

MARIE-JOSÉ LABOURE

MARC HIVERT

MICHEL JOURLIN

**Détection des zones de forte courbure sur la frontière
d'un convexe du plan euclidien**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1989, fascicule 1A
, p. 67-94

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1989__1A_67_0

© Université de Lyon, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DETECTION DES ZONES DE FORTE
COURBURE SUR LA FRONTIERE D' UN
CONVEXE DU PLAN EUCLIDIEN

Marie - José LABOURE , Marc HIVERT , Michel JOURLIN .

Laboratoire TSI . U A C N R S 842

23 Rue du dr Paul Michelon

42023 Saint Etienne Cedex 2

En analyse d'image les techniques usuelles de segmentation (croissance de régions, seuillage,...) conduisent dans l'étape ultime à la classification de formes binaires. Parmi les techniques possibles la morphologie mathématique permet, par exemple, d'obtenir des informations quant à la non convexité des objets et plus généralement quant à l'irrégularité de leurs frontières par le biais des opérations de base (érosion, dilatation...). Une autre approche consiste à calculer des paramètres de formes, c'est-à-dire qu'on cherchera à tester indépendamment du facteur échelle la circularité, la convexité, l'allongement ou l'asymétrie d'une forme.

Au niveau des applications, on est confronté au problème de la représentation sur trame, une forme étant mémorisée soit par codage de son contour soit en tant qu'image binaire. Dans le premier cas, il faut aussi résoudre le problème de la signification d'une frontière sur une trame.

Les articles consacrés à cette question utilisent pour la plupart un ensemble de points frontières consécutifs et étudient la variation de direction de la droite de régression associée à cet ensemble de points [1 à 3].

Ces approches ont en commun un point faible: l'arbitraire du choix de l'élément structurant pour la morphologie ou le nombre de points déplacés sur la frontière dans le dernier cas.

D'un point de vue mathématique, les difficultés ne sont pas du même ordre, en particulier dans le cas d'un corps convexe à bord C^2 : l'information locale est alors obtenue par le rayon de courbure. C'est l'interprétation de cet outil dans le cas discret que tentent de réaliser les articles cités précédemment.

Dans cet article, nous allons mettre en place un concept naturel lié à la courbure que nous développerons d'abord dans un cadre mathématique et qui présentera l'avantage de s'interpréter correctement dans le cas discret.

1. Points les plus éloignés

1.1 Préliminaires

Soit K un corps convexe compact de \mathbb{R}^2 de frontière notée $\text{fr } K$ et d la distance euclidienne de \mathbb{R}^2 .

Soit a un élément de K . (voir figure 1)

Du fait de la continuité de l'application distance et de la compacité de K la distance maximale de a à un élément de K est réalisée par au moins un élément de la frontière de K :

$$\exists b \in \text{fr } K ; \forall x \in K \quad d(a, x) \leq d(a, b)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\exists b \in \text{fr } K ; d(a, b) = \max \{ d(a, x) ; x \in K \} = \max \{ d(a, x) ; x \in \text{fr } K \}$$

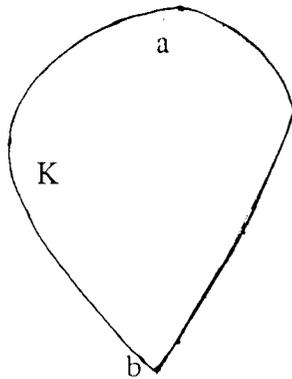


figure 1

Considérons l'application F qui associe à tout élément a de K l'ensemble des points de K les plus éloignés de a (c'est une partie de $\text{fr}(K)$).

$$F: K \rightarrow P(\text{fr}(K))$$

$$a \mapsto \{b; b \in \text{fr}(K); d(a, b) = \max \{ d(a, x) ; x \in \text{fr } K \} \}$$

$F(K)$ est représenté en gras sur la figure 2.

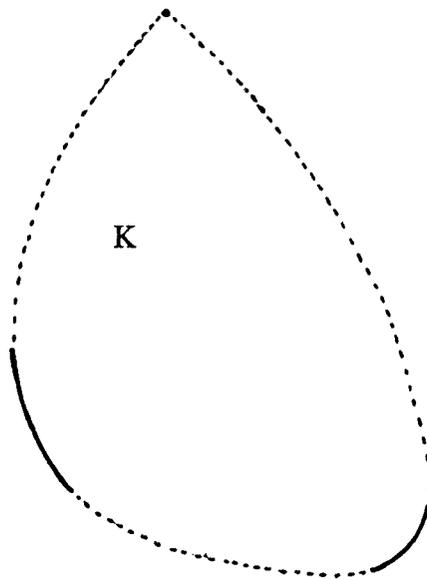


figure 2

Nous constatons visuellement que $F(K)$ est une partie de $Fr(K)$ correspondant aux zones de forte courbure de cette frontière. Dans $F(K)$ se trouve "l'information de forme" de K .

1.2 Etude de l'image de F

Proposition 1

Si A est un point le plus éloigné de a de K alors A est le plus éloigné de tout point de K de la droite (a, A) extérieur à $]a, A]$.

Conséquence

$$F(K) = F(fr(K))$$

ce qui exprime que les points les plus éloignés sur K sont les plus éloignés des points frontières de K .

Preuve (voir figure 3)

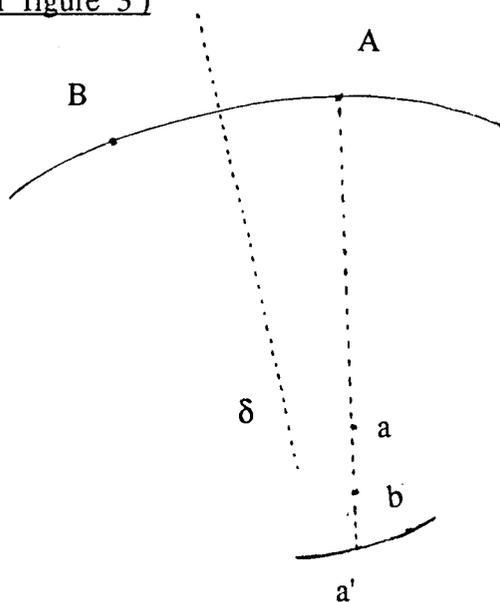


figure 3

Par abus nous remplacerons souvent la notation $d(a,b)$ par ab .

Soit $a \in K$ tel que $A \in F(a)$

Soit $\{a'\} =]A,a) \cap \text{Fr}(K)$.

Montrons que tout point b de $[a,a']$ est tel que A appartient à $F(b)$.

Supposons que B soit un point frontière de K tel que

$$bB > bA$$

Soit δ la médiatrice de $[AB]$, b est dans le demi-plan de bord δ contenant A donc a aussi et donc $aB > aA$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi $bB \leq bA$ et A est donc un point le plus éloigné de tout point du segment $[a,a']$.

Conséquence

Une construction aisée de $F(K)$ dans le cas discret par des opérateurs courants en Analyse de l'Image:

Si la frontière de K est représentée sur trame par N points A_i . Soit nB_{A_i} le n ième dilaté de A_i par la boule unité B . Dès que nB_{A_i} recouvre tout K on

obtient les points les plus éloignés de A_i en intersectant $(n-1)B_{A_i}^c$ avec K .

Ce procédé a été réalisé sur un analyseur d'images (NS 1500) et a donné une obtention rapide de $F(K)$.

Proposition 2

$F(K)$ est compact dans \mathbb{R}^2 .

preuve

Soit (P_n) une suite de $F(K)$ qui converge vers P dans K . Montrons que P appartient à $F(K)$.

Par définition

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M_n \in K / M_n P_n = \max \{ M_n x ; x \in K \}$$

(M_n) admet une valeur d'adhérence M dans K . Il existe une sous suite de

$(M_n) : (M_{n_k})$ convergeant vers M .

Par inégalité triangulaire il vient:

$$M_{n_k} P \geq M_{n_k} P_{n_k} - P_{n_k} P \quad \forall n_k$$

$$\text{or } M_{n_k} P \geq M_{n_k} x \quad \forall x \in K$$

D'où en passant à la limite

$$MP \geq Mx \quad \forall x \in K$$

$F(K)$ est fermé dans le compact K donc $F(K)$ est compact.

Définition 1

On appellera quasiroue un convexe compact K tel que $F(K) = \text{Fr}(K)$.

Par exemple un convexe de frontière elliptique d'excentricité inférieure ou égale à $\sqrt{2}/2$ est une quasiroue (cf démonstration en annexe).

Rappelons qu'une roue est un corps convexe compact à diamètre constant dans toutes les directions .Ainsi une roue est un cas particulier de quasiroue.

Essayons de caractériser $F(K)$.

Proposition 3

Tout point de $F(K)$ est extrémal sur $Fr(K)$.

preuve

Soit $M \in F(K)$; soit $m \in K$ tel que $M \in F(m)$. Supposons M non extrémal alors il existe A et B sur $Fr K$ tels que M soit élément de $]AB[$.

Alors m_A ou m_B est plus grand que mM . Donc M est extrémal .•

Remarques

* La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre la figure 4.

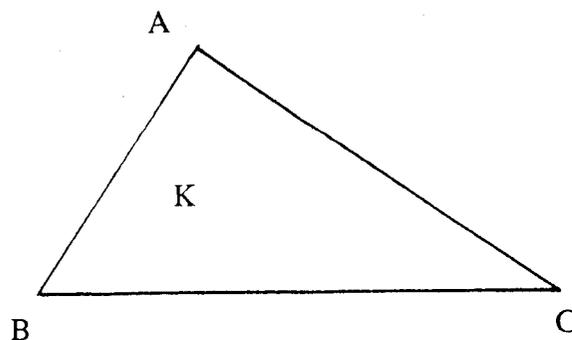


figure 4

$$F(K) = \{ B , C \}$$

A est extrémal sur frK et A n'appartient pas à $F(K)$.

* Dans le cas où K est un polygone convexe l'ensemble des points extrémaux de K est l'ensemble de ses sommets. Nous pouvons donc déduire :

Proposition 4

Si K est un polygone convexe dont l'ensemble des sommets est désigné par S alors $F(K)$ est inclus dans S .

Remarque

En général $F(K) \neq F(S)$. (voir figure 5)

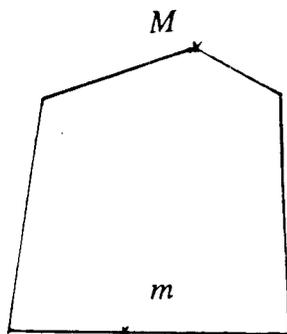


figure 5

M est le plus éloigné de m .

M n'est le plus éloigné d'aucun sommet.

1.3 Le théorème fondamental

1.3.1 Lemme

Soient a et b deux points de $fr(K)$ tels que $d(a,b)$ réalise la distance maximale entre a et un élément de frK , alors le segment $[a b]$ est orthogonal en b à une droite d'appui en b à K .

preuve

(cf figure 6)

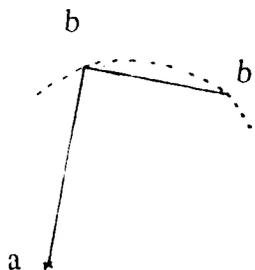


figure 6

Si le segment $[a b]$ n'est orthogonal à aucune des droites d'appui en b , la normale en b au segment $[a b]$ recoupe $\text{fr}(K)$ en un point b' distinct de b .

Tout point c distinct de b de l'arc $\widehat{b b'}$ de $\text{fr}K$ vérifie $d(a,c) > d(a,b)$ ce qui achève la démonstration. •

1.3.2 Conséquences

* Si b est un point de $\text{fr}(K)$, s'il existe une seule droite d'appui en b à K et s'il existe a sur $\text{fr}K$ tel que b est le plus éloigné de a alors a est unique.

* Dans le cas où b est un point anguleux, il n'y a pas unicité de a en général, puisque plusieurs droites d'appui coexistent en b .

1.3.3 Le théorème fondamental

Soient a et b deux points frontières de K tels que b est un point le plus éloigné de a et que la frontière de K est de classe C^2 au voisinage de b alors le centre du cercle osculateur en b appartient à K .

Preuve

Soit $C(o, R)$ le cercle osculateur en b à $\text{fr}K$ et $D(o, R)$ le disque correspondant. Il est clair que a, o et b sont alignés d'après le lemme précédent. Deux situations peuvent se présenter :

1. Un voisinage de b sur $\text{fr}(K)$ est contenu dans $D(o, R)$ (figure 7.1).

Alors tout point c de $]o b]$ n'admet pas b comme point le plus éloigné; en effet, s'il existait c sur $]o b]$ tel que $C(c, cb)$ contienne K alors le rayon de courbure en b serait inférieur strictement à cb !

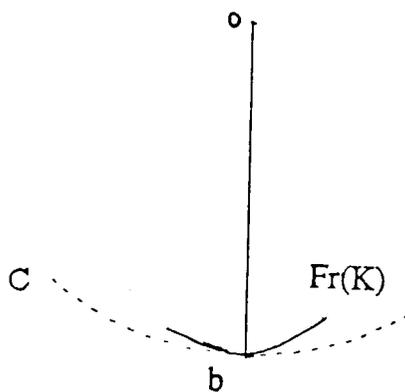
2. Aucun voisinage de b sur $C(o, R)$ est contenu dans $D(o, R)$.

Soit $C(o, R)$ traverse $\text{fr}K$ en b (figure 7.2.a).

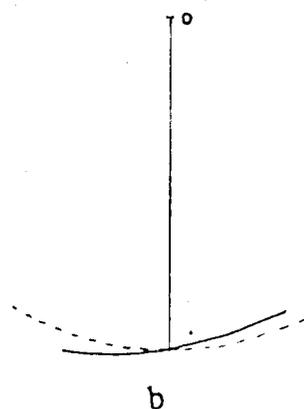
Soit un voisinage de b sur $C(o, R)$ est contenu dans K (figure 7.2.b).

Dans ces deux cas, pour tout c du segment $[o b]$, le cercle $C(c, cb)$ est

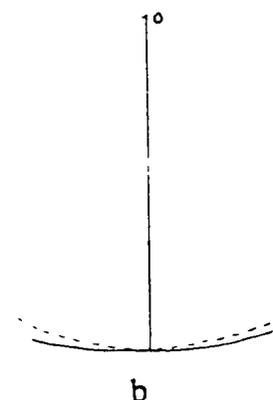
localement contenu dans K ce qui implique que b n'est pas le plus éloigné de c , donc a n'appartient pas au segment $[ob]$ et o appartient à K .



7.1



7.2.a



7.2.b

figures 7

Nous pouvons donc déduire :

1.3.4 Théorème

Si la frontière est de classe C^2 sauf en quelques points anguleux alors tout point de $F(K)$ est anguleux ou admet un centre de courbure dans K .

1.4 Etude des composantes connexes de $F(K)$ et des zones d'éloignement associées dans K

1.4.1 Nous considérons ici les composantes connexes C_i de $F(K)$.

Ces composantes sont compactes car $F(K)$ est compact.

On peut avoir une seule composante connexe ($F(K) = \text{fr}K$) si K est une quasiroue.

Si K est un polygone à n sommets, on a au plus n composantes C_i .

Notons aussi que lorsque une composante C_i est réduite à un point, celui-ci n'est pas toujours anguleux comme le montre l'exemple illustré par la figure 8.

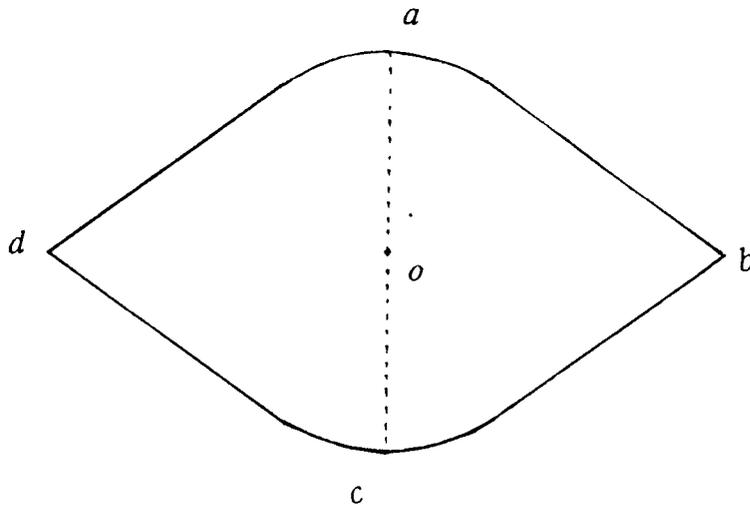


figure 8

Soit un cercle C de centre o de diamètre (ac) .

Soit un diamètre orthogonal à (ac) : (db) tel que $cb = cd = ac$

De d et b menons les tangentes au cercle C . Le convexe K ainsi obtenu de frontière passant par a, b, c, d est tel que a est un point le plus éloigné de c ;
 a n'est pas un point anguleux de frK et a est isolé sur $F(K)$ car tout point frontière de K autre que c a pour plus éloigné d ou b .

1.4.2 Intéressons nous maintenant aux régions du convexe K définies par

$$Z_i = F^{-1}(C_i)$$

appelées ZEM (ou zones d'éloignement maximum) associées aux composantes connexes C_i .

Une autre expression des ZEM peut être donnée par ce qui suit :

Proposition 6

$$Z_i = \bigcup \{ \bigcap \{ (H_{a,b} \cap K) / b \in F(K) - C_i \} / a \in C_i \}$$

où $H_{a,b}$ désigne le demi-plan fermé de bord $d_{a,b}$ médiatrice de $[a,b]$ et contenant b .

Preuve

Soit $Z_i = F^{-1}(C_i)$

Soit $m \in K$

$$m \in Z_i \iff \exists a \in C_i; \quad \forall b \in F(K) - C_i \quad d(a,m) > d(m,b)$$

$$\iff \exists a \in C_i; \quad \forall b \in F(K) - C_i \quad m \in H_{a,b}$$

d' où le résultat. •

Proposition 7

Les ZEM sont compactes dans R^2 .

Preuve

Remarquons d'abord que dans le cas où C_i est réduite à un point, Z_i est alors l'intersection de demi-plans fermés et de K compact, donc Z_i est compacte.

Malheureusement le résultat ne peut se déduire ainsi si C_i n'est pas réduite à un point, car une réunion de fermés n'est pas fermée en général.

Considérons donc dans ce cas une suite (z_n) de Z_i convergeant vers z de K .

$$a_n \in C_i ; a_n \in F(z_n)$$

(a_n) étant une suite du compact C_i , admet une valeur d'adhérence a dans C_i ;

il existe une sous suite (a_{n_r}) de (a_n) convergeant vers a .

$$\forall x \in K \quad z_{n_r} a_{n_r} \geq z_{n_r} x$$

D'où par passage à la limite

$$\forall x \in K \quad z a \geq z x$$

donc $z \in Z_i$.

Z_i est fermée dans K donc Z_i est compacte. •

La convexité des demi-plans $H_{a,b}$ et la stabilité de cette propriété par intersection nous permet d'écrire le résultat suivant:

Proposition 8

Si $F(K)$ n'est composé que de singletons et en particulier si K est un polygone convexe, les ZEM sont convexes. (voir figure 9)

Preuve

Nous avons vu que si K est un polygone, les composantes C_i de $F(K)$ sont des singletons (sommets de K).

Ici la proposition 6 devient

$$Z_i = \bigcap \{ (H_{a,b} \cap K) / b \in F(K) - C_i \} \quad \text{avec } C_i = \{a\}$$

Z_i est une intersection de convexes qui est donc convexe. •

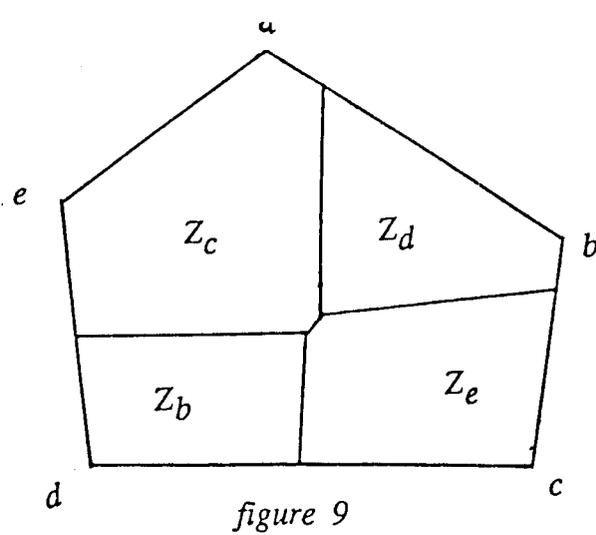


figure 9

$$F(K) = \{ b, c, d, e \}$$

ZEM associées : Z_b, Z_c, Z_d, Z_e

Remarques

1. L'obtention géométrique des ZEM sur un polygone convexe K se fait par simple construction des médiatrices des segments reliant deux points de $F(K)$, en éliminant celles correspondant aux diagonales sécantes auquel cas on ne considère que la diagonale la plus longue.

2. Si au moins une composante connexe de $F(K)$ n'est pas un singleton alors du fait de la non stabilité par réunion de la convexité, les ZEM ne sont pas en général convexes. (voir figure 10)

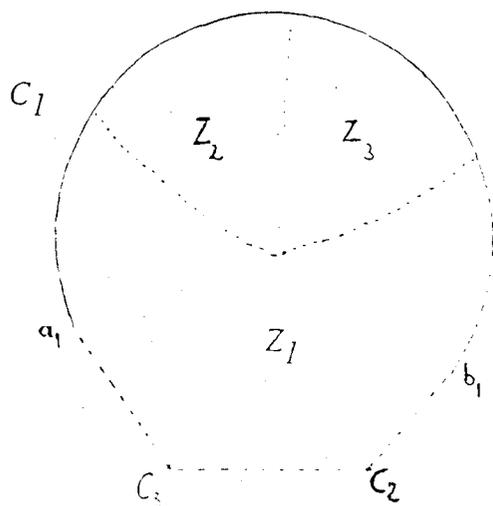


figure 10

$C_1 = \widehat{a_1 b_1}$ (arc de cercle sur frK). $Z_1 = F^{-1}(C_1)$ n'est pas convexe.

3. Le procédé informatique de construction des ZEM a été réalisé par Shamos et Bentley [4] dans le cas où $\text{fr } K$ est composée d'un petit nombre de points. Il est analogue à la construction du diagramme de Voronoï .

2. COURBURE - APPLICATIONS

2.1 Dans le cadre de ses travaux sur la dissymétrie des corps convexes [5] Besicovitch a introduit un coefficient d'asymétrie en posant

$$a_B(K) = 1 - \text{aire}(K_1)/\text{aire}(K)$$

où K est un corps convexe compact et K_1 est le corps convexe compact à centre de symétrie maximal (au sens de l'inclusion) contenu dans K .

Il s'est ensuite intéressé aux roues et a établi que le triangle de Reuleaux est la plus asymétrique des roues (au sens du coefficient a_B). Ce résultat est démontré à la suite de lemmes dont le premier précise que pour une roue K de frontière Γ de diamètre d , il est impossible de trouver trois points de Γ appartenant à un cercle de rayon strictement supérieur à d . Ce lemme n'est pas sans lien avec notre approche de la courbure . Nous allons nous intéresser aux rayons et centres de courbure des frontières C^2 des roues et des quasiroues , généralisant au passage le lemme de Besicovitch à cette dernière classe de convexes .

2.2 Résultats sur les quasiroues

2.2.1 Proposition 9

Soit K une quasiroue de frontière Γ de diamètre maximal d . Trois points de Γ ne peuvent être sur un cercle de rayon strictement supérieur à d .

Preuve

Soient a, b, c trois points de Γ supposés être sur un cercle de rayon r ($r > d$).

Alors a, b, c sont sur un arc de cercle de mesure ϕ inférieure strictement à $\pi/3$ (sinon une des longueurs ac, bc , ou ab serait plus grande que d !). Supposons que b soit entre a et c sur l'arc de cercle de mesure ϕ (voir figure 11); b est le plus éloigné d'un point b' de Γ (car K est une quasiroue).

Soit $bb' = h$ ($h \leq d$);

b' est sur le cercle de centre B de rayon h .

Donc on a

$$b'c > b'b \quad \text{ou} \quad b'a > b'b$$

suivant la place de b' par rapport aux médiatrices de $[bc]$ et $[ab]$.

Par contre on n'a pas

$$b'a = b'b = b'c$$

car alors b' serait le centre o du cercle passant par a, b, c et on aurait

$$h = r \quad \text{donc} \quad h > d !$$

Ainsi un des points a ou c est plus éloigné de b' que b ! Donc a, b, c ne peuvent être sur un cercle de rayon strictement plus grand que d .

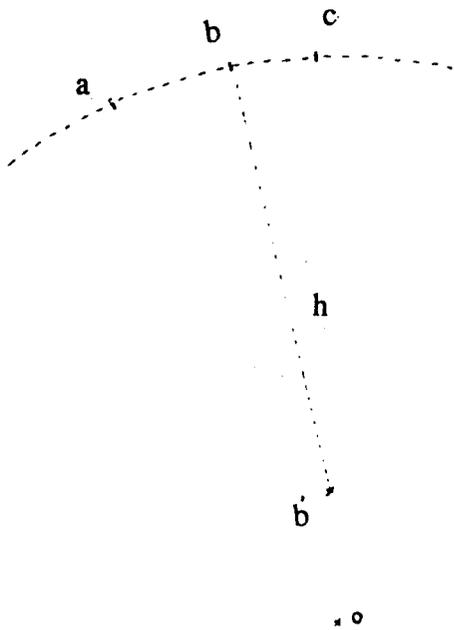


figure 11

Remarque

Si K n'est pas une quasiroue, la proposition 9 n'est plus vraie, même lorsque les trois points considérés ont leurs centres de courbure dans K ; pour cela considérons l'exemple de la figure 12 ("le stade").

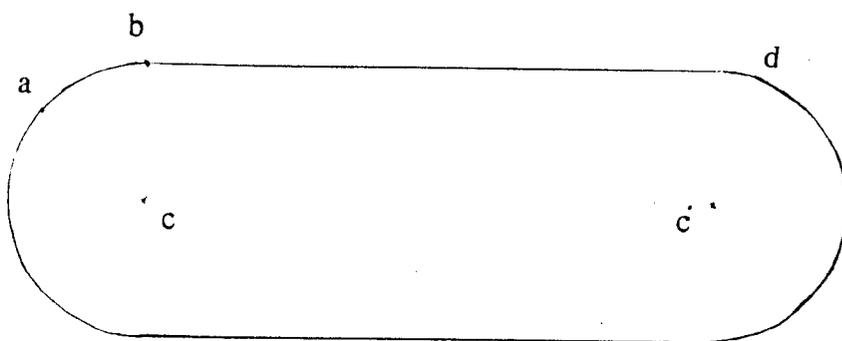


figure 12

Les trois points a, b, d ont leur centre de courbure c et c' dans K et pourtant ils sont sur un cercle de rayon supérieur au diamètre de K .

2.2.2 Conséquences

a) Nous retrouvons quelques résultats vus dans la première partie appliqués ici aux quasiroues :

- Les centres de courbure, lorsqu'ils existent, aux points de Γ sont dans K ; les rayons de courbure sont inférieurs ou égaux à d .

- Aucun segment de longueur non nulle ne peut être contenu dans Γ . (En effet un segment a un rayon de courbure infini.)

b) Proposition 10

Si trois points de Γ sont sur un cercle de diamètre égal à d , le centre de courbure associé est sur Γ .

Preuve

Si le centre de cet arc de cercle était à l'intérieur de K le diamètre de K serait plus grand que d ! •

2.3 Résultats concernant les Roues

Outre ce que nous venons de voir sur les quasiroues, qui est bien évidemment valable pour les roues, nous pouvons préciser quelques propriétés supplémentaires :

Proposition 11

Soit K une roue de diamètre d de frontière Γ . Soit a un point de Γ .

a est un point anguleux si et seulement si a est centre d'un arc de cercle

(non réduit à un point) de rayon d , inclus dans Γ .

De plus si α et ϕ désignent les mesures respectives comprises entre 0 et Π

de l'angle de Γ en a et de l'arc de cercle de centre a sur Γ on a les relations

suivantes : $\alpha + \phi = \Pi$ $0 < \phi \leq \Pi/3$.

Remarquons que cette proposition prolonge la proposition 10, mais elle n'est valable ici que pour les roues (cf preuve).

Preuve

(voir figure 13)

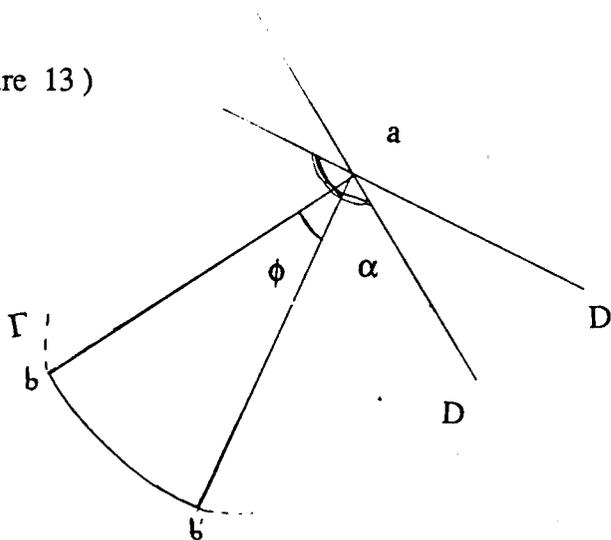


figure 13

* Soit a un point anguleux de Γ . En a existe une infinité de droites d' appui de K dont les extrêmes seront notées D et D' .

Soit α la mesure comprise strictement entre 0 et Π d'angle non orienté des droites D et D' . K étant une roue, a est le plus éloigné des points de l'arc $\widehat{bb'}$ de Γ , où b et b' désignent les intersections de Γ avec les normales en a à D et D' .

Comme K est une roue de diamètre d nous pouvons écrire

$$\forall x \in \widehat{bb'} \quad xa = d$$

Donc $\widehat{bb'}$ est un arc de cercle de centre a de mesure $\phi = \overline{ab, ab'}$ non nulle (car les normales en a (ab) et (ab') sont distinctes).

Nous avons ainsi $\alpha + \phi = \Pi$, $\phi > 0$ et de plus $\Pi/3 \geq \phi$ car $\widehat{bb'} \leq d$.

* Réciproquement soit a un point de Γ , centre d' un arc de cercle $\widehat{bb'}$ inclus dans Γ , de rayon d , de mesure ϕ non nulle inférieure ou égale à $\Pi/3$ (pour la raison déjà vue); a est un point le plus éloigné de tout point de bb' car le diamètre de K est d . Donc (ab) et (ab') sont normales en A à Γ et il existe 2 droites d' appui en a (en positions extrêmes) D et D' respectivement orthogonales à (ab) et (ab') .

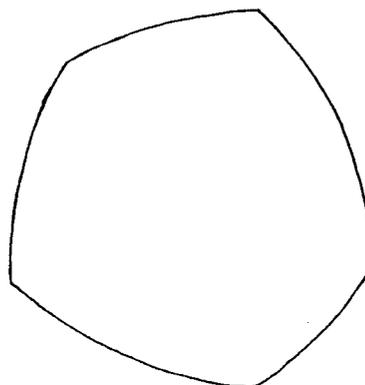
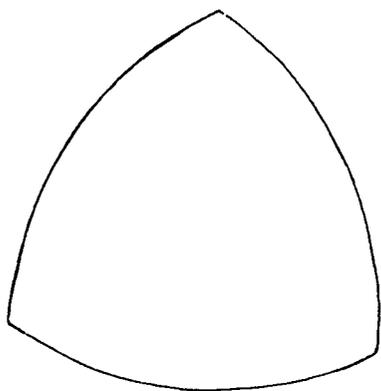
$$D' \text{ où } \alpha = \widehat{D, D'} = \Pi - \phi \text{ et } \alpha \in]2\Pi/3, \Pi[$$

et donc a est un point anguleux •

Remarques

* Cette proposition aurait pu être démontrée aussi en utilisant le fait que toute normale à une roue est en fait doublement normale et la somme des rayons de courbure aux intersections avec la frontière de K est égale au diamètre de la roue (en considérant le rayon de courbure nul en un point anguleux).

* Citons par exemple les roues qui par construction sont telles que leur frontière soit composée d'arcs de cercle de rayon égal au diamètre de la roue; elles sont appelées roues de Reuleaux (voir figures 14). Le triangle de Reuleaux représente un cas limite: en effet en tout point anguleux de sa frontière $\phi = \Pi/3$.



figures 14

triangle de Reuleaux

autre roue de Reuleaux

2.4 Aspect morphologique

Rappel

Le dilaté d'une partie K du plan par un disque B de rayon r est défini et noté par :

$$K \oplus B = \bigcup_{x \in K} B(x, r) \quad \text{ou} \quad \tilde{B}(x, r) \text{ désigne le disque de centre } x \text{ de rayon } r$$

L'érodé de K par B est défini et noté par :

$$K \ominus B = (K^c \oplus B)^c \quad (\text{le symbole } c \text{ correspondant au complémentaire}).$$

Dans cette partie nous considérons des convexes K à bord C^2 par morceaux.

Nous allons nous intéresser à la courbure de la frontière du dilaté ou de l'érodé de K .

Proposition 12

Si R (fini) est le rayon de courbure en un point a de la frontière de K et si a' est l'intersection de la normale en A avec la frontière du dilaté (respectivement de l'érodé) de K par un disque B de rayon r , le rayon de courbure en a' est $R + r$ (respectivement $R - r$ à condition d'avoir $r < R$).

Ainsi par dilatation par un disque B de rayon r d'un corps convexe à bord C^2 les centres de courbure sont invariants et les rayons de courbure sont augmentés de r . Et par érosion par un disque B de rayon r strictement inférieur au minimum des rayons de courbure de $\text{fr}K$ les centres de courbure sont invariants et les rayons de courbure sont diminués de r .

Remarque

Si a est sur un méplat de $\text{fr}K$ alors on peut considérer que R est infini et au point a' correspondant le rayon de courbure est aussi infini et la proposition précédente est encore vraie.

Preuve

* Pour le dilaté

Ce résultat se déduit du fait que la fonction support de la somme de Minkowski de deux convexes compacts est la somme des fonctions support de ces convexes. Ici la fonction support de $K \oplus B$ s'écrit $p(\alpha) + r$ ou $p(\alpha)$ est celle de K . Le rayon de courbure en a de $\text{fr}K$ s'exprime:

$$R = p(\alpha) + p''(\alpha)$$
 (en choisissant convenablement le repère tel que cette expression soit positive)

Le rayon de courbure en a' de $\text{fr}(K \oplus B)$ s'écrit :

$$R' = p(\alpha) + r + p''(\alpha) = R + r$$

ce qui achève la preuve •

* Pour l'érodé :

La preuve est similaire pour l'érodé, à condition d'avoir le rayon de B inférieur strictement à R , et ceci pour garder le caractère C^2 sur la frontière (en effet si cette condition n'est pas respectée il y a apparition d'un point anguleux sur la frontière de $K \ominus B$). L'utilisation de la fonction support est plus délicate

puisque on peut soustraire celle de B de celle de K pour obtenir celle de $K \ominus B$

si et seulement si $(K \ominus B) \oplus B = K$.

Remarques

On pourrait croire que par dilatation par un disque B de rayon r convenable , les centres de courbure de $\text{fr}(K \oplus B)$ deviennent intérieurs à $K \oplus B$. Celà n'est pas vrai si le lieu des centres de courbure de $\text{fr}K$ présente une branche infinie .

En liaison avec le premier chapitre nous avons le résultat suivant :

Proposition 13

Soit K un corps convexe à bord C^2 au voisinage d'un point a' .

Soient c, a, a', c' alignés dans cet ordre tels que a et a' sont sur $\text{fr}K$ et que c et c' sont sur $\text{fr}(K \oplus B)$.

a' est le plus éloigné de a si et seulement si c' est le plus éloigné de c .

preuve

Dans l'une ou l'autre des hypothèses les normales en a' à $\text{fr}K$ et en c' à

$\text{fr}(K \oplus B)$ sont identiques à (aa') . Et les tangentes T et T' en a' et en c' sont parallèles . Ainsi dire que le disque de centre c et de rayon cc' est tangent à T' et contient $(K \oplus B)$ est équivalent à dire que le disque de centre a et de rayon aa' est tangent à T et contient K .•

De ces dernières propositions nous pouvons déduire :

Propositions 14

* Tout dilaté d'une roue (respectivement d'une quasiroue) est une roue (respectivement une quasiroue) ayant mêmes centres de courbure .

* Tout érodé d'une roue (respectivement d'une quasiroue) à bord C^2 par un disque B de rayon r strictement inférieur au plus petit rayon de courbure de $\text{fr}K$, est une roue (respectivement une quasiroue) de mêmes centres de courbure .

3. CONCLUSION

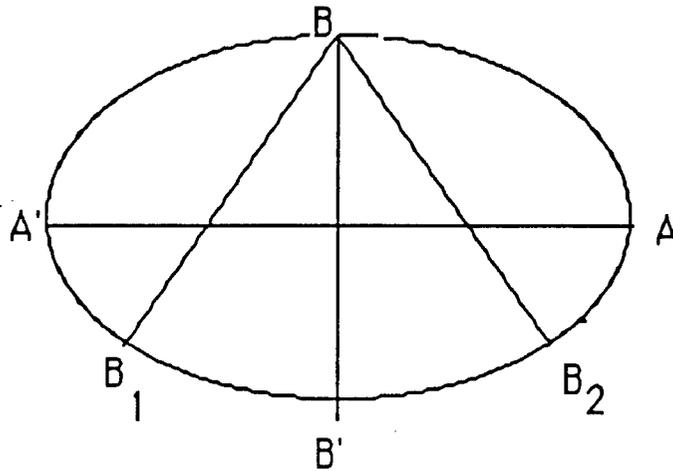
Nous avons vu que les zones d'information sur la courbure de la frontière d'un convexe K correspondent aux points les plus éloignés de K . Notre étude faite dans \mathbb{R}^2 se transpose aisément au cas discret i.e sur une trame. Dans ce cas la notion de courbure n'a aucun sens et par contre celle de points les plus éloignés conserve la même information, sans aucun artifice. De plus l'obtention de ces zones est aisée sur un analyseur par le biais des opérateurs morphologiques. (ce qui n'est pas le cas de tous les procédés des articles précédents [1 à 3].)

Nous avons eu l'occasion d'appliquer notre technique à la détection de cassures sur un comprimé pharmaceutique.

Nous pouvons aussi mettre en place des paramètres de forme liés à $F(K)$:

par exemple la courbure totale de $F(K)$ (égale à 2π pour les quasiroues), ou le rapport de l'aire de l'enveloppe convexe de $F(K)$ sur l'aire de K (égal à 1 si tous les points extrémaux de K sont éléments de $F(K)$).

ANNEXE: PROBLEME DES POINTS LES PLUS
ELOIGNES SUR UN CONVEXE K DE FRONTIERE ELLIPTIQUE



Soit K le convexe de frontière l'ellipse (E) d'équation paramétrique dans le repère orthonormé (O, i, j) :

$$\begin{cases} x = a \cos \beta \\ y = b \sin \beta \end{cases} \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi)$$

Soient $B(0, b)$, $B'(0, -b)$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ les sommets de l'ellipse.

Il est clair que $F(A) = \{A\}$ et $F(A') = \{A'\}$.

Les points $M(\beta)$ de (E) les plus éloignés de B vérifient :

$$-a^2 \sin \beta \cos \beta + b^2 \cos \beta (\sin \beta - 1) = 0 \quad (1)$$

qui exprime que (BM) est normale en M à (E) .

$$(1) \Leftrightarrow \cos \beta [(b^2 - a^2) \sin \beta - b^2] = 0$$

d'où nous déduisons

$$\beta = 3\pi/2 \text{ i.e } M = B'$$

$$\text{ou } \sin \beta = b^2 / (b^2 - a^2) = -b^2 / c^2 \text{ avec la condition } \underline{b \leq c}$$

$$(c \text{ demi distance focale ; } c^2 = a^2 - b^2)$$

Dans ce cas $M = B_1$ ou B_2 de même ordonnée $y = -b^3/c^2$ et d'abscisses opposées $x = \pm (a/c)^2 \sqrt{c^2 - b^2}$.

Par le calcul on obtient :

$$B B_1 (= B B_2) = a^2/c$$

$$\text{or } B B' = 2b$$

$$\text{ainsi } B B_1 - B B' = (b - c)^2/c > 0.$$

Remarquons que le cas $b = c$ donne $B_1 = B_2 = B'$.

Donc si $b < c$ B_1 et B_2 sont les points les plus éloignés de B , sinon (si $b \geq c$) B' est le point le plus éloigné de B .

Par symétrie nous pouvons déduire un résultat analogue pour B' . Notons B_1' et B_2' les symétriques de B_1 et B_2 par rapport à (Ox) .

Par le calcul il est facile de montrer que la condition $b \leq c$ équivaut à $c/a \geq \sqrt{2}/2$ (c/a étant l'excentricité e de l'ellipse).

Soit M_0 point fixé de (E) distinct de B et B' ;

Un point le plus éloigné de M_0 est situé sur l'arc opposé à celui de M_0 .

Du fait de l'unicité de la normale à (E) passant par M_0 et coupant le petit axe $[BB']$ nous pouvons déduire :

Un point M de (E) est le plus éloigné de M_0 si et seulement si (MM_0) est normale en M à (E) et coupe $[BB']$.

L'équation de la normale en un point quelconque $M(\beta)$ de l'ellipse s'écrit :

$$(x - a \cos \beta) a \sin \beta - b \cos \beta (y - b \sin \beta) = 0.$$

Il est aisé de montrer que dans le cas $b \geq c$ cette normale coupe $[BB']$,
et que dans le cas $b < c$ elle coupe $[BB']$ si et
seulement si M appartient à la réunion des arcs frontières $\widehat{B_1 B_1'}$ et $\widehat{B_2 B_2'}$.

Ainsi nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Si l'excentricité e de l'ellipse est inférieure ou égale à $\sqrt{2}/2$ alors $F(K) = (E)$ et K est une quasiroue .

Si e est supérieure à $\sqrt{2}/2$ alors $F(K)$ est la réunion des deux arcs frontières $\widehat{B_1 B'_1}$ et $\widehat{B_2 B'_2}$.

REFERENCES

- [1] I. M. ANDERSON and J.C. BEZSDEK , Curvature and tangential deflection of discrete arcs, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. PAMI-6, no 1, 1984, pp 27-40.
- [2] H. LYNN BEUS and S. S . H. TIU, An improved corner detection algorithm based on chain - coded plane curves, Pattern Recognition , vol. 20, no 3, 1987, pp 291-296 .
- [3] J . ROBERGE, A data reduction Algorithm for planar curves, Computer Vision , Graphics and Image Processing 29, 1985, pp 168-195 .
- [4] BENTLEY, M. SHAMOS Optimal algorithms for structuring geographic data Proceedings of the symposium on topological data structure for geographic information system , Harvard University , 1977 , pp 43-74 .
- [5] A. S. BESICOVITCH , Measure of asymmetry of convex curves , The Journal of the London Mathematical Society, vol 26, Part 2, 1951, no 102 .