PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PAUL-JEAN CAHEN

Dimension des couples d'anneaux partageant un idéal

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 69-75
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_69_0>

DIMENSION DES COUPLES D'ANNEAUX PARTAGEANT UN IDEAL

Paul-Jean CAHEN

Introduction

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. Dans toute la suite,on désigne par (A,B) un <u>couple propre</u> d'anneaux $(A \neq B)$, tel que A soit inclus dans B et ayant un idéal I commun <u>non trivial</u> $(I\neq(0))$ [6] ; l'exemple le plus classique en est donné par la construction $D+M$ [2],[13]. De façon générale, pour définir un tel couple, il suffit de se donner un anneau B, un idéal I de B et un sous anneau D du quotient B/I et de définir A comme l'ensemble des éléments de B dont la classe modulo I est dans D : on dira alors que A est <u>l'anneau de la construction B,I,D</u> ; dans ces conditions, D est isomorphe au quotient A/I et on a un carré cartésien (comme chez Fontana [11],[12]).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ D \arrow[r] & B/I \end{tikzcd}$$

Dans un premier paragraphe nous donnons des conditions pour que A soit Noethérien ou intégralement clos qui généralisent les résultats biens connus de la construction $D+M$. Dans un second nous étudions les relèvements des chaines d'idéaux premiers de A dans B. Au troisième paragraphe, notant $A[n]$ l'anneau des polynômes en n indéterminées sur A, on étudie directement la dimension de Krull de $A[n]$ et on en déduit la dimension valuative de A lorsque B est <u>localement de Jaffard</u> et que les idéaux premiers de B contenant I sont maximaux. Enfin, au quatrième et dernier paragraphe, on termine par des exemples.

1 Propriétés de A

PROPOSITION 1 : *Pour que l'anneau A soit Noethérien il suffit que B soit Noethérien et que le quotient B/I soit un A/I-module de type fini ; si I contient un élément qui ne divise pas zéro dans B, alors ces conditions sont en outre nécéssaires.*

EXEMPLE 1 : Soient k un anneau Noethérien et intègre, $B = k[(x_i)]$ le quotient de l'anneau de polynômes $k[(X_i)]$, en une infinité d'indéterminées par l'idéal engendré par tous les produits X_iX_j, $i\neq j$, $I=(x_\omega)$ et $D = k$, alors l'anneau A de la construction B,I,D est isomorphe à l'anneau de polynômes $k[X_\omega]$, il est donc Noethérien et intègre alors que B ne l'est manifestement pas.

PROPOSITION 2 : *Si B est un anneau intégralement clos. alors pour que A soit intégralement clos il faut et il suffit que A/I soit intégralement fermé dans B/I.*

Remarque 1 : Si B est intègre, de corps des fractions K, il est clair (comme noté dans [1]) que B est contenu dans le conducteur $[I:I]$ et que ce conducteur est le plus grand sous-anneau de K contenant A et partageant l'idéal I avec A. Il en résulte que l'anneau A n'est jamais complètement intégralement clos

Remarque 2 :Si A est intègre aucun idéal commun à A et B n'est principal dans A ,puisque sinon on a $[I:I] = A$ (par contre il suffit de prendre $A = A_1 \times I$ et $B = B_1 \times I$, où A_1, B_1 et I sont trois anneaux, pour que l'idéal I soit monogène dans A comme dans B).

EXEMPLE 2 : Soit A un anneau intégralement clos mais non complètement intégralement clos et x un élément de son corps des fractions quasi entier sur A mais non dans A ; il existe donc un idéal I de A tel que $x \in [I:I]$ et si on pose $B = A[x^2]$, alors B est contenu dans le conducteur $[I:I]$ et partage donc l'idéal I avec A, mais B n'est pas intégralement clos puisque x est entier sur B.

2 Hauteur de I, dimension de A

Tout idéal de B contenu dans I est encore commun à A et B (parmi les idéaux communs à A et B il en existe d'ailleurs un plus grand, somme de tous les autres, donc dans le cas particulier où A et B ont en commun tous leurs idéaux premiers ce sont donc nécéssairement des anneaux locaux [1]). Par contre un idéal de A contenu dans I n'est pas nécéssairement un idéal de B (comme par exemple si cet idéal est principal dans A lorsque A est intègre [Remarque 2]) ; néanmoins tout idéal premier de A contenu dans I se relève de manière unique dans B d'après la proposition suivante

PROPOSITION 3 : *Pour toute partie multiplicative S de A, le couple $(S^{-1}A,S^{-1}B)$ partage l'idéal $S^{-1}I$; en outre si S rencontre l'idéal I, alors les localisés $S^{-1}A$ et $S^{-1}B$ sont égaux.*

En particulier, si B est intègre, alors A et B ont même corps des fractions.

De façon générale le spectre de A est donc la réunion du fermé $V(I)$ (ensemble des premiers contenant I), homéomorphe au spectre de $D = A/I$, et de l'ouvert complémentaire $D(I)$, homéomorphe à l'ouvert correspondant du spectre de B [introduction, proposition 0] (voir Fontana [11]).

PROPOSITION 4 : *Soit $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$, une chaine d'idéaux premiers de A, où P_n est minimal parmi les premiers contenant I et P_{n-1} ; alors cette chaine se relève dans B.*

Démonstration : On peut immédiatement relever le début de cette chaine jusqu'en P_{n-1} [proposition 3], Q_{n-1} relevant P_{n-1}, il reste à relever P_n et pour cela on montre (de façon directe et tout à fait élémentaire) que $Q_{n-1}+I$ ne rencontre pas la partie multiplicative complémentaire de P_n dans A •

Pour étudier la dimension de Krull de A, on note

X l'ensemble des idéaux premiers de B contenant I,

Y l'ensemble des éléments minimaux de X.

Comme les idéaux ne contenant pas I de A et de B sont en bijection respectant l'inclusion, on a

LEMME 4 : *Si Q est un idéal premier minimal de I dans B, alors on a l'inégalité* $ht_B(Q) \leqslant ht_A(Q\cap A)$.

On tire

THEOREME 1 : *On a l'encadrement*

$$Sup_{Q\in Y} \{ ht_B(Q) + dim\ (A/Q\cap A) \} \leqslant dim\ (A)$$

$$dim\ (A) \leqslant Sup_{Q\in X} \{ dim(B),\ ht_B(Q) + dim(A/Q\cap A) \}$$

Pour la démonstration on peut se reporter à celle du théorème 2 au §3 ci-dessous.

COROLLAIRE 1 : *On a l'inégalité* $dim(A) \leqslant dim(B) + dim(A/I)$.

COROLLAIRE 2 : *Si tout idéal premier de B contenant I est maximal, on a*

$$dim(A) = Sup_{Q\in X} \{ dim(B), ht_B(Q)+dim(A/Q\quad A) \}$$

On tire en effet du lemme 4 que, dans ce cas, $dim(A) \geqslant dim(B)$ (ce qui n'est pas toujours vrai [exemple 4 ci-dessous]), le résultat est alors immédiat.

On retrouve ainsi en particulier les résultats de la construction classique D+M [2],[5].

EXEMPLE 4 : Soient $A \subset B \subset C$, trois anneaux partageant un idéal I de hauteur maximale dans C, alors

$$dim(A) = dim(C) + dim(A/I) \quad \text{et} \quad dim(B) = dim(C) + dim(B/I),$$

ainsi $dim(B) > dim(A)$ si $dim(B/I) > dim(A/I)$. Par exemple $C = \mathbf{R}[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients réels, I l'idéal (X), A le sous-anneau formé par les polynômes de terme constant rationnel et B le sous-anneau formé par les polynômes de terme constant dans l'anneau $\mathbf{Q}[t_1,\dots,t_n]$, où $t_1,\dots,t_n$ sont des réels algébriquement indépendants.

§3 Polynômes

On note R[n] l'anneau des polynômes en n indéterminées sur un anneau R, et pour tout idéal J de R, on note J[n] l'idéal de R[n] formé des polynômes à coefficients dans J. Il est clair que le couple (A[n],B[n]) partage l'idéal I[n].

Si Q est un idéal premier de B et $P = Q \cap A$, on note d_Q le degré de transcendance du corps des fractions de B/Q sur celui de A/P.

LEMME 5 : *Soient Q et Q' deux idéaux premiers de B, tels que*

$Q' \subset Q$, $I \subseteq Q$ et que $I \not\subset Q'$, et soient $P = Q \cap A$, $P' = Q' \cap A$;

Alors, si $n \leq d_Q$, on a $ht_{A[n]}(P[n]/P'[n]) \geq n+1$

Démonstration : On choisit des éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de B tels que le système $(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n)$ soit algébriquement libre dans B/Q sur le corps des fractions de A/P et, pour $1 \leq i \leq n$, on note $\mathcal{Q}_i$ l'idéal premier de $B[n]$ contenant $Q'[n]$ et correspondant à l'idéal $(X-\bar{\alpha}_1,\ldots,X-\bar{\alpha}_i)$ de $B/Q'[n]$ (en particulier $\mathcal{Q}_0$ est égal à $Q'[n]$). Si on note $\mathcal{P}_i$ l'intersection de $\mathcal{Q}_i$ avec $A[n]$, on tire une chaine

$$P'[n] = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_n$$

En outre, $\mathcal{P}_n \subset P[n]$, en effet, si $f \in \mathcal{P}_n$, alors $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in Q'$, donc $\bar{f}(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n) = \bar{0}$ dans B/Q, alors que $\bar{f}$ est à coefficients dans A/P, donc $\bar{f} = \bar{0}$, soit $f \in P[n]$. Enfin toutes les inclusions sont strictes, en effet si $j \in I$ mais $j \in P'$, alors $j \in P[n]$ mais $j \notin \mathcal{P}_n$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $j(X_i-\alpha_i) \in \mathcal{P}_i$ tandis que $j(X_i-\alpha_i) \notin \mathcal{P}_{i-1}$.

On tire

THEOREME 2 : *On a l'encadrement*

$$Sup_{Q \in Y}\{\, ht_B(Q) + inf(d_Q,n) + dim(A/Q\cap A\,[n]) \,\} \leq dim(A[n])$$

$$dim(A[n]) \leq Sup_{Q \in X}\{\, dim(B[n],\ ht_{B[n]}(Q[n]) + inf(d_Q,n) + dim(A/Q\cap A\,[n]) \,\}$$

Démonstration : • Pour la minoration, soit $Q \in Y$, on a immédiatement

$$dim(A[n]) \geq ht_{A[n]}(Q \cap A\,[n]) + dim(A/Q \cap A\,[n])$$

or $ht_{A[n]}(Q \cap A\,[n]) \geq ht_B(Q) + inf(d_Q,n)$, en effet, si on considère une chaine $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_h = Q$, dans B, posant $P_i = Q_i \cap A$, on tire une chaine de même longueur dans A (puisque Q est minimal contenant I) et donc une chaine $P_0[n] \subset P_1[n] \subset \ldots \subset P_h[n] = Q \cap A\,[n]$ dans $A[n]$, or d'après le lemme 5, si $k=inf(d_Q,n)$, on peut intercaler k premiers entre $P_h-1[n]$ et $P_h[n]$.

• Pour la majoration, on note que d'après le théorème de la chaine spéciale [5],[17], il existe une chaine de longueur maximale dans $A[n]$, soit

$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_m$, telle que, pour tout i, $0 \leq i \leq m$, notant $P_i = \mathcal{P}_i \cap A$, alors $P_i[n]$ est dans la chaine. Deux cas alors se présentent :

- ou bien aucun P_i ne contient I, dans ce cas cette chaine se relève dans $B[n]$ et $dim(A[n]) \geq dim(B[n])$.
- ou bien le plus petit idéal de la chaine contenant $I[n]$ est de la forme $\mathcal{P}_d = P_d[n]$. Dans ce cas, la chaine $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_d$ se relève dans $B[n]$ [§2, proposition 4], $\mathcal{P}_d$ se relevant en $\mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{Q} \cap B = Q$ et Q est au dessus de P_d. Ainsi

$$d \leq ht_{B[n]}(\mathcal{Q}) = ht_{B[n]}(Q[n]) + ht_{B[n]}(\mathcal{Q}/Q[n]) \quad [5, \text{ théorème } 1]$$

où $ht_{B[n]}(\mathcal{Q}/Q[n]) \leq inf(d_Q,n)$, tout idéal entre $\mathcal{Q}$ et $Q[n]$ étant au dessus de $P_d[n]$. Enfin il est clair que $m-d \leq dim(A/P_d)[n]$ •

Notant $\dim_v(R)$ la *dimension valuative* d'un anneau R [17], on tire

COROLLAIRE 1 : *Si tout idéal premier de B contenant I est maximal et si l'anneau B est localement de Jaffard, alors*

1) $\dim(A[n]) = \mathrm{Sup}_{Q\in X}\{\dim(B)+n,\ ht_B(Q) + \inf(d_Q,n) + \dim(A/Q\cap A\ [n])\}$

2) $\dim_v(A) = \mathrm{Sup}_{Q\in X}\{\dim(B),\ ht_B(Q) + d_Q + \dim_v(A/Q\cap A)\}$

Dans un article à venir, on établit une formule pour la dimension valuative de A sous la seule hypothèse que tout premier de B contenant I est maximal [7]

§4 Exemples d'anneau localement de Jaffard

On rappelle les implications classiques [2],[7],[19]

(Universellement S-fort) $\Longrightarrow$ (localement de Jaffard)

$\Downarrow$

(S-fort)

toutes ces conditions étant équivalentes pour un anneau de dimension 1.

Pour donner des contre-exemples aux implications réciproques on produit le plus souvent un anneau S-fort qui n'est pas localement de Jaffard ou l'inverse. La construction B,I,D nous permet de produire un anneau qui est tout à la fois S-fort et localement de Jaffard mais n'est pas universellement S-fort.

EXEMPLE 5 : On considère le corps $D = k(x_1,..,x_n,..)$ des fractions rationnelles en une infinité d'indéterminées sur un corps k et B une D-algèbre intègre de type fini, ainsi B est noethérien et donc à la fois localement de Jaffard et S-fort. On note I l'intersection de deux idéaux premiers Q_1 et Q_2 de B de hauteur respectives h_1 et h_2 qu'on suppose maximaux, quitte à localiser, de sorte que $B/I \simeq B/Q_1\times B/Q_2$; pour tout idéal premier Q de B, le quotient B/Q est une extension finie d'une extension transcendante pure de D, soit de $k(t_1,..,t_r,x_1,..,x_n,..)$; il est donc clair que pour tout entier d, il existe un morphisme θ de $k(x_1,..,x_n,...)$ dans $k(t_1,..,t_r,x_1,..,x_n,...)$ qui fait de B/Q une extension de D de degré de transcendance d (il suffit de "décaler" les indéterminées); considérant alors le morphisme produit $\theta_1\times\theta_2$ de D dans $B/I = B/Q_1\times B/Q_2$, on peut réaliser la construction B,I,D de sorte que les degrés de transcendance de B/Q_1 et B/Q_2 sur A/I soient des entiers d_1 et d_2 arbitrairement fixés. On choisit alors les hauteurs et les degrés de transcendance comme suit :

$h_1=1,\quad d_1\geq 2,\quad h_2\geq(h_1+d_1),\quad d_2=0$

L'anneau A de la construction B,I,D est facilement S-fort et localement de Jaffard (et en outre caténaire). Par contre A[X] n'est pas S-fort. En effet on peut choisir des éléments α_1 et α_2 de B tels que le système $(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)$ soit algébriquement libre dans B/Q_2 sur A/I ; l'idéal $(X-\alpha_1)$ de B[X] découpe un idéal $\mathfrak{P}_1$ de A[X] contenu dans I[X], sans idéal intermédiaire, mais l'idéal $(X-\alpha_1,X-\alpha_2)$ de B[X,Y] découpe dans A[X,Y] un idéal $\mathfrak{P}_2$ strictement contenu entre $\mathfrak{P}_1[Y]$ et I[X] [Y] [lemme 5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON,D.F.,DOBBS,D.E. : Pairs of rings with the same prime ideals. Canadian J.of Math. 32, 362-384 (1980)

[2] BASTIDA,E.,GILMER,R. : Overrings and divisorial ideals of rings of the form D + M. Michigan Math.J. 209, 79-95 (1973)

[3] BOISEN,M.B.,SHELDON,P.B. : CPI-extensions : overrings of integral domains with special spectrum. Canadian J.of Math. 29, 722-737 (1977)

[4] BREWER, J.W.,MONTGOMERY?P.A.,RUTTER,P.A.,HEINZER,W.J. : Krull dimension of polynomial rings. Lecture notes 311, 26-46 (1973) Springer Verlag

[5] BREWER,J.W.,RUTTER,E.A. : D+M constructions with general overrings ; Michigan J. 23, 33-42 (1976)

[6] CAHEN,P.-J. : Couples d'anneaux partageant un idéal. (A paraître). Archiv der Math

[7] CAHEN,P.-J. : Dimension des couples d'anneaux partageant un idéal. (A paraître). Archiv der Math

[8] CAHEN,P-J.,HAOUAT,Y. : Spectre d'anneaux de polynômes sur une suite croissante d'anneaux. Archiv der Math 49, 281-285 (1987)

[9] COSTA,D.,MOTT,J.,ZAFRULLAH,M. : The construction $D+XD_S[X]$. J.of Algebra 53, 423-439 (1978)

[10] EAKIN,P.M. : The converse of a wellknown theorem on Noetherian rings. Math.Ann. 177, 278-282 (1968)

[11] FONTANA,M. : Topologically defined classes of commutative rings Annali Matematica pura ed applicata 123, 331-355 (1980)

[12] FONTANA,M. : Carrés cartésiens, anneaux divisés et anneaux localement divisés. Prépublication de l'Univ. de Paris-Nord N°21

[13] GILMER,R. : Multiplicative ideal theory. Dekker, New-York (1972)

[14] HAOUAT,Y. : Spectre d'anneaux à plusieurs variables sur une suite croissante d'anneaux. Archiv der Math. 50, 236-240 (1988)

[15] HEDSTROM,J.R.,HOUSTON,E.G. : Pseudo-valuation domains. Pacific.J.Math. 75, 137-147 (1978)

[16] HEDSTROM,J.R.,HOUSTON,E.G. : Pseudo-valuation domains II. Houston J.Math. 4, 199-207 (1978)

[17] JAFFARD,P. : Théorie de la dimension des anneaux de polynômes. Gauthiers Villars, Paris (1960)

[18] NAGATA,M. : Local rings. R.E.Krieger, New-York (1975)

[19] PARKER, T. : A number theoretic characterization of dimension sequences. Amer.J.Math. 97, 308-311 (1975)

[20] SEIDENBERG,A. : A note on the dimension of rings. Pacific J.of Math. 3, 505-512 (1953)

[21] SEIDENBERG,A. : A note on the dimension of rings II. Pacific J.of Math 4, 603-614 (1954)