pour que  $R^\#$  soit une extension entière de  $R$ .

**PROPOSITION 4.2** - Soit  $R$  un anneau local d'idéal maximal  $M$ . Et si s'il existe  $B$  une extension entière de  $R$ , de Krull vérifiant  $X'(B) \cap \text{Max}(B) = \emptyset$  (ensemble vide). Alors

$(X'(B)) = \{P \in \text{Spec}(B) / \text{ht}P = 1\}$ .  $R^\#$  est une extension entière de  $R$  et de plus  $R^\# \subseteq B$ .

**EXEMPLES.**

(a). Si on prend  $B = K[[X_1, \dots, X_n]]$  l'anneau des séries formelles à plusieurs indéterminées à coefficients dans  $K$ . On prend l'anneau  $R_1$  (exemple 1)). On montre que  $B$  est entier sur  $R_1$  et  $B$  vérifie les conditions de la prop. 4.1 donc on aura  $R^\# \subseteq B$ .

(b). Si on prend  $R_2$  (exemple 2) et  $B = A[X]_{(p,pX,X^2,X^3)}$ . De la même façon, le couple  $(R_2, B)$  vérifie les conditions de la prop. 4.2 donc  $R_2^\# \subseteq B$ , par suite  $R_2^\#$  est une extension entière de  $R_2$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] **D. ANDERSON, A. BOUVIER**, "Ideal Transforms and overring of a quasilocal Integral Domain".
- [2] **A. BOUVIER and M. ZAFRULLAH**, On some classe groupe of an integral domain (preprint).
- [3] **D.F. ANDERSON, A. BOUVIER, D.E. DOBBS, M. FONTANA and S. KABBAJ**, On JAFFARD Domains Expositions. Math. Bib. Institut & F.A. Brockhans AG (à paraître).
- [4] **J. MATIJEVIC**, Maximal ideal Transforms of noetherian rings. P.A. MC Volume 54 january 1976.
- [5] **S. KABBAJ**, La formule de la dimension pour les S.D. forts universels. Boll. Un. Math. Ital. Algebra et Geometria, Serie VI, Vol. V-D, n°1, 1986, p. 145.