

PAUL-JEAN CAHEN

Dimension des couples d'anneaux partageant un idéal

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 69-75

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_69_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Introduction

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. Dans toute la suite, on désigne par (A,B) un couple propre d'anneaux ($A \neq B$), tel que A soit inclus dans B et ayant un idéal I commun non trivial ($I \neq (0)$) [6] ; l'exemple le plus classique en est donné par la construction $D+M$ [2],[13]. De façon générale, pour définir un tel couple, il suffit de se donner un anneau B , un idéal I de B et un sous anneau D du quotient B/I et de définir A comme l'ensemble des éléments de B dont la classe modulo I est dans D : on dira alors que A est l'anneau de la construction B,I,D ; dans ces conditions, D est isomorphe au quotient A/I et on a un carré cartésien (comme chez Fontana [11],[12]).

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D & \longrightarrow & B/I
 \end{array}$$

Dans un premier paragraphe nous donnons des conditions pour que A soit Noethérien ou intégralement clos qui généralisent les résultats bien connus de la construction $D+M$. Dans un second nous étudions les relèvements des chaînes d'idéaux premiers de A dans B . Au troisième paragraphe, notant $A[n]$ l'anneau des polynômes en n indéterminées sur A , on étudie directement la dimension de Krull de $A[n]$ et on en déduit la dimension valuative de A lorsque B est localement de Jaffard et que les idéaux premiers de B contenant I sont maximaux. Enfin, au quatrième et dernier paragraphe, on termine par des exemples.

1 Propriétés de A

PROPOSITION 1 : *Pour que l'anneau A soit Noethérien il suffit que B soit Noethérien et que le quotient B/I soit un A/I -module de type fini ; si I contient un élément qui ne divise pas zéro dans B , alors ces conditions sont en outre nécessaires.*

EXEMPLE 1 : Soient k un anneau Noethérien et intègre, $B = k[(x_i)]$ le quotient de l'anneau de polynômes $k[(X_i)]$, en une infinité d'indéterminées par l'idéal engendré par tous les produits $X_i X_j$, $i \neq j$, $I = (x_0)$ et $D = k$, alors l'anneau A de la construction B,I,D est isomorphe à l'anneau de polynômes $k[X_0]$, il est donc Noethérien et intègre alors que B ne l'est manifestement pas.

PROPOSITION 2 : Si B est un anneau intégralement clos, alors pour que A soit intégralement clos il faut et il suffit que A/I soit intégralement fermé dans B/I .

Remarque 1 : Si B est intègre, de corps des fractions K , il est clair (comme noté dans [1]) que B est contenu dans le conducteur $[(I):I]$ et que ce conducteur est le plus grand sous-anneau de K contenant A et partageant l'idéal I avec A . Il en résulte que l'anneau A n'est jamais compl tement intégralement clos

Remarque 2 : Si A est intègre aucun idéal commun à A et B n'est principal dans A , puisque sinon on a $[(I):I] = A$ (par contre il suffit de prendre $A = A_1 \times I$ et $B = B_1 \times I$, où A_1, B_1 et I sont trois anneaux, pour que l'idéal I soit monogène dans A comme dans B).

EXEMPLE 2 : Soit A un anneau intégralement clos mais non compl tement intégralement clos et x un élément de son corps des fractions quasi entier sur A mais non dans A ; il existe donc un idéal I de A tel que $x \in [(I):I]$ et si on pose $B = A[x^{-2}]$, alors B est contenu dans le conducteur $[(I):I]$ et partage donc l'idéal I avec A , mais B n'est pas intégralement clos puisque x est entier sur B .

2 Hauteur de I , dimension de A

Tout idéal de B contenu dans I est encore commun à A et B (parmi les idéaux communs à A et B il en existe d'ailleurs un plus grand, somme de tous les autres, donc dans le cas particulier où A et B ont en commun tous leurs idéaux premiers ce sont donc nécessairement des anneaux locaux [1]). Par contre un idéal de A contenu dans I n'est pas nécessairement un idéal de B (comme par exemple si cet idéal est principal dans A lorsque A est intègre [Remarque 2]); néanmoins tout idéal premier de A contenu dans I se relève de manière unique dans B d'après la proposition suivante

PROPOSITION 3 : Pour toute partie multiplicativa S de A , le couple $(S^{-1}A, S^{-1}B)$ partage l'idéal $S^{-1}I$; en outre si S rencontre l'idéal I , alors les localisés $S^{-1}A$ et $S^{-1}B$ sont égaux.

En particulier, si B est intègre, alors A et B ont même corps des fractions.

De façon générale le spectre de A est donc la réunion du fermé $V(I)$ (ensemble des premiers contenant I), homéomorphe au spectre de $D = A/I$, et de l'ouvert complémentaire $D(I)$, homéomorphe à l'ouvert correspondant du spectre de B [introduction, proposition 0] (voir Fontana [11]).

PROPOSITION 4 : Soit $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$, une châine d'idéaux premiers de A , où P_n est minimal parmi les premiers contenant I et P_{i-1} ; alors cette châine se relève dans B .

Démonstration : On peut immédiatement relever le début de cette chaîne jusqu'en P_{n-1} [proposition 3], Q_{n-1} relevant P_{n-1} , il reste à relever P_n et pour cela on montre (de façon directe et tout à fait élémentaire) que $Q_{n-1}+I$ ne rencontre pas la partie multiplicative complémentaire de P_n dans A .

Pour étudier la dimension de Krull de A , on note

X l'ensemble des idéaux premiers de B contenant I ,

Y l'ensemble des éléments minimaux de X .

Comme les idéaux ne contenant pas I de A et de B sont en bijection respectant l'inclusion, on a

LEMME 4 : Si Q est un idéal premier minimal de I dans B , alors on a l'inégalité $ht_B(Q) \leq ht_A(Q \cap A)$.

On tire

THEOREME 1 : On a l'encadrement

$$\text{Sup}_{Q \in Y} (ht_B(Q) + \dim(A/Q \cap A)) \leq \dim(A)$$

$$\dim(A) \leq \text{Sup}_{Q \in X} (\dim(B), ht_B(Q) + \dim(A/Q \cap A))$$

Pour la démonstration on peut se reporter à celle du théorème 2 au §3 ci-dessous.

COROLLAIRE 1 : On a l'inégalité $\dim(A) \leq \dim(B) + \dim(A/I)$.

COROLLAIRE 2 : Si tout idéal premier de B contenant I est maximal, on a

$$\dim(A) = \text{Sup}_{Q \in X} (\dim(B), ht_B(Q) + \dim(A/Q \cap A))$$

On tire en effet du lemme 4 que, dans ce cas, $\dim(A) \geq \dim(B)$ (ce qui n'est pas toujours vrai [exemple 4 ci-dessous]), le résultat est alors immédiat.

On retrouve ainsi en particulier les résultats de la construction classique D+M [2],[5].

EXEMPLE 4 : Soient $A \subset B \subset C$, trois anneaux partageant un idéal I de hauteur maximale dans C , alors

$$\dim(A) = \dim(C) + \dim(A/I) \quad \text{et} \quad \dim(B) = \dim(C) + \dim(B/I),$$

ainsi $\dim(B) > \dim(A)$ si $\dim(B/I) > \dim(A/I)$. Par exemple $C = \mathbb{R}[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients réels, I l'idéal (X) , A le sous-anneau formé par les polynômes de terme constant rationnel et B le sous-anneau formé par les polynômes de terme constant dans l'anneau $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$, où t_1, \dots, t_n sont des réels algébriquement indépendants.

§3 Polynômes

On note $R[n]$ l'anneau des polynômes en n indéterminées sur un anneau R , et pour tout idéal J de R , on note $J[n]$ l'idéal de $R[n]$ formé des polynômes à coefficients dans J . Il est clair que le couple $(A[n], B[n])$ partage l'idéal $I[n]$.

Si Q est un idéal premier de B et $P = Q \cap A$, on note d_Q le degré de transcendance du corps des fractions de B/Q sur celui de A/P .

LEMME 5 : Soient Q et Q' deux idéaux premiers de B , tels que

$$Q' \subset Q, I \subseteq Q \text{ et } I \not\subseteq Q', \text{ et soient } P = Q \cap A, P' = Q' \cap A;$$

Alors, si $n < d_Q$, on a $ht_{A[n]}(P[n]/P'[n]) \geq n+1$

Démonstration : On choisit des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de B tels que le système $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ soit algébriquement libre dans B/Q sur le corps des fractions de A/P et, pour $1 \leq i \leq n$, on note \mathcal{Q}_i l'idéal premier de $B[n]$ contenant $Q'[n]$ et correspondant à l'idéal $(X-\bar{\alpha}_1, \dots, X-\bar{\alpha}_i)$ de $B/Q'[n]$ (en particulier \mathcal{Q}_n est égal à $Q'[n]$). Si on note \mathcal{P}_i l'intersection de \mathcal{Q}_i avec $A[n]$, on tire une chaîne

$$P'[n] = \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{P}_1$$

En outre, $\mathcal{P}_n \subset P[n]$, en effet, si $f \in \mathcal{P}_n$, alors $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q'$, donc $\bar{f}(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \bar{0}$ dans B/Q , alors que \bar{f} est à coefficients dans A/P , donc $\bar{f} = \bar{0}$, soit $f \in P[n]$. Enfin toutes les inclusions sont strictes, en effet si $j \in I$ mais $j \notin P'$, alors $j \in P[n]$ mais $j \notin \mathcal{P}_n$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $j(X_1 - \alpha_1) \in \mathcal{P}_i$ tandis que $j(X_1 - \alpha_1) \notin \mathcal{P}_{i-1}$.

On tire

THEOREME 2 : On a l'encadrement

$$Sup_{Q \in Y} \{ ht_B(Q) + inf(d_Q, n) + dim(A/Q \cap A[n]) \} \leq dim(A[n])$$

$$dim(A[n]) \leq Sup_{Q \in X} \{ dim(B[n], ht_{B[n]}(Q[n]) + inf(d_Q, n) + dim(A/Q \cap A[n]) \}$$

Démonstration : • Pour la minoration, soit $Q \in Y$, on a immédiatement

$$dim(A[n]) \geq ht_{A[n]}(Q \cap A[n]) + dim(A/Q \cap A[n])$$

or $ht_{A[n]}(Q \cap A[n]) \geq ht_B(Q) + inf(d_Q, n)$, en effet, si on considère une chaîne $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_{r-1} = Q$, dans B , posant $P_i = Q_i \cap A$, on tire une chaîne de même longueur dans A (puisque Q est minimal contenant I) et donc une chaîne $P_0[n] \subset P_1[n] \subset \dots \subset P_{r-1}[n] = Q \cap A[n]$ dans $A[n]$, or d'après le lemme 5, si $k = inf(d_Q, n)$, on peut intercaler k premiers entre $P_{r-1}[n]$ et $P_{r-1}[n]$.

• Pour la majoration, on note que d'après le théorème de la chaîne spéciale [5],[17], il existe une chaîne de longueur maximale dans $A[n]$, soit

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_m, \text{ telle que, pour tout } i, 0 \leq i \leq m, \text{ notant } P_i = \mathcal{P}_i \cap A,$$

alors $P_i[n]$ est dans la chaîne. Deux cas alors se présentent :

- ou bien aucun P_i ne contient I , dans ce cas cette chaîne se relève dans $B[n]$ et $dim(A[n]) \geq dim(B[n])$.

- ou bien le plus petit idéal de la chaîne contenant $I[n]$ est de la forme

$\mathcal{P}_d = P_d[n]$. Dans ce cas, la chaîne $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_d$ se relève dans $B[n]$ [S2, proposition 4], \mathcal{P}_d se relevant en \mathcal{Q} tel que $\mathcal{Q} \cap B = Q$ et Q est au dessus de P_d . Ainsi

$$d \leq ht_{B[n]}(\mathcal{Q}) = ht_{B[n]}(Q[n]) + ht_{B[n]}(\mathcal{Q}/Q[n]) \quad [5, \text{théorème 1}]$$

où $ht_{B[n]}(\mathcal{Q}/Q[n]) \leq inf(d_Q, n)$, tout idéal entre \mathcal{Q} et $Q[n]$ étant au dessus de $P_d[n]$. Enfin il est clair que $m-d \leq dim(A/P_d)[n]$ •

Notant $\dim_{\nu}(R)$ la dimension valuative d'un anneau R [17], on tire
COROLLAIRE 1 : Si tout idéal premier de B contenant I est maximal et si l'anneau B est localement de Jaffard, alors

$$1) \dim(A[n]) = \sup_{Q \in \mathcal{S}} (\dim(B) + n, ht_B(Q) + \inf(d_Q, n) + \dim(A/Q \cap A[n]))$$

$$2) \dim_{\nu}(A) = \sup_{Q \in \mathcal{S}} (\dim(B), ht_B(Q) + d_Q + \dim_{\nu}(A/Q \cap A))$$

Dans un article à venir, on établit une formule pour la dimension valuative de A sous la seule hypothèse que tout premier de B contenant I est maximal [7]

S4 Exemples d'anneau localement de Jaffard

On rappelle les implications classiques [2],[7],[19]

$$(\text{Universellement S-fort}) \implies (\text{localement de Jaffard})$$



(S-fort)

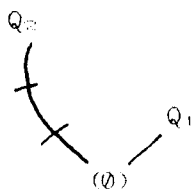
toutes ces conditions étant équivalentes pour un anneau de dimension 1.

Pour donner des contre-exemples aux implications réciproques on produit le plus souvent un anneau S-fort qui n'est pas localement de Jaffard ou l'inverse. La construction B, I, D nous permet de produire un anneau qui est tout à la fois S-fort et localement de Jaffard mais n'est pas universellement S-fort.

EXEMPLE 5 : On considère le corps $D = k(x_1, \dots, x_n, \dots)$ des fractions rationnelles en une infinité d'indéterminées sur un corps k et B une D -algèbre intègre de type fini, ainsi B est noethérien et donc à la fois localement de Jaffard et S-fort. On note I l'intersection de deux idéaux premiers Q_1 et Q_2 de B de hauteur respectives h_1 et h_2 qu'on suppose maximaux, quitte à localiser, de sorte que $B/I \cong B/Q_1 \times B/Q_2$; pour tout idéal premier Q de B , le quotient B/Q est une extension finie d'une extension transcendante pure de D , soit de $k(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n, \dots)$; il est donc clair que pour tout entier d , il existe un morphisme θ de $k(x_1, \dots, x_n, \dots)$ dans $k(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n, \dots)$ qui fait de B/Q une extension de D de degré de transcendance d (il suffit de "décaler" les indéterminées); considérant alors le morphisme produit $\theta_1 \times \theta_2$ de D dans $B/I = B/Q_1 \times B/Q_2$, on peut réaliser la construction B, I, D de sorte que les degrés de transcendance de B/Q_1 et B/Q_2 sur A/I soient des entiers d_1 et d_2 arbitrairement fixés. On choisit alors les hauteurs et les degrés de transcendance comme suit :

$$h_1=1, \quad d_1 \geq 2, \quad h_2 > (h_1 + d_1), \quad d_2=0$$

Spec B



Spec A



L'anneau A de la construction B, I, D est facilement S -fort et localement de Jaffard (et en outre caténaire). Par contre $A[X]$ n'est pas S -fort. En effet on peut choisir des éléments α_1 et α_2 de B tels que le système $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ soit algébriquement libre dans B/Q_2 sur A/I ; l'idéal $(X - \alpha_1)$ de $B[X]$ découpe un idéal \mathcal{P}_1 de $A[X]$ contenu dans $I[X]$, sans idéal intermédiaire, mais l'idéal $(X - \alpha_1, X - \alpha_2)$ de $B[X, Y]$ découpe dans $A[X, Y]$ un idéal \mathcal{P}_2 strictement contenu entre $\mathcal{P}_1[Y]$ et $I[X][Y]$ [lemme 5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON, D.F., DOBBS, D.E. : Pairs of rings with the same prime ideals. Canadian J. of Math. 32, 362-384 (1980)
- [2] BASTIDA, E., GILMER, R. : Overrings and divisorial ideals of rings of the form $D + M$. Michigan Math. J. 20, 79-95 (1973)
- [3] BOISEN, M.B., SHELDON, P.B. : CPI-extensions : overrings of integral domains with special spectrum. Canadian J. of Math. 29, 722-737 (1977)
- [4] BREWER, J.W., MONTGOMERY, P.A., RUTTER, P.A., HEINZER, W.J. : Krull dimension of polynomial rings. Lecture notes 311, 26-46 (1973) Springer Verlag
- [5] BREWER, J.W., RUTTER, E.A. : $D+M$ constructions with general overrings ; Michigan J. 23, 33-42 (1976)
- [6] CAHEN, P.-J. : Couples d'anneaux partageant un idéal. (A paraître). Archiv der Math
- [7] CAHEN, P.-J. : Dimension des couples d'anneaux partageant un idéal. (A paraître). Archiv der Math
- [8] CAHEN, P.-J., HAOUAT, Y. : Spectre d'anneaux de polynômes sur une suite croissante d'anneaux. Archiv der Math 49, 281-285 (1987)
- [9] COSTA, D., MOTT, J., ZAFRULLAH, M. : The construction $D+XD_\infty[X]$. J. of Algebra 53, 423-439 (1978)
- [10] EAKIN, P.M. : The converse of a wellknown theorem on Noetherian rings. Math. Ann. 177, 278-282 (1968)
- [11] FONTANA, M. : Topologically defined classes of commutative rings Annali Matematica pura ed applicata 123, 331-355 (1980)
- [12] FONTANA, M. : Carrés cartésiens, anneaux divisés et anneaux localement divisés. Prépublication de l'Univ. de Paris-Nord N°21
- [13] GILMER, R. : Multiplicative ideal theory. Dekker, New-York (1972)
- [14] HAOUAT, Y. : Spectre d'anneaux à plusieurs variables sur une suite croissante d'anneaux. Archiv der Math. 50, 236-240 (1988)
- [15] HEDSTROM, J.R., HOUSTON, E.G. : Pseudo-valuation domains. Pacific J. Math. 75, 137-147 (1978)

- [16] HEDSTROM, J.R., HOUSTON, E.G. : Pseudo-valuation domains II.
Houston J.Math. 4, 199-207 (1978)
- [17] JAFFARD, P. : Théorie de la dimension des anneaux de polynômes.
Gauthiers Villars, Paris (1960)
- [18] NAGATA, M. : Local rings. R.E.Krieger, New-York (1975)
- [19] PARKER, T. : A number theoretic characterization of dimension sequences.
Amer.J.Math. 97, 308-311 (1975)
- [20] SEIDENBERG, A. : A note on the dimension of rings.
Pacific J.of Math. 3, 505-512 (1953)
- [21] SEIDENBERG, A. : A note on the dimension of rings II.
Pacific J.of Math 4, 603-614 (1954)